PHÒNG GD&ĐT YÊN THÀNH **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN LỚP 9**

NĂM HỌC 2023 – 2024

Đề chính thức **Môn thi: TOÁN**

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(3,0 điểm)*

a) Tìm các số tự nhiên a để giá trị của biểu thức $B = a^5 + a^4 + 1$ là số nguyên tố.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$

Câu 2. *(4,5 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2 - 7x + 12 = \sqrt{(x-3)(x^2 - x - 6)}$

b) Tính giá trị biểu thức $A = 6x^{2021} - 5x^{2022} + 4x^{2023}$

với $x = \dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3} + \sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}} - \sqrt{-2\sqrt{2}+3}$.

Câu 3. *(3,5 điểm)*

a) Xác định các hệ số *a* và *b* để đa thức $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ là bình phương của một đa thức.

b) Cho ba số dương a, b, c thoả mãn: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a}}{b+1} + \frac{\sqrt{b}}{c+1} + \frac{\sqrt{c}}{a+1} \geq \frac{3}{2}$$

Câu 4. *(8,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ và đường cao AH. Hai điểm M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB. O là giao điểm của AH và MN.

a) Cho $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$ và $BC = 10$ cm. Tính chu vi tứ giác $AMHN$.

b) Gọi E là giao điểm của BO và AC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm F sao cho $\widehat{CFA} = \widehat{CBE}$. CO cắt AB tại I.

Chứng minh rằng: $\sqrt{AE}.BC = \sqrt{EC}.AB$ và $AE.IB + AI.EC = EC.IB$.

c) BC cắt MN tại L. K là hình chiếu của H trên AL. Chứng minh: $BK \perp KC$.

Câu 5. (1,0 *điểm*)

Viết 150 số tự nhiên 1, 2, 3,…, 150 lên bảng. Mỗi lần ta xóa đi hai số nào đó và thay bằng tổng hoặc hiệu của chúng. Sau một số lần như vậy thì trên bảng chỉ còn lại một số. Hỏi có khi nào số đó là 100 không?

……………Hết……………

Họ và tên thí sinh…………………………………… Số báo danh……………………

PHÒNG GD&ĐT YÊN THÀNH **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN**
NĂM HỌC 2023 – 2024

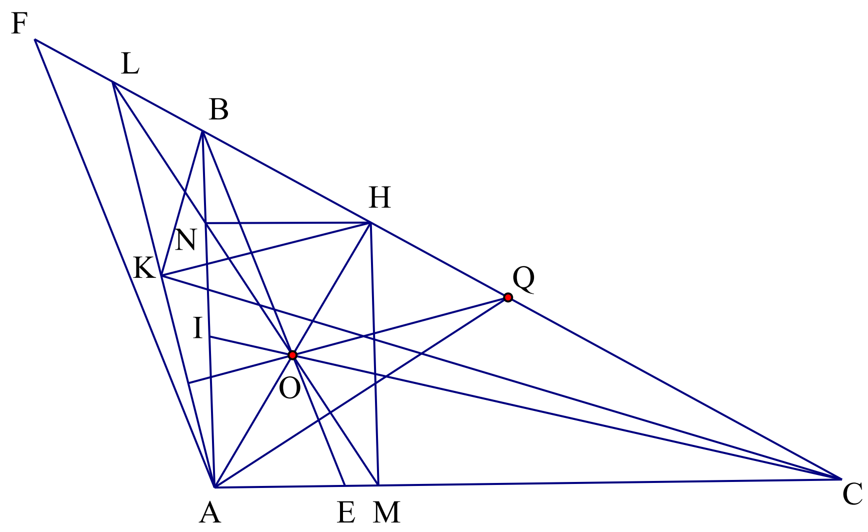
Môn thi: TOÁN 9
Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Hướng dẫn chấm thi (gồm 4 trang)

