**ĐỀ SỐ 09**

**Câu I. *(4 điểm)***

**1.** Tính tổng .

**2.** Giải phương trình: 

**Câu II. *(4 điểm)***

**1.** Giải phương trình :.

**2.** Giải hệ phương trình 

**Câu III. (4,0 điểm) .**

**1.** Cho 3 số dương  thỏa mãn:  . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: 

**2.** Cho dãy số xác định bởi: .Tìm số hạng tổng quát và tính giới hạn 

**Câu IV. (4 điểm)**

**1.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số khác nhau mà có mặt hai chữ số lẻ và ba chữ số chẵn , trong đó mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần?

**2.** Cho các số  theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số  theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm .

**Câu V.** **(4,0 điểm)**

**1.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Một mặt phẳng không qua S cắt các cạnh SA, SB , SC , SD lần lượt tại M , N , P , Q thỏa mãn :  .Tính tỉ số  khi biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất.

**2.** Cho lăng trụ .Một mặt phẳng  thay đổi và luôn song song với mặt đáy cắt các đoạn lần lượt tại . Hãy xác định vị trí  sao cho dt nhỏ nhất

**ĐÁP ÁN**

**Câu I. *(4 điểm)***

**1.** Tính tổng .

**2.** Giải phương trình: 

**Lời giải**

**1.** Ta có:  với số hạng tổng quát là 

Từ đó:





2) Điều kiện: .

**Cách 1:** 

Vậy tập nghiệm .

**Cách 2:**

Đặt , ta có phương trình:  Vậy tập nghiệm .

**Câu II. *(4 điểm)***

**1.** Giải phương trình :.

**Lời giải**

Điều kiện:  .

Với điều kiện  ta có :

Phương trình 







 



Vậy phương trình đã cho có nghiệm .

**2.** Giải hệ phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Phương trình đầu 



Giải ( 1): 

Giải ( 2): 

Thế  vào phương trình thứ hai ta được:





Giải (3): hệ có nghiệm 

Giải (4) : 

Ta thấy với mọi  thì  do đó phương trình (4) vô nghiệm.

**Câu III. (4,0 điểm) .** **1.** Cho 3 số dương  thỏa mãn:  . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: 

**Lời giải**

Đặt . Khi đó .

\* Khi đó  và điều kiện trở thành 

còn 

\* Ta có: 

 thế vào P thì:



Mặt khác từ giả thiết ta có:   thế vào P thì ta được: . Ta chứng minh 

\* Thật vậy khi đó BĐT

Ta có:  

Xét :  

BĐT đúng nếu ta lấy c là số lớn nhất thì  Ta có điều phải chứng minh. Vậy  tại  

**2.** Cho dãy số xác định bởi: .Tìm số hạng tổng quát và tính giới hạn 

**Lời giải**

Số hạng tổng quát có dạng  thật vậy

Ta có  thay vào công thức  thấy thỏa mãn.

Do đó: 

**Câu IV. (4 điểm)**

**1.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số khác nhau mà có mặt hai chữ số lẻ và ba chữ số chẵn , trong đó mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần?

**Lời giải**

Gọi các chữ số lẻ khác nhau là  thuộc  và ba chữ số chẵn khác nhau là  thuộc .

+ TH1: Nếu chọn một chữ số x lẻ đứng đầu thì có 5 cách chọn, chữ số y lẻ còn lại và ba chữ số chẵn thì số cách chọn là  và chọn lại bộ có một cách. Bây giờ ta sắp xếp vị trí cho bộ 7 chữ số (không kể số lẻ x đứng đầu) thì có các cách khác nhau là: ( Ta nói x có 5 cách chọn nghĩa là đã xếp vị trí cho x, việc còn lại là sắp xếp vị trí cho bộ 7 chữ số còn lại).

Vậy trường hợp 1 có các số thỏa mãn bài toán là : (số)

+ TH2: Nếu chọn 1 chữ số chẵn a đứng đầu thì có 4 cách, hai chữ số  có  cách, chọn lại chữ số a có 4 cách, chọn lại cặp có một cách. Chọn hai chữ số lẻ có  cách. Bây giờ ta sắp xếp vị trí cho bộ 7 chữ số (không tính a) thì có các cách khác nhau là: 

Vậy trường hợp 2 có các số thỏa mãn bài toán là : (số)

Vậy số các số thỏa mãn bài toán là :  số.

**Cách 2 .**

Gọi các chữ số lẻ khác nhau là  thuộc  và ba chữ số chẵn khác nhau là thuộc .

+ TH1: Bộ 3 chữ số chẵn  không có chữ số 0.

Số cách chọn bộ 3 số chẵn cách. Số cách chọn 2 số lẻ  là . Bây giờ ta sẽ sắp các chữ số vào 8 vị trí: Chọn 2 vị trí trong 8 vị trí để xếp chữ số chẵn thứ nhất có cách, chọn 2 vị trí trong số 6 vị trí còn lại để xếp chữ số chẵn thứ 2 có , chọn 2 vị trí trong 4 vị trí còn lại để xếp chữ số chẵn thứ 3 có cách, hai vị trí còn lại sắp 2 chữ số lẻ có 2! cách.

Vậy số các số thõa mãn trường hợp 1: (số)

+ TH2: Bộ 3 chữ số chẵn  có chữ số 0.

Số cách chọn 2 số chẵn còn lại . Số cách chọn 2 số lẻ  là . Bây giờ ta sẽ sắp các chữ số vào 8 vị trí: Chọn 2 vị trí trong 7 vị trí để xếp chữ số 0 (trừ vị trí đầu tiên) cócách, chọn 2 vị trí trong số 6 vị trí còn lại để xếp chữ số chẵn thứ 2 có , chọn 2 vị trí trong 4 vị trí còn lại để xếp chữ số chẵn thứ 3 có cách, hai vị trí còn lại sắp 2 chữ số lẻ có 2! cách.

Vậy số các số thõa mãn trường hợp 2: (số).

Vậy số các số thỏa mãn bài toán là :  số.

**Câu IV.2.**Cho các số  theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số  theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm .

**Lời giải**

+ theo thứ tự lập thành CSC nên ta có:



+ theo thứ tự lập thành CSN nên ta có:



+Thay (1) vào (2) ta được: 

.

**Câu V.** **(4,0 điểm)**

**1.**Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Một mặt phẳng không qua S cắt các cạnh SA, SB , SC , SD lần lượt tại M , N , P , Q thỏa mãn :  .Tính tỉ số  khi biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

****

• Dựng mặt phẳng (P) không qua S thỏa mãn yêu cầu bài toán :

Trên đoạn SA lấy M sao cho SA = 2 SM

Trên đoạn SC lấy P sao cho SC = 3 SP

Trong mp (SAC) : gọi 

Do 

MP , NQ phân biệt ,không song song

 SO,MP, NQ đồng quy tại G .

Trong (SBD ) : Qua G kẻ đường thẳng d cắt SB tại N , SD tại Q .

• Trong mặt phẳng (SAC) vẽ AE , CF song song với MP cắt SO lần lượt tại E , F .

Vì AE // MP nên ta có : .

CF // MP nên ta có:  .

Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được:

 (1)

Xét  và  có :

OA = OC ( vì ABCD là hình bình hành )

 ( đối đỉnh)

 (2 góc ở vị trí SLT , AE//CF)

 (g.c.g)

 (2 cạnh t/ư)

Mà AE // CF (theo cách dựng)

 Tứ giác AECF là hình bình hành (dhnb) (2)

Từ (1) và (2) ta có: 

Tương tự trong (SBD) ta cũng kẻ các đường thẳng song song với NQ và cũng chứng minh được 

Suy ra 

Đặt  ta có: 

Khi đó 

 khi x = 4



**2.** Cho lăng trụ .Một mặt phẳng  thay đổi và luôn song song với mặt đáy cắt các đoạn lần lượt tại .Hãy xác định vị trí  sao cho  nhỏ nhất

**Lời giải**

Chart

Description automatically generated

Gọi  là thiết diện của  với lăng trụ .Do  thay đổi và luôn song song với mặt đáy nên 

Đặt và các cạnh bên bằng nhau và bằng ,

Xét  có .Theo định lí talet: 

Xét  có  . Theo định lí talet: ta cũng có

Nên tỉ số diện tích: 

Tương tự ta cũng có các kết qủa sau: 

Xét 

.Cộng các đẳng thức lại với nhau ta có :



Đặt .Vâỵ để  nhỏ nhất  thì lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy: 

Dấu bằng xẩy ra khi: 

Vậy  đi qua trung điểm cạnh bên và luôn song song với mặt đáy thì  nhỏ nhất và bằng nửa diện tích đáy.