$SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO$

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN BẮC GIANG

|  |
| --- |
|  Đề chính thức |

 NĂM HỌC 2023-2024

 MÔN THI: TOÁN

Câu 1(5,0 điểm)

* 1. Rút gọn biểu thức Q=$\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}+\sqrt{x-y}}+\frac{x-y}{\sqrt{x^{2}-y^{2}}-x+y}\right).\frac{x^{2}+y^{2}}{\sqrt{x^{2}-y^{2}}}với x>y>0.$
	2. Cho đường thẳng d có phương trình y=(3m+1)x-6m-1,m là tham số. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d là lớn nhất.
	3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^{2}-2\left(3m-1\right)x+m^{2}-m-4=0 có hai nghiệm phân biệt x\_{1},x\_{2}$ thỏa mãn $\left(x\_{1}+x\_{2}+\sqrt{x\_{1}x\_{2}}\right)+\left(x\_{1}+x\_{2}-\sqrt{x\_{1}x\_{2}}=2008\right)$

Câu 2(4,0 điểm)

2.1. giải phương trình 4$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=x+7.$

2.2 giải hệ phương trình : $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+x-2xy=2\\x^{4}+x^{2}-4x^{3}y=4-4x^{2}y^{2}\end{array}\right.$

Câu 3( 4 điểm)

3.1. tìm các bộ ba số nguyên dương (x,y,z) thỏa mãn đẳng thức dưới đây:

$$x^{3}+y^{3}+x^{2}\left(3y+2z\right)+y^{2}\left(3x+2z\right)+z^{2}\left(x+y\right)+4xyz=2023.$$

3.2. trên mặt phẳng cho 2$×2024 điểm phân biệt , trong đó không có bất kì 3 điểm nào thẳng hàn$g$.người ta tô 2024 điểm trong các điểm đã cho bằng màu đỏ $và tô 2024 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng, bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2024 đoạn thẳng(mỗi đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là một cặp điểm đỏ-xanh) sao cho hai đoạn thẳng bất kì trong đó không có điểm chung .

Câu 4( 6 ĐIỂM), cho đường tròn (O:R) và dây cung BC cố định của đường tròn thỏa mãn BC$<2R. $Một điểm A di chuyển trên (O:R) sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. các đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . đường phân giác của $\hat{CHE} kéo dài $về hai phía cắt AB và AC lần lượt tại M,N.

4.1 chứng minh tam giác AMN cân tại A.

4.2. gọi I , P, Q,J lần lượt là hình chiếu của D trên cạnh AB,BE,CF,AC. Chứng minh rằng bốn điểm I,P,Q,J cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với AO.

4.3. đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của $\hat{BAC}$ tại điểm thứ hai K. chứng minh rằng Hk luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5(1,0 điểm), cho x,y,z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện x+y+z=xyz. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức P=$\frac{1}{\sqrt{1+X^{2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+Y^{2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+Z^{2}}}.$

 --------------------------------Hết------------------------------------------

**Hướng dẫn giải**

Câu 1

1.1 Rút gọn biểu thức Q=$\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}+\sqrt{x-y}}+\frac{x-y}{\sqrt{x^{2}-y^{2}}-x+y}\right).\frac{X^{2}+Y^{2}}{\sqrt{X^{2}-Y^{2}}}với x>y>0.$

Giải Q=$\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}+\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{\left(x+y\right)^{2}}}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(x-y\right)}-\sqrt{\left(x-y\right)^{2}}}\right) . \frac{x^{2}+y^{2}}{\sqrt{x^{2}-y^{2}}}$

$$\sqrt{x-y}.\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}-y}\right). \frac{x^{2}+y^{2}}{\sqrt{x^{2}-y^{2}}}$$

 = $\sqrt{x-y}$.$\frac{\sqrt{x+y}}{y}. \frac{x^{2}+y^{2}}{\sqrt{x^{2}-y^{2}}}$

 =$\frac{x^{2}+y^{2}}{y}$

KL.

1.2 Cho đường thẳng d có phương trình y=(3m+1)x-6m-1,m là tham số. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d là lớn nhất.

