MA TRẬN LUỸ LINH

Khái niệm ma trận trong Đại số tuyến tính được giảng dạy trong chương trình Toán đại cương của hầu hết các trường Đại học. Đây cũng là nội dung quy định của Hội Toán học Việt nam trong các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên toàn quốc. Nhằm giúp Sinh viên chuẩn bị tham gia vào các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên vòng trường và vòng quốc gia, chúng tôi giới thiệu một dạng ma trận và những tính chất của nó để các bạn sinh viên có thêm một tài liệu ôn tập.

I.<u>Định nghĩa và tính chất</u>

1.<u>Định nghĩa</u>:

Cho A là ma trận vuông cấp n, A được gọi là ma trận luỹ linh nếu tồn tại số nguyên dương q sao cho $A^q = 0$.

<u>Nhận xét:</u> Nếu $A^q = 0$ thì ta cũng có $A^m = 0$ với mọi số tự nhiên m thoả $m \geq q$.

Số nguyên dương k được gọi là cấp luỹ linh của ma trận A nếu $A^k = 0$, và $A^{k-1} \neq 0$.

Ma trận A được gọi là ma trận luỹ linh đơn nếu A – E là ma trận luỹ linh (E là ma trận đơn vị cùng cấp với ma trận A).

2. <u>Một số tính chất</u>

1. Nếu A là ma trận luỹ linh thì A là ma trận suy biến.

Chứng minh: Thật vậy A là ma trận luỹ linh, nên tồn tại số nguyên dương q sao cho $A^q = 0$. Ta có:

$\mathrm{Det}A^q = \det 0 = 0$ suy ra $\underbrace{\det A.\det A...\det A}_{q} = 0 \Rightarrow (\det A)^q = 0$

$\Rightarrow \det A = 0$ (đpcm).

2. Nếu A là ma trận luỹ linh thì các ma trận E – A và E + A khả nghịch.

Chứng minh: Giả sử $A^k = 0$ ($k \geq 1$) ta có

$E = E - A^k = (E - A)(E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1})$. Như vậy E – A khả nghịch và $(E - A)^{-1} = (E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1})$.

Tương tự ta cũng có E + A khả nghịch vì:

$E = E + A^{2k+1} = (E + A)(E - A + A^2 - \ldots + A^{2k})$.

Khi đó $(E + A)^{-1} = (E - A + A^2 - \ldots + A^{2k})$.

3. Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp và AB = BA. Khi đó nếu A và B là các ma trận luỹ linh thì A + B cũng là ma trận luỹ linh.

Chứng minh:

Do A và B là các ma trận luỹ linh nên tồn tại các số nguyên dương p,q sao cho

$A^p = 0$, $B^q = 0$, giả sử $p \geq q$, đặt m = 2p.

Theo giả thiết AB = BA nên ta có khai triển nhị thức Newton:

$(A + B)^{2m} = \sum_{i=0}^{m} C_m^i A^i B^{m-i}$, trong 2 số i và m-i có ít nhất 1 số không nhỏ hơn p nên

$A^i B^{m-i} = 0$. Vậy $(A + B)^{2m} = 0$. (đpcm).

4. Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp và AB = BA. Khi đó nếu A và B là các ma trận luỹ linh đơn thì ma trận tích AB cũng là ma trận luỹ linh đơn.

Chứng minh:

Vì (A – E), (B – E) là các ma trận luỹ linh, nên tồn tại các số nguyên dương p và q sao cho $(A – E)^p = 0$, $(B – E)^q = 0$.

Ta có (AB – E) = (A – E)B + (B – E), giả sử $p \geq q$ khi đó do AB = BA nên ta cũng có tính chất giao hoán (A – E)B(B – E) = (B – E)(A – E)B.

Sử dụng khai triển nhị thức Newton, ta thu được:

$(AB – E)^{2p} = [(A – E)B + (B – E)]^{2p} = \sum_{i=0}^{2p} C_{2P}^{i} (A – E)^i B^i (B – E)^{2p-i}$. Trong 2 số i và 2p-i phải có một số không nhỏ hơn p nên $(A – E)^i B^i (B – E)^{2p-i} = 0$. Vậy tồn tại số nguyên dương 2p sao cho $(AB – E)^{2p} = 0$, tức (AB – E) là ma trận luỹ linh.

Vậy ta có đpcm.

Chú ý: Tương tự như khái niệm ma trận luỹ linh người ta cũng xét khái niệm tự đồng cấu luỹ linh như sau.

Tự đồng cấu f của **K** – không gian véc tơ **V** trên trường **K** gọi luỹ linh nếu có số nguyên dương q để $f^q = 0$, ($f^q = \underbrace{f.f...f}_{q}$).

Thêm vào đó nếu $f^{q-1} \neq 0$ thì q gọi là bậc luỹ linh của f.

Tự đồng cấu f của **K** – không gian véc tơ **V** trên trường **K** gọi luỹ linh đơn nếu $f – Id_V$ là luỹ linh (Id_V là tự đẳng cấu đồng nhất trên **V**).

Chứng minh tương tự như ma trận luỹ linh, ta cũng có một số tính chất của đồng cấu luỹ linh như sau.

1. Nếu f và g là hai tự đồng cấu luỹ linh giao hoán được của **K** – không gian véc tơ **V** trên trường **K** thì f + g cũng luỹ linh.
2. Nếu f và g là hai tự đồng cấu luỹ linh đơn giao hoán được của **K** – không gian véc tơ **V** trên trường **K** thì f . g cũng luỹ linh đơn.
3. Nếu f là tự đồng cấu luỹ linh của **R** – không gian véc tơ **V** – n chiều trên trường **R** các số thực thì mọi giá trị riêng của f đều bằng 0.
4. Nếu f là tự đồng cấu luỹ linh đơn của **R** – không gian véc tơ **V** – n chiều trên trường **R** các số thực thì mọi giá trị riêng của f đều bằng 1.

II. Một số bài tập đề nghị:

Bài 1: Chứng minh rằng nếu A là ma trận luỹ linh thì mọi giá trị riêng của A đều bằng 0.

Bài 2: Chứng minh rằng nếu A là ma trận luỹ linh đơn thì mọi giá trị riêng của A đều bằng 1.

Bài 3: Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp và AB = BA. Khi đó nếu A và B là các ma trận luỹ linh thì các ma trận E + (A + B), E – (A + B) là các ma trận khả nghịch. (Đề thi Olympic Toán Sinh viên toàn Quốc lần thứ XI).

Bài 4: Cho A là ma trận vuông thoả $A^{2003} = 0$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

Rank(A) = Rank(A + A^2 + A^3 + … +A^n). (Đề thi Olympic Toán Sinh viên toàn Quốc lần thứ XI).

Bài 5: Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thoả mãn các điều kiện:

i. AB = BA

ii. Tồn tại các số nguyên dương p, q sao cho $(A – E)^p = (B – E)^q = 0$.

Chứng minh rằng ma trận tích AB có các giá trị riêng đều bằng 1.

Bài 6: Cho A là ma trận vuông cấp n và $A^k = 0$ với k nguyên dương cho trước.

Kí hiệu: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Chứng minh hai phương trình

AX = 0 và $(A + A^2 + ... + A^n)X = 0$ tương đương.

(Đề thi Olympic Toán Sinh viên vòng trường năm 2003. ĐH An Giang).

Bài 7: Cho A là ma trận vuông. Chứng minh rằng nếu α là véc tơ riêng của A tương ứng với giá trị riêng k thì α cũng là véc tơ riêng của A^n ứng với giá trị riêng k^n, ($n \in N$). (Đề thi chọn đội tuyển Olympic Toán Sinh viên 2004 trường ĐH An Giang).

Bài 8:

1.Chứng minh ma trận $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ là ma trận luỹ linh.

2. Cho ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Tính } A^{100}$$

GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận là nội dung được quy định trong kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên giữa các trường Đại học và Cao đẳng. Bài viết này nhằm giúp Sinh viên có thêm một tài liệu ôn tập, giải quyết được một số dạng bài tập về giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận thường gặp trong các kỳ thi Olympic Toán những năm gần đây.