Câu	**Ý**	**Nội dung**	**Điểm**
Câu 1 **3 điểm**	**a** **1,5 điểm**	Tìm các số tự nhiên a để giá trị của biểu thức B = a^5+a^4+1 là số nguyên tố.	
		+) Với a = 0 ta có: B = 1 (Loại) +) Với a = 1 ta có : B = 3 (TM)	**0,5**
		+) Với a > 1 ta có : B = $a^5-a^2+a^4-a+(a^2+a+1)$	**0,25**
		B = $a^2(a^3-1)+a(a^3-1)+(a^2+a+1)\ \vdots\ a^2+a+1$ Với a >1 thì $B>a^2+a+1>1$ suy ra B là hợp số (Loại)	**0,5**
		Vậy a = 1 thì B là hợp số.	**0,25**
	b **1, 5 điểm**	1) Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn điều kiện: $2x^2+4x=19-3y^2$.	
		$2x^2+4x=19-3y^2 \Leftrightarrow 2(x+1)^2=3\left(7-y^2\right)(*)$	**0,5**
		Ta thấy: $2(x+1)^2:2 \Rightarrow 7-y^2:2 \Rightarrow y^2$ là số lẻ. Ta lại có: $7-y^2\ge 0 \Rightarrow y^2\le 7$. Do đó $y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$	**0,5**
		Lúc đó: $2(x+1)^2=18 \Rightarrow x+1=\pm 3$ nên $x_1=2; x_2=-4$.	**0,25**
		Ta thấy các cặp số $(2;1),(2;-1),(-4;1),(-4;-1)$ thỏa mãn (*) nên là nghiệm của phương trình.	**0,25**
	a **2,5 điểm**	Giải các phương trình: $x^2-7x+12=\sqrt{(x-3)(x^2-x-6)}$	
		$x^2-7x+12=\sqrt{(x-3)(x^2-x-6)}$ (Điều kiện: $x\ge -2$)	**0,5**
		$\Leftrightarrow (x-3)(x-4)=\sqrt{(x-3)^2(x+2)}$ $\Leftrightarrow (x-3)(x-4)-\lvert x-3\rvert\sqrt{(x+2)}=0$ (1)	**0,5**
		+ Nếu $x\ge 3$ $(1)\Leftrightarrow (x-3)\left(x-4-\sqrt{x+2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \sqrt{x+2}=x-4\ (2)\end{array}\right.$ $(2)\Leftrightarrow \begin{cases} x-4\ge 0 \\ x+2=x^2-8x+16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4\ge 0 \\ x^2-9x+14=0\end{cases} \Leftrightarrow x=7$	**0,75**
		+ Nếu $-2\le x<3$ $(1)\Leftrightarrow (x-3)\left(x-4+\sqrt{x+2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \sqrt{x+2}=4-x\ (3)\end{array}\right.$	**0,5**

		$(3) \Leftrightarrow \begin{cases}4-x\ge 0\\ x+2=x^2-8x+16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 4\\ x^2-9x+14=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2$	
		Vậy $S=\{2;3;7\}$	**0,25**
Câu 2 **4,5 điểm**	**b** **2,0 điểm**	Tính giá trị biểu thức $A=6x^{2021}-5x^{2022}+4x^{2023}$ với $x=\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}-\sqrt{-2\sqrt{2}+3}$.	
		Đặt $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}} \Rightarrow A^2=\dfrac{2\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}+1} \Rightarrow A=\sqrt{2}$	**0,75**
		$x=\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-1\right)=1$	**0,75**
		Với $x=1$, ta có: $A=6-5+4=5$	**0,5**
Câu 3 **3,5 điểm**	**a** **2,0 điểm**	Xác định các hệ số *a* và *b* để đa thức $\mathrm{P(x)=x^4-2x^3+3x^2+ax+b}$ là bình phương của một đa thức.	
		Ta có $P(x)$ là bình phương của một đa thức thì: $P(x)=\left(x^2+cx+d\right)^2=x^4+2cx^3+\left(c^2+2d\right)x^2+2cdx+d^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Mà: $P(x)=x^4-2x^3+3x^2+ax+b$	**1,0**
		Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2c=-2\\ c^2+2d=3\\ 2cd=a\\ d^2=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-1\\ d=1\\ a=-2\\ b=1\end{cases}$	**0,75**
		Vậy: $a=-2, b=1$.	**0,25**
	b **1,5 điểm**	Cho ba số dương a,b,c thoả mãn: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{a}}{b+1}+\dfrac{\sqrt{b}}{c+1}+\dfrac{\sqrt{c}}{a+1}\ge\dfrac{3}{2}$	
		$\dfrac{\sqrt{a}}{b+1}=\sqrt{a}-\dfrac{b\sqrt{a}}{b+1}\ge\sqrt{a}-\dfrac{b\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{ab}}{2}$ **(1)** Tương tự ta có: $\dfrac{\sqrt{b}}{c+1}\ge\sqrt{b}-\dfrac{\sqrt{bc}}{2}$ **(2)**; $\dfrac{\sqrt{c}}{a+1}\ge\sqrt{c}-\dfrac{\sqrt{ac}}{2}$ **(3)**	**0,5**
		Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được: $\dfrac{\sqrt{a}}{b+1}+\dfrac{\sqrt{b}}{c+1}+\dfrac{\sqrt{c}}{a+1}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{2}$ **(4)**	**0,25**
		Mặt khác ta có:	**0,5**