Giải

Chỉ ra đường thẳng d luôn đi qua điểm M(2;1)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng d

Suy ra OH$\leq OM ∀m$

Chỉ ra đường thẳng OM có phương trình là y=$\frac{1}{2}x.$

Do OM $⊥d nên\frac{1}{2}\left(3m+1\right)=-1⟺3m+1=-2⟺m=-1.KL.$

* 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^{2}-2\left(3m-1\right)x+m^{2}-m-4=0 có hai nghiệm phân biệt x\_{1},x\_{2}$ thỏa mãn $\left(x\_{1}+x\_{2}+\sqrt{x\_{1}x\_{2}}\right)+\left(x\_{1}+x\_{2}-\sqrt{x\_{1}x\_{2}}=2008\right)$

Phương trình $x^{2}-2\left(3m-1\right)x+m^{2}-m-4=0\left(1\right)có hai nghiệm phân biệt$

$$⟺∆^{'}>0$$

$$⟺\left(3m-1\right)^{2}-\left(m^{2}-m-4\right)>0$$

$$⟺8m^{2}-5m+5>0$$

$$⟺8\left(m-\frac{5}{16}\right)^{2}+\frac{132}{32}>0;∀m\in $$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x\_{1},x\_{2}$

Theo Vi-ét ta có :$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+x\_{2}=2\left(3m-1\right)\\x\_{1}x\_{2}=m^{2}-m-4\end{array}\right.$

Đặt A=$x\_{1}+x\_{2}+\sqrt{x\_{1}x\_{2} };B=x\_{1}+x\_{2}-\sqrt{x\_{1}x\_{2}}$

Ta có A.B = $\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}-x\_{1}x\_{2}=\left(x\_{1}+\frac{x\_{2}}{2}\right)^{2}+\frac{3x\_{2}^{2}}{4}>0,∀x\_{1}x\_{2}$

Suy ra A và B luôn cùng dấu $⟹\left|A\right|+\left|B\right|=\left|A+B\right|$

Do đó $\left|X\_{1}+X\_{2}+\sqrt{X\_{1}X\_{2}}\right|+\left|X\_{1}+X\_{2}-\sqrt{X\_{1}X\_{2}}\right|=2008$

$$⟺\left|X\_{1}+X\_{2}+\sqrt{X\_{1}X\_{2}}+X\_{1}+X\_{2}-\sqrt{X\_{1}X\_{2}}\right|=2008$$

$$⟺\left|X\_{1}+X\_{2}\right|=1004$$

$$⟺2\left|3m-1\right|=1004$$

$$⟺\left|3m-1\right|=502⟺\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{m=\frac{503}{3}}{m=-167}\right.$$

Câu 2

2.1. giải phương trình 4$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=x+7.$

Giải

Điều kiện x$\geq 1.$

Ta có (1)$⟺x+3-4\sqrt{x+3}+4+\sqrt{x-1}=0$

$$⟺\left(\sqrt{x+3}-2\right)^{2}+\sqrt{x-1}=0$$

$$⟺\left\{\begin{array}{c}\sqrt{x+3}=2\\\sqrt{x-1}=0\end{array}\right.$$

$$⟺x=1.KL$$

2.2 giải hệ phương trình : $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+x-2xy=2\\x^{4}+x^{2}-4x^{3}y=4-4x^{2}y^{2}\end{array}\right.$

Giải

: $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+x-2xy=2\\x^{4}+x^{2}-4x^{3}y=4-4x^{2}y^{2}\end{array}\right.⟺\left\{\begin{array}{c}x^{2}-2xy=2-x\\\left(x^{4}-4x^{3}y+4x^{2}y^{2}\right)+x^{2}-4=0\end{array}\right.$

$$⟺\left\{\begin{array}{c}x^{2}-2xy=2-x\\\left(x^{2}-2xy\right)^{2}+x^{2}-4=0\end{array}\right.$$

$$⟺\left\{\begin{array}{c}x^{2}-2xy=2-x\\\left(2-x\right)^{2}-x^{2}-4x=0\end{array}\right.$$

$$⟺\left\{\begin{array}{c}x^{2}-2xy=2-x\left(\*\right)\\\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x=0}{x=2}\right.\end{array}\right.$$

+) với x=0 , thay vào(\*) ta được 0=2 (vô lý)

+) với x=2, thay vào (\*) ta được y=1

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (2;1)

Câu 3

3.1. tìm các bộ ba số nguyên dương (x,y,z) thỏa mãn đẳng thức dưới đây:

$$x^{3}+y^{3}+x^{2}\left(3y+2z\right)+y^{2}\left(3x+2z\right)+z^{2}\left(x+y\right)+4xyz=2023.$$