Cho f là phép biến đổi tuyến tính của không gian véc tơ n chiều V trên trường **K** (trong phần này chúng ta xét trường **K** là trường **R** hoặc **C**). Số $k \in$ **K** được gọi là giá trị riêng của f

nếu tồn tại một véc tơ $\alpha \neq 0$ sao cho $f(\alpha) = k\alpha$. Khi đó véc tơ α gọi là véc tơ riêng của f ứng với giá trị riêng k. Giả sử A là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc đã cho trong V, thì giá trị riêng k của f là nghiệm của phương trình
det(A – kE) = 0. Det(A – kE) là một đa thức bậc n đối với biến k và được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận A. Tìm véc tơ riêng của f ứng với giá trị riêng k tức là tìm nghiệm $\alpha = (x_1, x_2, ..., x_n) \neq (0,0,...,0)$ của phương trình $A\alpha = k\alpha$. Người ta cũng gọi k và α định nghĩa như trên lần lượt là giá trị riêng và véc tơ riêng tương ứng của ma trận A. Sau đây chúng ta đưa ra một số tính chất liên quan đến giá trị riêng và véc tơ riêng của một ma trận.

Định lí 1: Giá trị riêng của một phép biến đổi tuyến tính của không gian véc tơ n chiều V trên trường **K** không phụ thuộc vào cơ sở.

Chứng minh: Giả sử A là ma trận của phép biến đổi tuyến tính f đối với cơ sở $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ (1) và với cơ sở mới $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ (2), f có ma trận là B. Khi đó $B = S^{-1}AS$ trong đó S là ma trận chuyển từ cơ sở (1) sang cơ sở (2). Ta có
$|B - kE| = |S^{-1}AS - kS^{-1}ES| = |S^{-1}(A - kE)S| = |S^{-1}|.|A - kE|.|S| = |A - kE|$ (đpcm). Từ định lí 1 ta có hệ quả sau:

Hệ quả : Nếu hai ma trận A và B đồng dạng thì A và B có cùng đa thức đặc trưng.

Nhận xét: Mệnh đề đảo của hệ quả là sai (nếu n$\geq$ 2). Ví dụ: Xét hai ma trận
$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, hai ma trận A và B không đồng dạng nhưng đa thức đặc trưng của chúng trùng nhau: $|A - kE| = |B - kE| = k^2$.

Định lí 2: Cho A là ma trận vuông cấp n, $\chi_A(k) = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + ... + a_1 k + a_0$ là đa thức đặc trưng của ma trận A. Khi đó:

i. $a_n = (-1)^n$

ii. $(-1)^{n-1}a_{n-1} = Tr(A)$ (tổng các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận A, và được gọi là vết của ma trận A)

iii. $a_0 = \det A$.

Chứng minh: Kí hiệu: $A = (a_{ij})$, $\alpha_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - k, & i = j \\ a_{ij}, & i \neq j \end{cases}$, $\quad (1 \leq i, j \leq n)$

Theo định nghĩa định thức của một ma trận ta có:
Det(A – kE) = $\sum_{f \in s_n} s(f)\alpha_{1f(1)}...\alpha_{nf(n)}$ (1). Các hạng tử của (1) ứng với phép thế
f $\neq Id_{\{1,2,...,n\}}$ là một đa thức ẩn k với bậc $\leq n - 2$. Xét hạng tử của (1) ứng với phép thế đồng nhất: $\alpha_{11}\alpha_{22}...\alpha_{nn} = (a_{11} - k)(a_{22} - k)...(a_{nn} - k) =$
$= (-1)^n.k^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-1)^{n-1}.k^{n-1} + ...$ Từ đây ta có i) và ii). Cuối cùng trong đa thức đặc trưng của A cho k = 0 ta được detA = a_0. Từ định lí 2 khi cho A là ma trận vuông cấp n thì

đa thức đặc trưng của A được viết dưới dạng:

$$\chi_A(k) = (-1)^n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + ... + a_1 k + a_0.$$

Định lí 3: (Định lí Cayley – Hamilton)

Cho A là ma trận vuông cấp n, $\chi_A(k) = (-1)^n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + ... + a_1 k + a_0$ là đa thức đặc trưng của A. Khi đó $\chi_A(A) = 0$.(Phần chứng minh định lí Cayley – Hamilton bạn đọc có thể xem trong Giáo trình Toán tập 6. Đại số 2, của tác giả Jean – Maric Monier).

Định lí 4: Giả sử A là ma trận vuông với phần tử là số thực và là ma trận đối xứng. Khi đó mọi giá trị riêng của A đều là số thực. (Bạn đọc có thể xem phần chứng minh trong Giáo trình Toán Cao cấp của tác giả Nguyễn Đình Trí).

Sau đây chúng ta giải một số bài tập liên quan đến giá trị riêng và véc tơ riêng.

