

ĐỀ THI HSG TOÁN 9 ĐÀ NẴNG 2023-2024

Bài 1. Tính $A = \frac{1}{3\sqrt{2}+2} + \frac{3}{3\sqrt{2}-2} + \frac{12}{14+7\sqrt{2}}$

Bài 2. Cho biểu thức $B = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right) \left(\frac{x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x^2-\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$

Rút gọn biểu thức B và chứng minh rằng $\frac{B^{2022}+1}{B^{2020}+1} > B$ với mọi $x > 0, x \neq 1$

Bài 3. Cho điểm $A(2;4)$ và điểm $B(-4;1)$

- Tính diện tích tam giác OAB , với O là gốc tọa độ và đơn vị trên các trục là xentimet
- Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng OA , biết d tiếp xúc với đường tròn $(O; OA)$

Bài 4.

$$\begin{cases} \frac{3}{2x+y-1} - \frac{2}{x+y-2} = 1 \\ \frac{3x+2y-3}{(2x+y-1)(x+y-2)} = 2 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình
- Tìm các cặp số x, y thỏa mãn :

$$\frac{(x-y)^2}{xy} + 1 = (y\sqrt{xy} - 2\sqrt{2y-1} + 2)(2\sqrt{2y-1} - y\sqrt{xy})$$

Bài 5. Trong phòng họp của công ty có một số ghế dài. Nếu ta xếp mỗi ghế bốn người dự họp thì thiếu một ghế. Nếu xếp mỗi ghế năm người dự họp thì thừa một ghế. Hỏi phòng họp của công ty có bao nhiêu ghế và bao nhiêu người dự họp ?

Bài 6. Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm cạnh BC . Trên tia đối của tia CA lấy điểm $D (DC > AC)$. Gọi N là trung điểm đoạn AD , kẻ đường thẳng qua D song song MN , cắt AB tại E . Hai đường thẳng EC và BD cắt nhau tại O . Chứng minh tam giác ODE và tứ giác $ABOC$ có diện tích bằng nhau

Bài 7. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Lấy điểm E trên đoạn $AB (E \neq B; A)$, gọi F là giao điểm của CE và DA , đường thẳng DE cắt đường tròn $(O; OA)$ tại điểm K (K khác D). Qua K kẻ tiếp tuyến KH với đường tròn $\left(O; \frac{AB}{2}\right)$ (H thuộc $(O; OA)$ và nằm khác phía đối với D qua FC)

- Chứng minh tứ giác $KHDA$ là hình thang cân
- Chứng minh rằng F, K, H thẳng hàng

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$A = \frac{3\sqrt{2} - 2 + 3(3\sqrt{2} + 2)}{(3\sqrt{2} + 2)(3\sqrt{2} - 2)} + \frac{12}{14 + 7\sqrt{2}} = \frac{2 + 6\sqrt{2}}{7} + \frac{12}{7(2 + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{2 + 6\sqrt{2}}{7} + \frac{12(2 - \sqrt{2})}{7(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{2 + 6\sqrt{2}}{7} + \frac{6(2 - \sqrt{2})}{7} = 2$$

Bài 2. Ta có :

$$\frac{x\sqrt{x} - 1}{x - 1} - \frac{x + 2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 1$$

Và
$$\frac{x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} = \frac{x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1)} = \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Do đó : $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Vì $B = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 1 \Rightarrow B^{2021} < 1$

Do $B - 1 < 0, B^{2021} - 1 < 0 \Rightarrow (B - 1)(B^{2021} - 1) > 0$

$\Rightarrow B^{2022} + 1 > B(B^{2020} + 1) \Rightarrow \frac{B^{2022} + 1}{B^{2020} + 1} > B$ với mọi $x > 0, x \neq 1$ vì $B^{2020} + 1 > 0 (dpcm)$

Bài 3.

a) Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B lên trục Ox,

Ta có $H(2;0), K(-4;0)$. Khi đó

$$AH = 4cm, BK = 1cm, OH = 2cm, OK = 4cm, HK = 6cm$$

Tứ giác $ABKH$ là hình thang vuông, suy ra :

$$S_{OAB} = S_{ABKH} - S_{OBK} - S_{OAH} = \frac{1}{2}(AH + BK).HK - \frac{1}{2}BK.OK - \frac{1}{2}AH.OH = 9(cm^2)$$

b) Phương trình đường thẳng OA là $y = 2x$. Suy ra phương trình đường thẳng d có dạng $y = 2x + m (m \neq 0)$. Ta có $AB = 3\sqrt{5} \text{ cm}$