Giải

$$x^{3}+y^{3}+x^{2}\left(3y+2z\right)+y^{2}\left(3x+2z\right)+z^{2}\left(x+y\right)+4xyz=2023.$$

$$⟺x^{3}+y^{3}+3x^{2}y+2x^{2}z+3xy^{2}+2y^{2}z+z^{2}x+z^{2}y+4xyz=2023$$

$$⟺\left(x^{3}+3x^{2}y+3xy^{2}+y^{3}\right)+\left(2x^{2}z+2y^{2}z+4xyz\right)+\left(z^{2}x+z^{2}y\right)=2023$$

$$⟺\left(x+y\right)^{3}+2z\left(x+y\right)^{2}+z^{2}\left(x+y\right)=2023$$

$$⟺\left(x+y\right)\left[\left(x+y\right)^{2}+2z\left(x+y\right)+z^{2}\right]=2023$$

$$⟺\left(x+y\right)\left(x+y+z\right)^{2}=7.17^{2}$$

Vì x,y,z nguyên dương nếu ta có x+y+z$>0.do đó:$

$$\left\{\begin{array}{c}x+y=7\\x+y+z=17\end{array}⟺\left\{\begin{array}{c}x+y=7\\z=10\end{array}\right.\right.$$

Có x+y=7 mà x,y nguyên dương nên ta có

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

KL: các bộ số cần tìm là (1;6;10);(3;4;10);94;3;10);(5;2;10);(6;1;10)

3.2. trên mặt phẳng cho 2$×2024 điểm phân biệt , trong đó không có bất kì 3 điểm nào thẳng hàn$g$.người ta tô 2024 điểm trong các điểm đã cho bằng màu đỏ $và tô 2024 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng, bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2024 đoạn thẳng(mỗi đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là một cặp điểm đỏ-xanh) sao cho hai đoạn thẳng bất kì trong đó không có điểm chung .

Giải

Xét tất cả các cách nối 2024 cặp điểm (đỏ với xanh) bằng 2024 đoạn thẳng. các cách nối như vậy luôn luôn tồn tại do chỉ có 2024 cặp điểm nên số tất cả các cách nối như vậy là hữu hạn.

Do đó , ắt tìm được một cách nối có tổng độ dài bằng các đoạn thẳng là ngắn nhất.

Ta chứng minh rằng đây là một cách nối phải tìm

Thật vậy , giả sữ ngược lại ta có hai đoạn thẳng AX và BY mà cắt nhau tại điểm O (giả sử A và B tô màu đỏ, còn X và Y tô màu xanh).khi đó nếu ta thay đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, các đoạn thẳng khác giữ nguyên thì ta có cách nối này có tính chất:

AY+BX $<\left(AO+OY\right)=\left(AO+OX\right)+\left(BO+OY\right)⟹AY+BX<AX+BY$

Như vậy , việc thay hai đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX , ta nhận được một cách nối mới có tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ hơn. Vô lý, vì trái với giả thiết là đã chọn một cách nối có tổng các độ dài là bé nhất.

Điều vô lý chứng tỏ: cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất là không có điểm chung.

Câu 4 cho đường tròn (O:R) và dây cung BC cố định của đường tròn thỏa mãn BC$<2R. $Một điểm A di chuyển trên (O:R) sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. các đường cao AD,BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . đường phân giác của $\hat{CHE} kéo dài $về hai phía cắt AB và AC lần lượt tại M,N.

4.1 chứng minh tam giác AMN cân tại A.

4.2. gọi I , P, Q,J lần lượt là hình chiếu của D trên cạnh AB,BE,CF,AC. Chứng minh rằng bốn điểm I,P,Q,J cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với AO.

4.3. đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của $\hat{BAC}$ tại điểm thứ hai K. chứng minh rằng Hk luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:



4.1. chứng minh tam giác AMN cân tại A.

Vì BE$ ⊥AC=E nên HEC=90°$

Vì CF $⊥AB=F nên HFB=90°$

$$⟹FMH+MHF=90°;ENH+NHE=90° \left(1\right)$$

Vì HN là phân giác của góc CHE nên CHN=NHE

Lại có CHN=MHF ( đối đỉnh) nên NHE=MHF (2)

Từ (1) và (2) suy ra FMH=ENH hay AMN =ANM

Vậy $∆AMN cân tại A.$

4.2. 4.2. gọi I , P, Q,J lần lượt là hình chiếu của D trên cạnh AB,BE,CF,AC. Chứng minh rằng bốn điểm I,P,Q,J cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với AO.

Giải

Chỉ ra tứ giác BIPD nội tiếp nên IBD +IPD =180$° \left(3\right)$

Chỉ ra IBD=FHA ( cùng phụ với góc FAH);

Lại có FHA =QHD( đối đỉnh)$⟹IBD=QHD;$

Chỉ ra tứ giác DPHQ nội tiếp nên QHD=QPD$⟹IBD=QPD \left(4\right)$

Từ (3) và (4) suy ra QPD + IPD =180$° nên ba điểm I,P,Q thẳng hàng.$

Chứng minh tương tự ta được P,Q,J thẳng hang.

Vậy 4 điểm I,P,Q,J thẳng hang.

Từ tứ giác BIPD nội tiếp chỉ ra MIP=PDB

Lại có PD//AC (cùng vuông góc với BE)nên PDB=ACB

Qua A kẻ tiếp tuyến tAt’ của (O)suy ra AO$⊥At;tAB=ACB\left( cùng bằng ^{1}/\_{2}sđ AB\right)$

Suy ra tAI = AIP

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên IP//At $⟹IP⊥AO \left(đpcm\right)$

4.3. đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của $\hat{BAC}$ tại điểm thứ hai K. chứng minh rằng Hk luôn đi qua một điểm cố định.



Giải

Vì $∆AMN cân tại A và AK là phân giác của góc MAN nên AK là trung trực của MN$

$$⇒AK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ∆AMN$$

AKM=ANK =90$°⇒KM$//CF ; KN //BE

Gọi R =KM$∩BH;s=KN∩HC ⇒HRKS là hình bình hành$

$$⟹HK đi qua trung điểm của RS \left(5\right)$$

Từ MR//FH$⇒\frac{HR}{RB}=\frac{FM}{MB};$

Vì HN là phân giác của góc CHE nên HM là phân giác của góc BHF $⇒\frac{FM}{MB}=\frac{FH}{HB}$

Từ SN//HE $⇒\frac{HS}{SC}=\frac{EN}{NC};$

Vì HN là phân giác của góc CHE nên $\frac{EN}{NC}=\frac{HE}{HC}$

Chỉ ra $∆FHB\~∆EHC\left( góc-góc\right)⇒\frac{FH}{NC}=\frac{HE}{HC}$

$⇒\frac{HR}{RB}=\frac{HS}{SC}⇒RS$//BC (6)

Từ (5) và (6) suy ra HK luôn đi qua trung điểm của BC ( cố định). KL

Câu 5(1,0 điểm), cho x,y,z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện x+y+z=xyz. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức P=$\frac{1}{\sqrt{1+X^{2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+Y^{2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+Z^{2}}}.$

Giải

Từ giả thiết x+y+z=xyz, ta có $\frac{1}{xy}=\frac{1}{yz}=\frac{1}{xz}=1.$

Dặt a=$\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}⇒a,b,c>0;$

Giả thiết trở thành ab+bc+ca=1; P=$\frac{a}{\sqrt{1+a^{2}}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^{2}}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^{2}}}$

Đẻ ý rằng:

$$a^{2}+1=a^{2}+ab+bc+ca=\left(a+b\right)\left(a+c\right)$$

$$b^{2}+1=b^{2}+ab+bc+ca=\left(b+a\right)\left(b+c\right)$$

$$c^{2}+1=c^{2}+ab+bc+ca=\left(c+a\right)\left(c+b\right)$$

Lúc này ta có”

P=$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+C)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+C)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$

=$\sqrt{\frac{a}{a+b}.}\sqrt{\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+a}.}\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}.}\sqrt{\frac{c}{c+b}} $

Theo bất đẳng thức Cô-si (AM-GM), ta có:

P$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right)$ hay P$\leq \frac{3}{2}$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi a=b=c=$\frac{1}{\sqrt{3}} hay x=y=z=\sqrt{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của P=$\frac{3}{2} là đạt được khi và chỉ khi x=y=z=\sqrt{3}.$