Bài 1: Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

<u>Giải:</u> $\chi_A(k) = \det(A - kE) = -k(k-3)^2$, do đó ma trận A có hai giá trị riêng là k = 0, k = 3. Ứng với giá trị riêng k = 0, giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ ta được nghiệm tổng quát là $(x_3, x_3, x_3), x_3 \in \mathbf{R}$. Như vậy các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng k = 0 là $\alpha = (a, a, a), a \neq 0$. Tương tự đối với giá trị riêng k = 3 ta được các véc tơ riêng là $\beta = (-a-b, a, b),\ a^2 + b^2 \neq 0$.

Bài 2: Cho ma trận: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Tính f(A), biết rằng:

f(x) = $-x^8 + 6x^7 - 12x^6 + 8x^5 - x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 10x + 1$

<u>Giải:</u> Đa thức đặc trưng của ma trận A là:

$\chi_A(k) = -k^3 + 6k^2 - 12k + 8$. Chia đa thức f(x) cho đa thức $-x^3 + 6x^2 - 12x + 8$ được thương là $x^5 + x$ và dư là $r(x) = 2x + 1$. Do đó:

f(A) = r(A) = 2A + E = $2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -8 & 9 & 0 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Bài 3: Cho ma trận A = $\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$, a, b, c, d $\in$ **R**. Chứng minh:

a. $A.A^t = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2).E$

b. $\chi_A(k) = \left((a-k)^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2$, với mọi k $\in$ **R**.

Giải: a. Kiểm tra trực tiếp.
b. Áp dụng kết quả câu a) đối với các ma trận (A – kE), $(A - kE)^t$ ta được:
$(A - kE).(A - kE)^t = \left((a-k)^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)E$, suy ra
$\det\left((A-kE).(A-kE)^t\right) = \det(((a-k)^2 + b^2 + c^2 + d^2)E)$. Ta đã biết định thức của một ma trận không thay đổi qua một phép chuyển vị, do đó:
$(\det(A-kE))^2 = ((a-k)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$, từ đó suy ra $\chi_A^2 = ((a-k)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$, hay
$\left[\chi_A - ((a-k)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2\right]\left[\chi_A + ((a-k)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2\right] = 0$. Vì A là ma trận cấp 4 nên theo định lí 2, hệ số cao nhất của đa thức đặc trưng của A bằng 1, do đó ta được
$\chi_A = \left[(a-k)^2 + b^2 + c^2 + d^2\right]^2$ (đpcm).

Bài 4: Giả sử a là số thực khác 0. Chứng minh rằng hệ phương trình sau luôn có nghiệm với mọi b, c, d $\in$ **R**

$$\begin{cases} ax + (1-b)y + cz + (1-d)t = a \\ (b-1)x + ay + (d-1)z + ct = b \\ -cx + (1-d)y + az + (b-1)t = c \\ (d-1)x - cy + (1-b)z + at = d \end{cases}$$

Giải: Gọi A là ma trận các hệ số của hệ phương trình, A^t là ma trận chuyển vị của ma trận A, theo kết quả bài tập 3 ta cũng có $A.A^t = (a^2 + (1-b)^2 + c^2 + (1-d)^2).E$, do đó:
detA = $\left[a^2 + (1-b)^2 + c^2 + (1-d)^2\right]^2 \neq 0$, với mọi a, b, c, d, (a $\neq 0$). Vậy hệ luôn có nghiệm với mọi b, c, d $\in$ **R**.

Bài 5: Chứng minh rằng nếu k là giá trị riêng của ma trận A, thì k^n là giá trị riêng của A^n, n là số nguyên dương.

Giải: Gọi α là véc tơ riêng của A ứng với giá trị riêng k, khi đó ta có:
$A^n\alpha = A^{n-1}(A\alpha) = A^{n-1}(k\alpha) = A^{n-2}[A(k\alpha)] = A^{n-2}(k^2\alpha) = ... = A(k^{n-1}\alpha) = k^n\alpha$ (đpcm).

MỘT SỐ BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1:

Cho hai ma trận:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};\quad T=\begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Tính $B=T^{-1}AT$.

b. Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận A.

Bài 2: Cho A là ma trận vuông cấp n. Giả sử A có n giá trị riêng là $k_1,k_2,...,k_n$. Chứng minh detA = $k_1.k_2...k_n$.

Bài 3: Giả sử α là một véc tơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng k, chứng minh rằng α cũng là véc tơ riêng của ma trận $A^2-3A+5E$. Giá trị riêng tương ứng là bao nhiêu?

Bài 4: Cho A = $\begin{bmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{bmatrix}$. Tính A^n, với n là số tự nhiên.

Bài 5: Cho $f(x)=x^{1999}+x^2-1$, và ma trận C = $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. Tính detf(C).

BÀI TẬP VỀ MA TRẬN

I. Một số kết quả

1) Tính chất của phép toán trên các ma trận

$i) A+B=B+A$

$ii) (A+B)+C=A+(B+C)$

$iii) O+A=A+O=A$

$iv) A+(-A)=(-A)+A=O$

$v) (A+B)^t=A^t+B^t$

$vi) \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$vii) (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$viii) (AB)^t=B^tA^t$

$ix) (\alpha A)^t=\alpha A^t$

$x)$ Nếu A là ma trận đối xứng (phản đối xứng) thì $A^t=A (A^t=-A)$

* Nếu AB = BA thì có thể khai triển Newton $(A+B)^n$.

2) Ma trận khả nghịch

$i)(A^{-1})^{-1} = A$

$ii)(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

$iii)(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}, \alpha \neq 0$

$iv)(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) Định thức của ma trận

i) det(AB) = detAdetB.

ii) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

iii) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$

iv) $\det A = \det A^t$

4) Ma trận lũy linh

Cho A là ma trận vuông cấp n. A gọi là lũy linh nếu tồn tại số nguyên dương n sao cho $A^n = 0$ (ma trận không). Khi đó $A^m = 0$ với mọi $m \geq n$ (nếu $A^{n-1} \neq 0$ thì n gọi là bậc lũy linh của A).

Nếu A lũy linh thì detA = 0. Vì $A^k = 0$ ($\underbrace{A.A....A}_{k} = 0$) nên $\det A^k = 0$, suy ra

detAdetA.....detA = 0 $\Leftrightarrow$ detA = 0.

Nếu A lũy linh thì E – A và E + A khả nghịch vì $E = E - A^k = (E - A)(E + A + ... + A^{k-1}) \Rightarrow \det(E - A) \neq 0$.

* Nếu A lũy linh, B lũy linh và AB = BA thì A + B lũy linh. Nếu A – E, B – E lũy linh thì AB – E lũy linh.

5) Vết của ma trận

Cho $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ ta gọi của ma trận A ký hiệu Tr(A) là một số được xác định bởi

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

II. Bài tập

1. Chứng minh rằng: nếu A lũy linh, B lũy linh và AB = BA thì A + B lũy linh.

2. Cho AB =BA, và A – E, B – E lũy linh. Chứng minh AB – E lũy linh.

3. Chứng minh rằng: nếu A lũy linh thì mọi giá trị riêng của A đều bằng 0.

4. Chứng minh rằng: nếu A – E lũy linh thì mọi giá trị riêng của A đều bằng 1.

5. A và B gọi là đồng dạng nếu $A = T^{-1}BT$. Chứng minh rằng: Hai ma trận đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng.

6. Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp và A khả nghịch. Chứng minh AB và BA có cùng giá trị riêng.

7. Chứng minh hai ma trận đồng dạng có cùng hạng.

8. Từ kết quả bài 7, hãy chứng minh mệnh đề sau: nếu A là một ma trận khả nghịch thì hạng của ma trận B bằng hạng của ma trận AB (A, B là hai ma trận vuông cùng cấp).

9. Cho A, B vuông cấp n, AB = BA và $A^p = B^q = E$ với p, q nguyên dương nào đó. Hãy chứng minh A + B + E khả nghịch.

10. Cho A, B vuông, E – AB khả nghịch. Chứng minh E – BA khả nghịch.

11. Cho A là ma trận vuông, k là giá trị riêng của A. Chứng minh k^n là giá trị riêng của A^n.

12. Ma trận A có $k_1, k_2, \ldots, k_n$ là các giá trị riêng. Chứng minh $\det A = k_1k_2\ldots k_n$.

13. Chứng minh rằng AB và BA có cùng giá trị riêng.

14. Cho A có $k_1, k_2, \ldots, k_n$ là các giá trị riêng. Chứng minh A chéo hóa được, nghĩa là tồn tại ma trận C khả nghịch sao cho $A = C^{-1}BC$, trong đó $B = \begin{pmatrix} k_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$.

15. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn các điều kiện sau:

a) AB = BA.

b) Tồn tại các số nguyên dương p, q sao cho

$$(A - E)^p = (B - E)^q = 0. \text{ (ma trận không)}$$

Chứng minh rằng ma trận tích AB có các giá trị riêng đều bằng 1.

16. Cho A vuông cấp n thỏa mãn $A^2 - 2A + E = 0$. Chứng minh:

$$A^3 = 3A - 2E, \quad A^4 = 4A - 3E.$$

17. Cho X là một vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng k. Chứng minh X cũng là giá trị riêng của $5E - 3A + A^2$, tìm giá trị riêng.

18. Cho A là ma trận vuông cấp n có tất cả các giá trị riêng có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1. Chứng minh E – A khả nghịch.

19. Ma trận A được gọi là đồng dạng với ma trận B nếu tồn tại một ma trận không suy biến P sao cho $B = P^{-1}AP$.

Chứng minh rằng: nếu A là ma trận khả nghịch và đồng dạng với ma trận B thì B cũng khả nghịch và $(A^{-1})^n$ đồng dạng $(B^{-1})^n$, với n là một số nguyên dương cho trước.

20. Cho $A = \begin{pmatrix} a\cos^2 t + b\sin^2 t & (b-a)\text{costsint} \\ (b-a)\text{costsint} & \text{asin}^2\text{t} + \text{bcos}^2 t \end{pmatrix}$. Tình A^{2004}.

21. Cho $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^{100}.

22. Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^{-1} = 2A$. Tính $\det(A^{2004} - A)$.

23. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}(A^n - E)\right)$, với $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}$ $n\in\mathbb{N}^*$.

24. Cho $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tìm a, b, c để $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (n là một số tự nhiên nào đó).

25. Giả sử a, b, c là nghiệm phương trình: $x^3 + px + q = 0$. Tính detA, với

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

26. Giả sử A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng: nếu $A^2 = E$ thì rank(A+E) + rank(A – E) = n.

BÀI TẬP ÔN TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Biết rằng ma trận vuông A cấp n có n trị riêng là $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Tìm các giá trị riêng của ma trận A^3.

Bài 2. Hỏi có tồn tại hai ma trận A và B sao cho AB – BA = E (E là ma trận đơn vị)?

Bài 3. Xác định a để ma trận sau có hạng bé nhất

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & a & -3 & -2 \\ 3 & a & 0 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bài 4. Cho A là ma trận vuông cấp n, E là ma trận đơn vị cùng cấp và $A^k = 0$ (ma trận không), $k\in\mathbb{N}, k>1$.

Chứng minh rằng $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + ... + A^{k-1}$.

Bài 5. Cho phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & 7 & 2\lambda+1 \\ 3 & 9 & 4\lambda \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Giải phương trình trên khi $\lambda = 0$.

b) Tìm λ để phương trình trên có vô số nghiệm.

Bài 6. Chứng tỏ rằng tổng các nghiệm của phương trình

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

bằng – 1.

Bài 7. Giả sử $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh rằng tồn tại ma trận $X \neq 0$ (ma trận không) thoả mãn

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 8. Cho $z_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{3i}}{\sqrt{3}+i} \right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tìm n nhỏ nhất sao cho $\mathrm{Re}(z_n) = 0$.

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất của các định thức cấp 3 mà các phần tử chỉ có thể là 1 hay – 1.

Bài 10. Cho ma trận $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Tính J^n $(n \in \mathbb{N})$.

b) Hãy biểu diễn ma trận $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ theo các ma trận E, J và J^2 (E là ma trận đơn vị), từ đó suy ra ma trận M^2 theo E, J và J^2.

Bài 11. Cho phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} a & -b & b \\ b & a & -a \\ a & b & 1-b \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Giải phương trình trên khi $a = 0$, $b = 1$.

b) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có nghiệm với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ thoả mãn $a^2 + b^2 > 0$.

Bài 12. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số λ

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4_1 x + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7 \end{cases}$$

Bài 13. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Tìm vectơ riêng và trị riêng của *A*.

b) Tìm một ma trận khả đảo *V* sao cho $V^{-1}AV = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Bài 14. Tìm λ để tồn tại ma trận *X* sao cho

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix},$$

sau đó tìm *X*.

Bài 15. Chứng minh rằng nếu $z + \frac{1}{z} = 2\sin\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},$ thì $z^{4k} + \frac{1}{z^{4k}} = 2cos4k\alpha$ với $k \geq 0$ nguyên.

Bài 16. Cho A là ma trận vuông thực. Chứng minh rằng nếu A không có giá trị riêng thực thì detA > 0.

Bài 17. Chứng minh rằng tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^7 - 1 = 0$ bằng 0.

Bài 18. Cho *A* là một ma trận vuông thực cấp *n* có $\det A \neq 0$ và A^t là ma trận chuyển vị của *A*. Chứng minh rằng, với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực

$$[x_1, x_2, \ldots., x_n] A^t A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n = 0$.

Bài 19. Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

và tìm ma trận *U* sao cho $U^{-1}AU$ là một ma trận đường chéo.

Bài 20. a) Cho $K = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$. Tính K^2, J^2, KJ, JK.

b) Tính A^n, n > 0 nguyên, với $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Bài 21. Cho đa thức $f(x) = 3x^3 - 2x + 5$. Tính f(A) trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 22. Chứng minh rằng các giá trị riêng của ma trận A^2 bằng các bình phương của các giá trị riêng tương ứng của ma trận A.

Bài 23. Cho A là một ma trận vuông thực. Chứng minh rằng nếu detA < 0 thì A luôn có trị riêng thực.

Bài 24. A là ma trận vuông sao cho $A^3 = 0$ (ma trận không). Hãy tính $(E + A)^n$ với n nguyên > 0, E là ma trận đơn vị.

Bài 25. Cho A là ma trận vuông sao cho $A^2 = A$. Hãy tính $(E + A)^n$, với n nguyên > 0, E là ma trận đơn vị.

Bài 26. Chứng minh rằng các trị riêng của ma trận nghịch đảo A^{-1} bằng nghịch đảo các giá trị riêng của ma trận A.

Bài 27. Cho $a_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a_0^m + a_1^m + ... + a_{n-1}^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Bài 28. Cho $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm ma trận A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Bài 29. Cho $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Tìm A^{100}.

Bài 30. Cho $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$. với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Bài 31. Cho $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Tìm A^{1000}.

Bài 32. Chứng minh rằng nếu ma trận vuông A thoả mãn $A^4 + E = 0$, thì các giá trị riêng của A không thể là số thực.

Bài 33. Tìm hạng của ma trận sau phụ thuộc vào *m*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & m & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & m & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 34. Tính định thức sau, trong đó *u*, *v* là nghiệm phương trình $x^2 + p = 0$; $p \in \mathbb{R}$: $\begin{vmatrix} u & v & u & v \\ v & u & v & u \\ a & b & c & d \\ p & p & p & p \end{vmatrix}$.

Bài 35. Tìm một ma trận chéo đồng dạng với ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 36. Tính $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2000}$.

Bài 37. Cho ma trận vuông cấp 10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

trong đó $a_{10,1} = a_{12} = a_{23} = ... = a_{9,10} = 1$, còn những phần tử khác bằng không. Tính A^{10}.

Bài 38. Cho ma trận vuông cấp 10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

trong đó $a_{1,10} = a_{21} = a_{32} = ... = a_{10,9} = 1$, còn những phần tử khác bằng không. Tính A^{10}.

Bài 39. Tìm một ma trận vuông cấp ba $B = (b_{ij}),\ b_{ij} \neq 0,\ i, j = 1,2,3$ sao cho det*B* = 1998.

Bài 40. Tìm một ma trận vuông cấp ba $B = (b_{ij}),\ b_{ij} \neq 0,\ i,\ j = 1,2,3$ sao cho det$B$ = 2000.

Bài 41. Tìm một ma trận vuông cấp hai $B = (b_{ij}),\ b_{ij} \neq 0,\ i,\ j = 1,2$ sao cho B có 2 trị riêng $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$.

Bài 42. Tìm một ma trận vuông cấp hai $A = (a_{ij}),\ a_{ij} \neq 0,\ i,\ j = 1,2$ sao cho A có 2 trị riêng $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4$.

Bài 43. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a & b \\ a & a & a & b & a \\ a & a & b & a & a \\ a & b & a & a & a \\ b & a & a & a & a \end{pmatrix}.$$