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc} \le \frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}$
$= a+b+c = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 - 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\right)$
$\Rightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc} \le \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{3} = 3$ **(5)**</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Từ (4) và (5) suy ra $\frac{\sqrt{a}}{b+1}+\frac{\sqrt{b}}{c+1}+\frac{\sqrt{c}}{a+1} \ge \frac{3}{2}$
Dấu = xảy ra khi a = b = c = 1</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Câu 4

8,0 điểm</td><td colspan="2">Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ và đường cao AH. Hai điểm M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB. O là giao điểm của AH và MN.
a) Cho $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$ và $BC = 10$ cm. Tính chu vi tứ giác $AMHN$.
b) Gọi E là giao điểm của BO và AC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm F sao cho $\widehat{CFA}=\widehat{CBE}$. CO cắt AB tại I.
Chứng minh rằng: $\sqrt{AE}.BC=\sqrt{EC}.AB$ và AE.IB + $AI.EC = EC.IB$
c) BC cắt MN tại L. K là hình chiếu của H trên AL. Chứng minh: $BK \perp KC$.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td></td></tr>
<tr><td>a
3,5 điểm</td><td>Cho $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$ và BC = 10 cm. Tính chu vi tứ giác $AMHN$.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Tính được AB = 6cm, AC = 8cm,</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tính được BH = 3,6cm, CH = 6,4cm.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tính được HM = 3,84cm , HN = 2,88cm</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td colspan="2">$P_{AMHN} = 13,44\ cm$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Gọi E là giao điểm của BO và AC. Trên tia đối của tia BC lấy</td><td></td></tr>
</table>

	3,0 điểm	điểm F sao cho $\widehat{CFA}=\widehat{CBE}$. CO cắt AB tại I.	
		Ta có: $\sqrt{AE}.BC=\sqrt{EC}.AB \Leftrightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{BH.BC}{BC^2}=\frac{BH}{BC}$	**1,0**
		AMHN là hình chữ nhật nên AO = OH Mà $\widehat{CFA}=\widehat{CBE} \Rightarrow FA//BO$ Suy ra BF = BH	**0,5**
		Mặt khác : FA//BE $\Rightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{BF}{BC}=\frac{BH}{BC}$ (đpcm)	**0,5**
		Chứng minh tương tự : $\frac{AI}{IB}=\frac{AC^2}{BC^2}$ Suy ra : $\frac{AE}{EC}+\frac{AI}{IB}=\frac{AC^2}{BC^2}+\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{BC^2}{BC^2}=1$ $\Rightarrow AE.IB+AI.EC=EC.IB$	**1,0**
	c **1,5 điểm**	BC cắt MN tại L. K là hình chiếu của H trên AL. Chứng minh rằng $BK\perp KC$	
		Chứng minh đc $\Delta AMN \sim \Delta ABC\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AMN}=\widehat{ABC}$	**0,5**
		Gọi Q là trung điểm của BC $\Rightarrow \Delta AQC$ cân tại Q $\Rightarrow \widehat{QAC}=\widehat{ACB}$ Do đó $\widehat{QAC}+\widehat{AMN}=\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=90^0 \Rightarrow AQ\perp LM$ Suy ra O là trực tâm của ΔLAQ $\Rightarrow QO\perp AL$	**0,5**
		Xét ΔAKH vuông tại K có AO = OH $\Rightarrow KO=AO\ (=\frac{AH}{2})$ Suy ra OQ là đường trung trực của AK $\Rightarrow QA=QK=QB=QC=\frac{BC}{2}$ Suy ra tam giác BKQ vuông tại K$\Rightarrow BK\perp CK$	**0,5**
Câu 5 **1 điểm**		Viết 150 số tự nhiên 1, 2, 3,…, 150 lên bảng. Mỗi lần ta xóa đi hai số nào đó và thay bằng tổng hoặc hiệu của chúng. Sau một số lần như vậy thì trên bảng chỉ còn lại một số. Hỏi có khi nào số đó là 100 không?	
		Giả sử xóa đi hai số bất kì a, b và thay bằng $a+b$ hoặc $a-b$ hoặc b - a Gọi tổng của 150 số ban đầu là: $S+a+b=1+2+3+...+150=\frac{(1+150).150}{2}=11325$ Là 1 số lẻ.	**0,25**
		Ta có tổng mới là: $S+a+b$ hoặc $S+a-b$ hoặc S +b - a	**0,25**
		Tổng của tổng ban đầu và tổng mới là: $(S+a+b)+(S+a+b)=2S+2a+2b$ hoặc $(S+a+b)+(S+a-b)=2S+2a$ hoặc 2S +2b đều là số chẵn nên tổng ban đầu và	**0,5**

	tổng mới luôn cùng tính chẵn, lẻ mà tổng ban đầu là số lẻ nên tổng mới cũng là số lẻ. Vậy số còn lại không thể là 100.	

--- Hết ---

Ghi chú: *Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa*