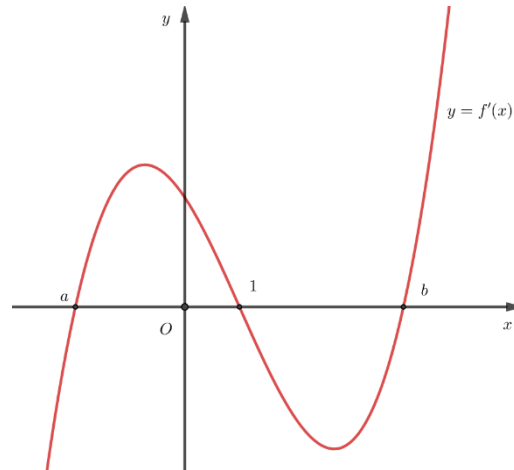


DẠNG 5**Cực trị chứa dấu giá trị tuyệt đối**

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Gọi tập S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên $m \in [-21; 21]$ để hàm số $f(|x^2 + 2mx - 1|)$ có đúng 7 điểm cực trị. Số phần tử của S là:



- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y = f'(x) = x(x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|2x+1|-1)$ là:

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 1.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $y = f'(x) = x(x-2)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|2x+m|-m)$ có đúng ba điểm cực trị

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

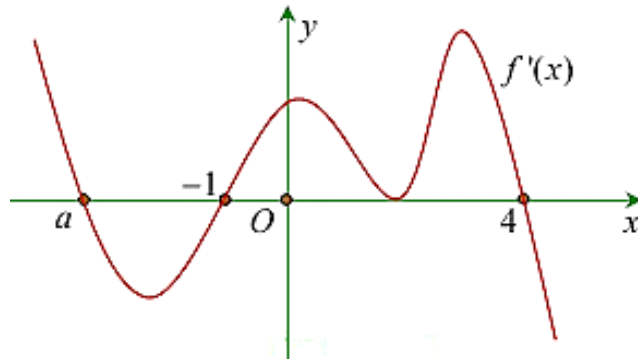
Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x) = x^2 - mx - 6 + m$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(|3x-2|+1)$ có đúng 5 điểm cực trị?

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2mx + 12 + m$, với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(|2x-m^2|+m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

- A. 27. B. 26. C. 25. D. 29

Câu 6: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(|x^3 - 3m^2x|)$ có đúng 11 điểm cực trị?



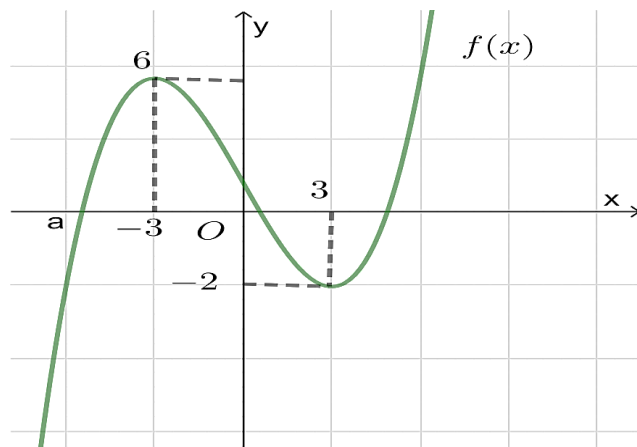
A. 29.

B. 23.

C. 21.

D. 22

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|f(x) - m|)$ có đúng 11 điểm cực trị?



A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 0.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 2(m-4)x - 1 & \text{neu } x \leq 1 \\ 4x^2 - 2(m-a)x + b & \text{neu } 1 < x < 3 \end{cases}$, với a và b là những số thực xác

định và hàm số liên tục trên toàn $\mathbb{R}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx + n & \text{neu } x < -1 \\ x^2 + nx + m - 9 & \text{neu } x \geq -1 \end{cases}$, với hai tham số thực m và n . Hỏi có tất cả

bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị?