Đường thẳng d cắt trục Ox tại $E\left(-\frac{m}{2}; 0\right)$, cắt trục Oy tại $F(0; m)$. Gọi T là tiếp điểm thì $OT = 3\sqrt{5}$. Khi đó

$$\frac{1}{OT^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{OF^2} \Rightarrow \frac{1}{45} = \frac{4}{m^2} + \frac{1}{m^2} \Rightarrow m^2 = 225 \Rightarrow m = \pm 15$$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm : $d_1 : y = 2x + 15$ và $d_2 : y = 2x - 15$

Bài 4.

a) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{3}{2x+y-1} - \frac{2}{x+y-2} = 1 \\ \frac{3x+2y-3}{(2x+y-1)(x+y-2)} = 2 \end{cases}$$

(Điều kiện : $2x+y-1 \neq 0; x+y-2 \neq 0$)

Khi đó $\frac{2x+y-1+x+y-2}{(2x+y-1)(x+y-2)} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2x+y-1} + \frac{1}{x+y-2} = 2$. Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{2x+y-1} \\ v = \frac{1}{x+y-2} \end{cases}$

Hệ phương trình được viết lại $\begin{cases} 3u - 2v = 1 \\ u + v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - 2v = 1 \\ 2u + 2v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u = 5 \\ u + v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x+y-1} = 1 \\ \frac{1}{x+y-2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-1=1 \\ x+y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} (tmđk)$$

Vậy $(x; y) = (-1; 4)$

b) Tìm các cặp số x, y thỏa mãn :

$$\frac{(x-y)^2}{xy} + 1 = (y\sqrt{xy} - 2\sqrt{2y-1} + 2)(2\sqrt{2y-1} - y\sqrt{xy})$$

Điều kiện : $y \geq \frac{1}{2}$ và $xy > 0 \Rightarrow x > 0$. Biến đổi phương trình về dạng :

$$\frac{(x-y)^2}{xy} = - \left(2\sqrt{2y-1} - y\sqrt{xy-1} \right)^2$$

Vì $\frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0 \geq - \left(2\sqrt{2y-1} - y\sqrt{xy-1} \right)^2$ nên đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-y=0$

và $2\sqrt{2y-1} - y\sqrt{xy-1} = 0$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2x-1} - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x-1 + 2\sqrt{2x-1} + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x-1} + 1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} + 1 = x+1 \Leftrightarrow x=1(tm) \\ \sqrt{2x-1} + 1 = -x-1(ktm) \end{cases}$$

Vậy $(x;y)=(1;1)$

Bài 5.

Gọi x là số ghế ngồi, y là số người dự họp ($x, y \in \mathbb{N}^*$)

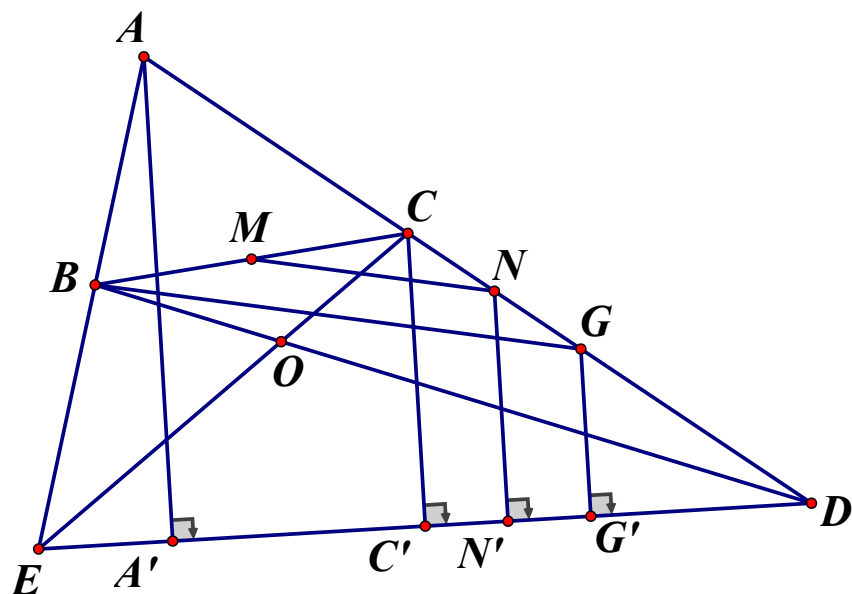
Nếu xếp mỗi ghế bốn người dự họp thì thiếu 1 ghế, ta có phương trình $4x = y - 4$

Nếu xếp mỗi ghế 5 người dự họp thì thừa 1 ghế, ta có phương trình $5x = y + 5$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x = y - 4 \\ 5x = y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 40 \end{cases}$

Vậy trong phòng họp có 9 ghế và 40 người dự họp

Bài 6.



Lấy G trên AD sao cho $MN \parallel BG$

Suy ra N là trung điểm CG và $S_{BED} = S_{GED}$

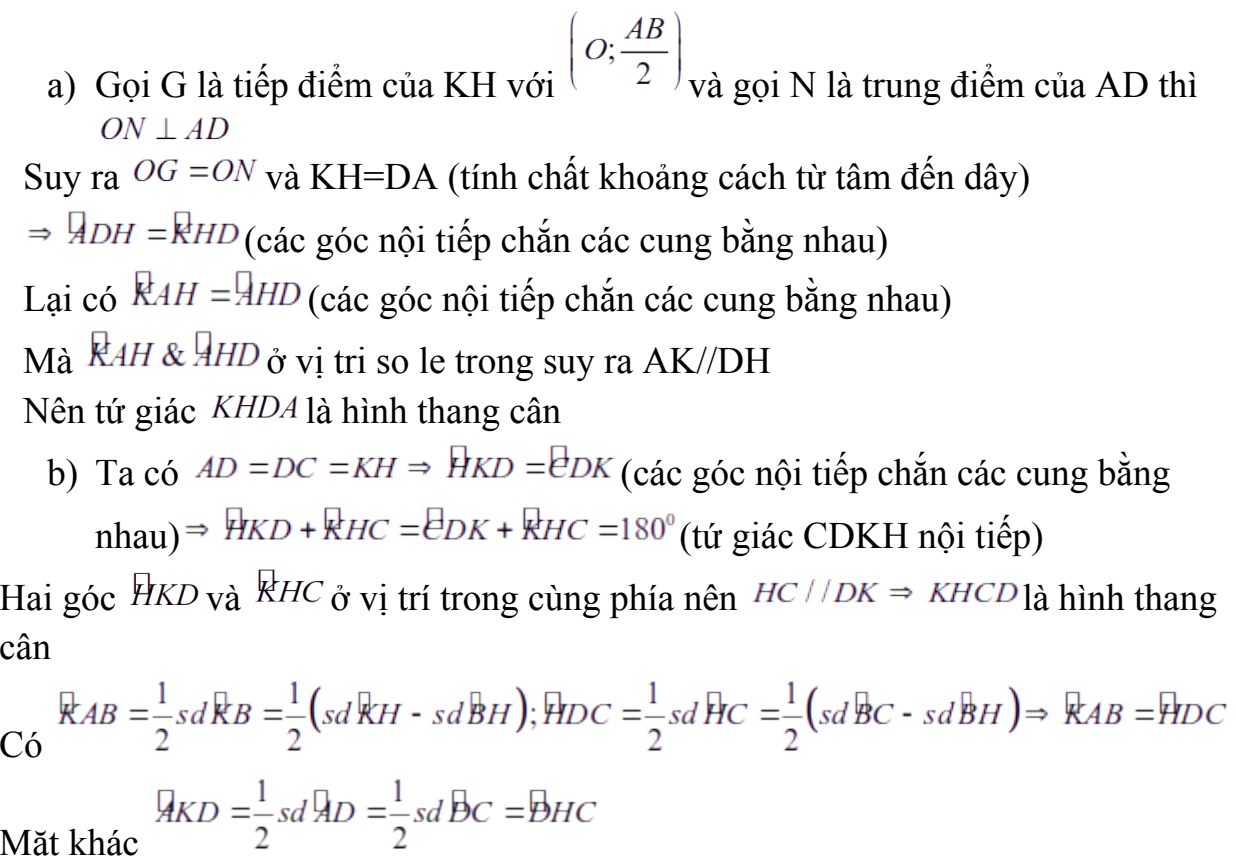
Gọi A', C', N', G' tương ứng là hình chiếu của A, C, N, G lên ED, ta có :

$$S_{BED} + S_{CED} = S_{GED} + S_{CED} = \frac{1}{2} GG' \cdot ED + \frac{1}{2} CC' \cdot ED = \frac{1}{2} (GG' + CC') ED = \frac{1}{2} \cdot 2NN' \cdot ED$$

$$\Rightarrow S_{BED} + S_{CED} = \frac{1}{2} AA' \cdot ED = S_{AED}$$

$$\Rightarrow S_{BEO} + 2S_{OED} + S_{OCD} = S_{BEO} + S_{OED} + S_{OCD} + S_{ABOC} \Rightarrow S_{OED} = S_{ABOC} \text{ (đpcm)}$$

Bài 7.



$$\Rightarrow \Delta AEK \sim \Delta DCH (g.g) \Rightarrow \frac{EK}{CH} = \frac{AE}{DC} = \frac{FE}{FC} (1)$$

Giả sử DE cắt HF tại K' . Theo định lý Talet ta có $\frac{EK'}{CH} = \frac{FE}{FC} (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $K' \equiv K \Rightarrow F, K, H$ thẳng hàng