A. 6.

B. 36.

C. 11.

D. 5

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30; 30]$ để hàm số $f(|x^2 - 4x + 3| + mx)$ có 9 điểm cực trị?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 31

Câu 11: Cho hàm số $y = |x - 1| + |x + 1| + |x - 2| - 2x + 1$. Hàm số đạt cực tiểu tại

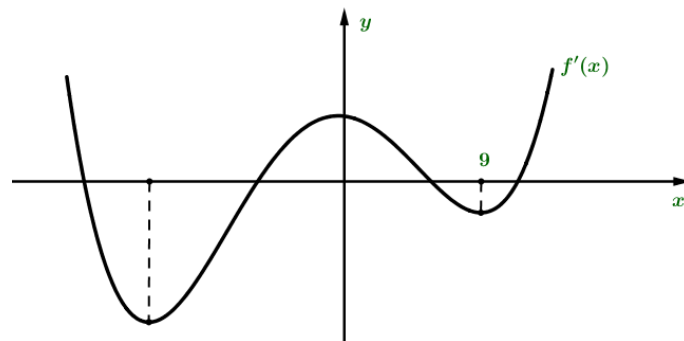
A. $x = 2$

B. $x = 1$

C. $x = -1$

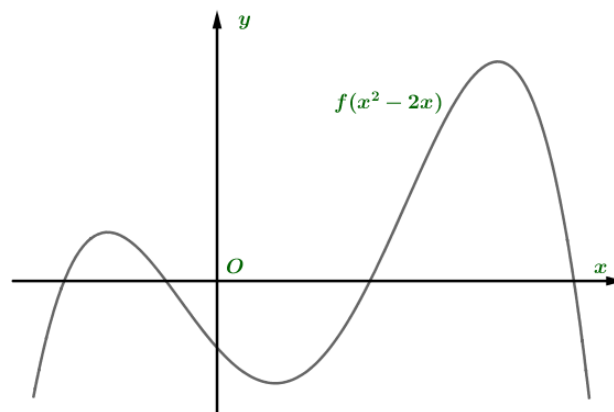
D. $x = 0$

- Câu 12:** Cho hàm số $y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| - m^2x + 1$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?
- A. 4 B. 1 C. 3 D. 5
- Câu 13:** Cho hàm số $f(x) = |x-1| + 3|x-2| + 5|x-3| + mx$; với m là tham số. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị?
- A. 17. B. 15. C. 16. D. vô số.
- Câu 14:** Cho hàm số $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-n|$. với n là số nguyên dương không lớn hơn 2021. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số n để hàm số có cực trị?
- A. 1010. B. 1011. C. 1009. D. 2020.
- Câu 15:** Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = |x^2 - 4x + 3| + |x+1|$ là:
- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.
- Câu 16:** Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(x) = |x^2 - 2mx + 1| + 4x$ có điểm cực đại với giá trị cực đại tương ứng nằm trong khoảng $(3;4)$ và đồng thời thỏa mãn $10m$ là số nguyên. Số phần tử của tập S là
- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.
- Câu 17:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(6|x| - x^2)$ có số điểm cực trị là.



- A. 9. B. 7. C. 13. D. 11

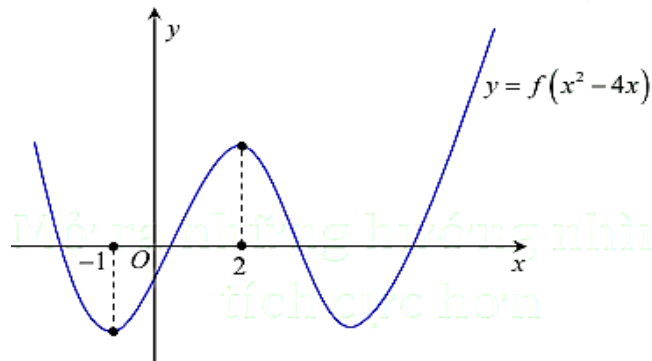
- Câu 18:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2mx - |x-m| + m^2)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị.



- A. 7. B. 3. C. 5. D. 9

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 4x)$ được cho như hình vẽ.

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 8|x| + 12)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



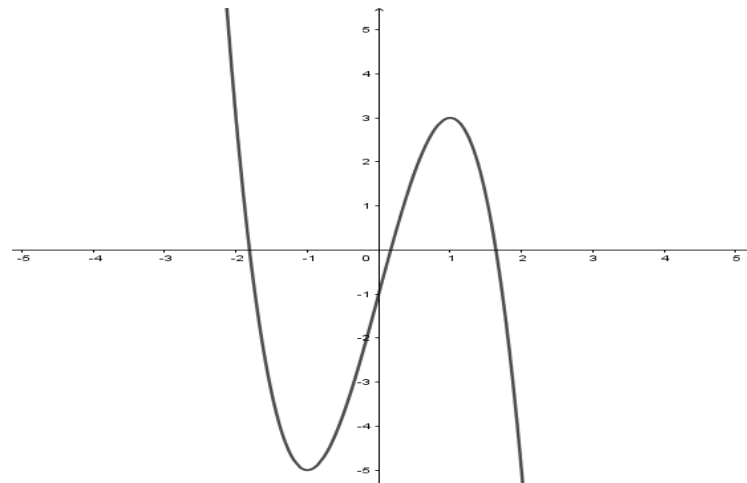
A. 3.

B. 5.

C. 9.

D. 7.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $f(|x| + |x - 1|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

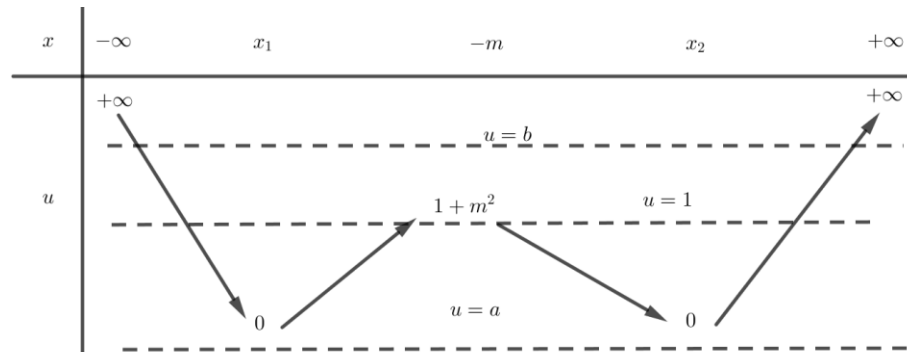
BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. C	4.D	5.B	6.A	7. C	8. D	9.D	10.B
11.A	12.C	13.B	14.B	15.B	16.C	17.D	18.C	19.D	20.B

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn A**

Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị là: $x = a < 0; x = 1; x = b > 1$

Xét hàm số $f(|x^2 + 2mx - 1|) = f(u)$. Ta có bảng biến thiên của $u = |x^2 + 2mx - 1|$ như sau:



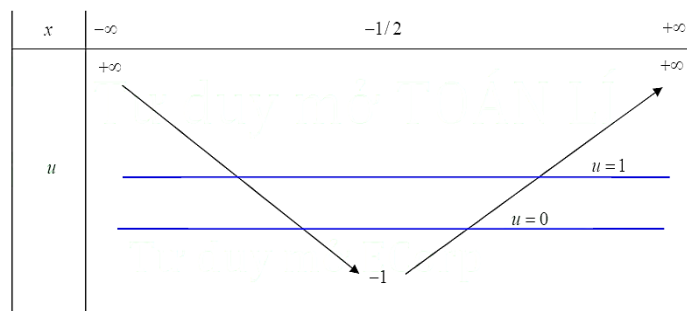
Do $\text{SDCT}\{u\} = 3$ nên để hàm số $f(u)$ có 7 điểm cực trị thì $\text{SNBL}\left\{\begin{matrix} u=a \\ u=b \\ u=1 \end{matrix}\right\} = 4 \Rightarrow 1 \geq 1+m^2$

$\Rightarrow m = 0$. Vậy có 1 giá trị của tham số m .

Câu 2: Chọn B

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại 2 điểm $x = 0; x = 1$.

Xét hàm số $y = f(|2x+1|-1) = f(u)$. Bảng biến thiên của $u = |2x+1|-1$ như sau:

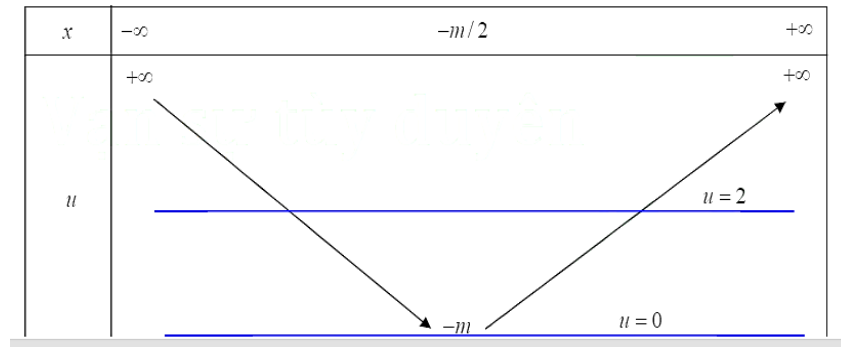


Ta có $\text{SDCT } f(u) = \text{SDCT}\{u\} + \text{SNBL}\left\{\begin{matrix} u=0 \\ u=1 \end{matrix}\right\} = 4+1=5$.

Câu 3: Chọn C

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại 2 điểm $x = 0; x = 2$.

Xét hàm số $y = f(|2x+m|-m) = f(u)$. Bảng biến thiên của $u = |2x+m|-m$ như sau:



Ta có SDCT $f(u) =$ SDCT $\{u\} +$ SNBL $\begin{cases} u=0 \\ u=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 3 = 1 + \text{SNBL} \begin{cases} u=1 \\ u=2 \end{cases} \Leftrightarrow \text{SNBL} \begin{cases} u=1 \\ u=2 \end{cases} = 2$$

Suy ra $0 \leq -m < 2$ hay $-2 < m \leq 0 \rightarrow m \in \{-1; 0\}$.

Câu 4: Chọn D

Nhận xét: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi đó $y = f(|ax + b|) + c$ luôn có cực trị tại điểm $x = -\frac{b}{a}$.

$$y = f(|3x - 2|) + 1 = \begin{cases} f(3x - 1) & \text{khi } x > \frac{2}{3} \\ f(-3x + 3) & \text{khi } x < \frac{2}{3} \end{cases}, \text{ tại } x = \frac{2}{3} \text{ là một điểm cực trị của hàm số.}$$

$$y' = \begin{cases} 3f'(3x - 1) & \text{khi } x > \frac{2}{3} \\ -3f'(-3x + 3) & \text{khi } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y' = \begin{cases} 3(3x - 1 - m) & \text{khi } x > \frac{2}{3} \\ -3(-3x + 3 - m) & \text{khi } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Hàm số có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có 4 nghiệm phân biệt khác $\frac{2}{3}$

Khi:

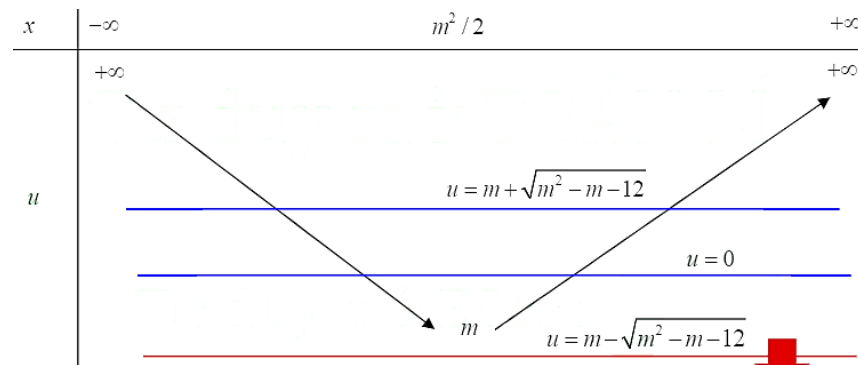
$$x > \frac{2}{3} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+m}{3} > \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{7-m}{3} > \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < m < 5 \\ x_1 \neq x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < m < 5 \\ \frac{1+m}{3} \neq \frac{7-m}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < m < 5 \\ m \neq 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi } x < \frac{2}{3} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3-m}{3} < \frac{2}{3} \\ x_4 = \frac{m-3}{3} < \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < m < 5 \\ x_3 \neq x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 5 \\ m \neq 3 \end{cases}$$

Vậy $m \in (1; 5) \setminus \{3\}$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2 giá trị nguyên thỏa yêu cầu.

Câu 5: Xét hàm số $f \mid 2x - m^2 \mid + m = f u$

Bảng biến thiên của hàm số $u = \mid 2x - m^2 \mid + m$ như sau



Ta có số điểm cực trị của hàm số u là 1 điểm.

Nhận xét, nếu hàm số $f x$ có đúng 1 điểm cực trị thì cùng lắm hàm số $f u$ có 3 điểm cực trị.

Do đó, xét trường hợp $m^2 - m - 12 > 0 \Leftrightarrow m < -3 \vee m > 4$ thì hàm số $f x$ có 3 điểm cực

trị là $x = 0; x = m \pm \sqrt{m^2 - m - 12}$

Áp dụng công thức:

Số điểm cực trị $f u$ = số điểm cực trị u + số nghiệm bội lẻ của phương trình

$$\begin{cases} u = 0 \\ u = m - \sqrt{m^2 - m - 12} \\ u = m + \sqrt{m^2 - m - 12} \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} m < 0 \\ m \neq -12 \end{cases} \text{ kết hợp với điều kiện } m < -3 \vee m > 4 \text{ suy ra}$$

$$\begin{cases} m < -3 \\ m \neq 12 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} m \in [-30; 30] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ suy ra có 26 giá trị nguyên.}$$

Câu 6: Hàm số đạt cực trị tại $x = a < -1; x = -1; x = 4$

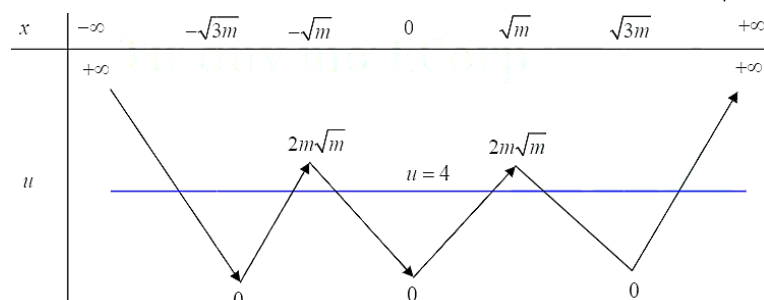
Xét hàm số $f \mid x^3 - 3mx \mid = f u$

Bảng biến thiên của hàm số $u = \mid x^3 - 3mx \mid \geq 0$ suy ra chỉ có phương trình

$u = \mid x^3 - 3mx \mid = 4$ cho ta nghiệm bội lẻ.

Nếu $m \leq 0$ suy ra số điểm cực trị u là 1, suy ra số nghiệm bội lẻ của phương trình $u = 4$ tối đa 2 nghiệm bội lẻ. Không thỏa yêu cầu.

Khi $m > 0$ số điểm cực trị u là 5, ta có bảng biến thiên của hàm số $u = \mid x^3 - 3mx \mid$



Áp dụng công thức:

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

Số điểm cực trị của hàm số $f(u)$ = Số nghiệm bội lẻ của phương trình $u = 4 + \text{số điểm cực trị của } u$.

Suy ra $\begin{cases} m > 0 \\ 2m\sqrt{m} > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > \sqrt[3]{4}$ kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-30; 30] \end{cases}$ suy ra có 29 giá trị nguyên thỏa yêu cầu.

Câu 7: Chọn C

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$.

Ta lại có: $g'(x) = f(|f(x) - m|) = \frac{f(x) - m}{|f(x) - m|} \cdot f'(x) \cdot f'(|f(x) - m|)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ |f(x) - m| = 0 \\ |f(x) - m| = 3 \\ |f(x) - m| = -3 \text{ (ptvn)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ f(x) = m \quad (1) \\ f(x) = m + 3 \quad (2) \\ f(x) = m - 3 \quad (3) \end{cases}$$

Để hàm số $g(x) = f(|f(x) - m|)$ có đúng 11 điểm cực trị thì các phương trình (1);(2);(3) mỗi phương trình phải có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 6 \\ -2 < m + 3 < 6 \\ -2 < m - 3 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 6 \\ -5 < m < 3 \\ 1 < m < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Vì m nguyên nên $m = 2$.

Câu 8: Chọn D

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}$.

Khi đó:

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = -2m + 8; \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = -6m + 32$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2a + b - 2m + 4; \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6a + b - 6m + 36$$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = 1; x = 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b - 2m + 4 = -2m + 8 \\ 6a + b - 6m + 36 = -6m + 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 4 \\ 6a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó } y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 2(m-4)x - 1 & \text{neu } \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases} \\ 4x^2 - 2(m+2)x + 8 & \text{neu } 1 < x < 3 \end{cases}$$

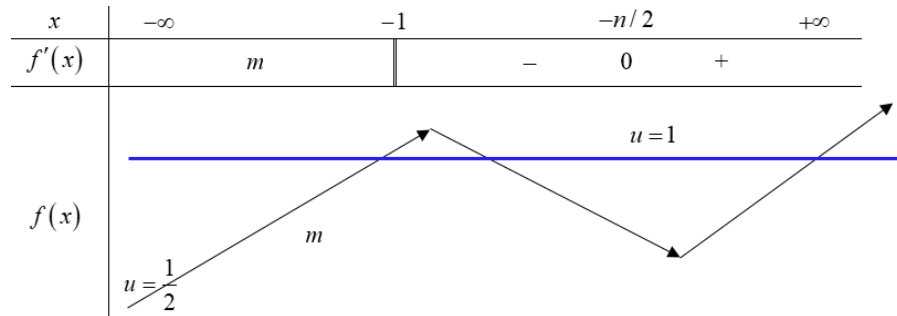
Đề hàm số có đúng 3 điểm cực trị thì hoành độ đỉnh của các parabol phải thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} m-4 < 1 \\ m-4 > 3 \\ 1 < \frac{m+2}{4} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m > 7 \\ 2 < m < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 5 \\ 7 < m < 10 \end{cases}$$

Vì m nguyên nên $m \in \{3; 4; 8; 9\}$.

Câu 9: Đạo hàm: $f'(x) = \begin{cases} m & \text{neu } x < -1 \\ 2x+n & \text{neu } x > -1 \end{cases}$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:



Hàm số $f(x)$ phải liên tục và xác định tại $x = -1$. Suy ra $\begin{cases} m > 0 \\ f(-1) = -m + n = -n + m - 8 \\ -\frac{n}{2} > -1 \end{cases}$

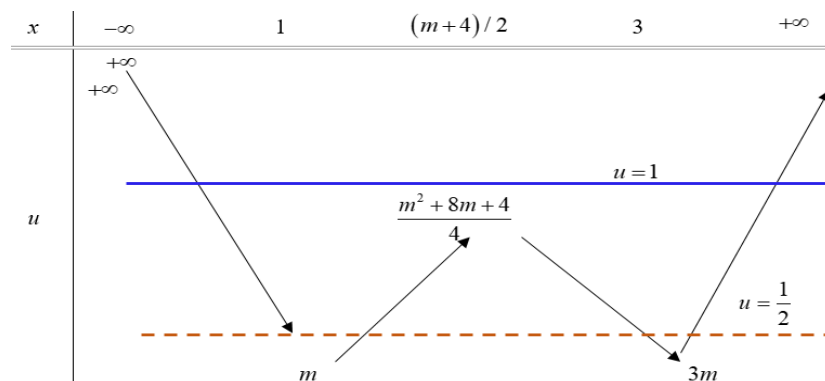
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ n = m - 4 \\ -\frac{n}{2} = -\frac{m}{2} + 2 > -1 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < 6 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} 1 \leq m \leq 5.$$

Vậy có tất cả 5 giá trị tự nhiên m thỏa mãn bài toán.

Câu 10: Ta có: $\begin{cases} SDCT \{u\} = 1 \\ SNBL \left\{ \begin{cases} u = 4 \\ u = 2 \end{cases} \right\} \leq 4 \end{cases} \Rightarrow SDCT \{u\} + SNBL \left\{ \begin{cases} u = 1 \\ u = \frac{1}{2} \end{cases} \right\} \leq 5 \quad \{\text{Không thỏa mãn}\}$

Như vậy, bất buộc u phải có 3 điểm cực trị. Khi đó phải có: $-2 < m < \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3} = 2$ (*)

Khi đó, ta có bảng biến thiên của $u = |x^2 - 4x + 3|$ như sau:



$$\text{Suy ra } SDCT \{u\} = 3 \Rightarrow SNBL \left\{ \begin{array}{l} u = 1 \\ u = \frac{1}{2} \end{array} \right\} = 6$$

$$\text{Từ bảng biến thiên, suy ra: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} > m \\ \frac{1}{2} > 3m \\ \frac{1}{2} < \frac{m^2 + 8m + 4}{4} \\ 1 \geq \frac{m^2 + 8m + 4}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4 + \sqrt{14} < m \leq 0 \\ m < -4 - \sqrt{14} \end{array} \right. \quad (**)$$

Kết hợp (*) và (**), suy ra: $-4 + \sqrt{14} < m \leq 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \in [-30; 30]} m = \{0\}$.

Vậy có đúng 1 giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 11: Chọn A

$$\text{Với } x < -1 \Leftrightarrow y = |x-1| + |x+1| + |x-2| - 2x + 1 = 1 - x - x - 1 + 2 - x - 2x + 1 = -5x + 3$$

Tương tự, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-5x + 3$	$-3x + 5$	$-x + 3$	$x - 1$	
$f'(x)$	-5	-3	-1	1	
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 12: Chọn C

$$\text{Với } x < -1 \Leftrightarrow y = 1 - x + 2 - x + 3 - x + 4 - x + 5 - x - m^2x + 1 = (-5 - m^2)x + 16$$

Tương tự, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	4	5	$+\infty$
$f(x)$	$(-5 - m^2)x + 16$	$(-3 - m^2)x + 14$	$(-1 - m^2)x + 10$	$(1 - m^2)x + 4$	$(3 - m^2)x - 4$	$(5 - m^2)x - 14$	
$f'(x)$	$-5 - m^2$	$-3 - m^2$	$-1 - m^2$	$1 - m^2$	$3 - m^2$	$5 - m^2$	
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$				

Để hàm số có cực trị thì ít nhất phải có 1 đoạn $f'(x)$ phải đổi dấu từ âm sang dương:

$$\Leftrightarrow 5 - m^2 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; \pm 1; 2\}$$

Thử lại $m = \pm 1$ thì $f(x)$ là hàm hằng (Loại)

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn

Câu 13: Chọn B

Ta có bảng xét hàm và bảng biến thiên ghép làm một như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$(-9+m)x+22$	$(-7+m)x+20$	$(-1+m)x+8$	$(9+m)x-22$	
$f'(x)$	$-9+m$	$-7+m$	$-1+m$	$9+m$	
$f''(x)$	$-$	$\neq 0$	$\neq 0$	$+$	

Để hàm số có cực trị thì đạo hàm phải đổi dấu ít nhất một lần. Mà ta lại có :

$-9+m < -7+m < -1+m < 9+m$. Suy ra số nhỏ nhất phải âm và số lớn nhất phải dương, đồng thời trên các khoảng $(1;2)$, $(2;3)$ đạo hàm phải khác 0. Tức là :

$$\Rightarrow \begin{cases} -9+m < 0 \\ 9+m > 0 \\ -7+m \neq 0 \\ -1+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 < m < 9 \\ m \neq 7 \\ m \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} \text{ vậy có tất cả 15 giá trị } m \text{ nguyên thỏa mãn.}$$

Câu 14: Chọn B

Dạng bài toán này chúng ta xét một số giá trị cụ thể của số nguyên dương n rồi rút ra quy luật về những giá trị của tham số n để hàm số có cực trị như sau:

Trường hợp 1:

Xét $n=2$, ta có $y = f(x) = |x-1| + |x-2|$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-2x+3$	1	$2x-3$	
$f'(x)$	-2	0	2	
$f''(x)$				

Hàm số không có cực trị.

Trường hợp 2:

Xét $n=3$, ta có $y = f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$		$-3x+6$	$-x+4$	x	$3x-6$
$f'(x)$		-3	-1	1	3
$f''(x)$					

Hàm số có cực trị.

Chủ đề 02: Cực trị của hàm số

Nhận xét thấy khi n là số nguyên dương lẻ thì hàm số $y = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-n|$ có điểm cực trị. Khi n là số nguyên dương chẵn thì không tồn tại điểm cực trị.

Suy ra $1 \leq n \leq 2021$ và n lẻ nên có 1011 giá trị n nguyên dương thỏa mãn.

Câu 15: Chọn B

Những hàm trị tuyệt đối cụ thể luôn được tối ưu bằng bảng xét hàm như sau :

x	$-\infty$	-1	1	$5/2$	3	$+\infty$
$ x+1 $		$-x-1$		$x+1$		$x+1$
$ x^2+2x-3 $		x^2-4x+3		x^2-4x+3		x^2-4x+3
$f(x)$		x^2-5x+2		x^2-3x+4		x^2-3x+4
$f'(x)$		$2x-5$		$2x-3$		$2x-3$
$f''(x)$		$-$		$-$		$+$

Suy ra hàm số có một điểm cực tiểu tại $x = 1$; $x = 3$ và một điểm cực đại tại $x = \frac{5}{2}$.

Câu 16: Chọn C

Xét phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$ (*), có $\Delta' = m^2 - 1$.

Nếu $\Delta' = m^2 - 1 \leq 0$ thì hàm số $y = f(x) = x^2 - 2mx + 1 + 4x = x^2 - 2(m-2)x + 1$ không có điểm cực đại.

Nếu $\Delta' = m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$ thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = m - \sqrt{m^2 - 1} \text{ và } x_2 = m + \sqrt{m^2 - 1}.$$

Với $\begin{cases} x \leq x_1 \\ x \geq x_2 \end{cases}$ thì $y = f(x) = x^2 - 2mx + 1 + 4x = x^2 - 2(m-2)x + 1$ không có điểm cực đại.

Với $x_1 < x < x_2$ thì $y = -x^2 + 2mx - 1 + 4x = -x^2 + 2(m+2)x - 1$.

Hàm số này đạt cực đại tại $x = m+2$ và giá trị cực đại là $y_{CD} = m^2 + 4m + 3$.

Vậy điều kiện để hàm số có cực đại là

$$\begin{cases} x_1 < x = m+2 < x_2 \\ 3 < m^2 + 4m + 3 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - \sqrt{m^2 - 1} < m+2 < m + \sqrt{m^2 - 1} \\ 0 < m^2 + 4m < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m^2 - 1} > 2 \\ m^2 + 4m - 1 < 0 \\ m^2 + 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\sqrt{5} \\ m > \sqrt{5} \\ -2 - \sqrt{5} < m < -2 + \sqrt{5} \\ m < -4 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 - \sqrt{5} < m < -4.$$

Do $10m$ là số nguyên nên có hai giá trị thỏa mãn là $m = -\frac{42}{10}$ và $m = -\frac{41}{10}$.

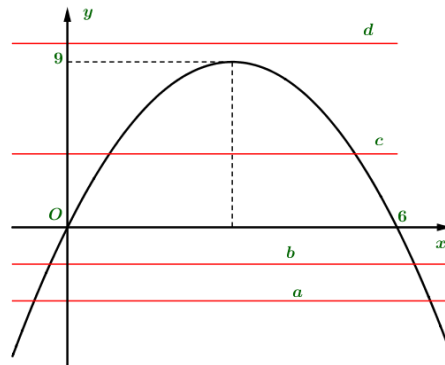
Câu 17: Chọn D

Từ đồ thị $f'(x)$, ta suy ra hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Đặt $g(x) = f(6x - x^2)$. Ta suy ra $y = g(|x|)$. Do đó số điểm cực trị của hàm y sẽ bằng số điểm cực trị dương của hàm số $g(x)$ cộng thêm 1.

$$\text{Ta có } g'(x) = (6 - 2x)f'(6x - x^2), \text{ cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 6x - x^2 = a < 0 \\ 6x - x^2 = b < 0 \\ 6x - x^2 = c \quad (0 < c < 9) \\ 6x - x^2 = d > 9 \end{cases}$$

Dựa vào hình vẽ, ta nhận thấy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả là 5 nghiệm dương phân biệt.



Suy ra số điểm cực trị của $g(x)$ là 5. Do đó số điểm cực trị của $y = g(|x|)$ là 11.

Câu 18: Chọn C

Ta có $y = f(|x - m|^2 - |x - m|)$

Đặt $g(x) = f(x^2 - x)$. Suy ra $g(|x|) = f(x^2 - |x|)$. Suy ra $g(|x - m|) = f(|x - m|^2 - |x - m|)$

Ta biết số điểm cực trị của hàm $g(|x|)$ và $g(|x - m|)$ là như nhau.

Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm $g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Suy ra hàm $g(|x - m|)$ có tất cả là 5 điểm cực trị.

Câu 19: Chọn D

Ta có $y = f(x^2 - 8|x| + 12) = f(x^2 - 4|x| + 4 - 4|x| + 8) = f((|x| - 2)^2 - 4(|x| - 2)) = g(|x| - 2)$.

Ta thấy hàm số $y = g(x)$ có các điểm cực trị $x = -1, x = 2, x = c > 2$. Suy ra hàm số $y = g(x - 2)$ có các điểm cực trị là $x = 1, x = 4, x = c + 2$ (3 điểm cực trị dương).

Vậy hàm số $y = g(|x| - 2) = f(x^2 - 8|x| + 12)$ có 7 điểm cực trị.

Lí giải: $y = f(x^2 - 4x) \rightarrow g(|x| - 2)$, với $(|x| + \alpha)^2 - 4(|x| + \alpha) = x^2 - 8|x| + 12 \Rightarrow \alpha = -2$.

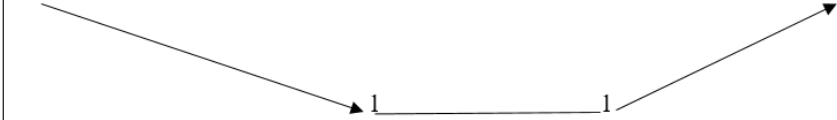
Câu 20: Chọn B

Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại 3 điểm là $x = a < 0; x = b \in (0; 1); x = c > 1$

Xét hàm số $f(u) = f(|x| + |x - 1|)$ với $u = |x| + |x - 1|$

Ta có bảng khảo sát hàm số $u = |x| + |x - 1|$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$ x $	$-x$	0	x	x
$ x-1 $	$-x+1$	$-x+1$	0	$x-1$
u	$-2x+1$	1	$2x-1$	
u'	-2	0	2	
u'	$-$	0	$+$	
u				



Ta có: $(f(u))' = u' \cdot f'(u)$ nên số điểm cực trị của hàm số $f(u)$ là: số điểm cực trị của u cộng

với số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(u) = 0$ hay
$$\begin{cases} u = a \\ u = b \\ u = c \end{cases}$$

Hàm u không có điểm cực trị

$u = a$ vô nghiệm; $u = b$ vô nghiệm; $u = c$ có 2 nghiệm; Vậy: $f(u)$ có hai điểm cực trị.