

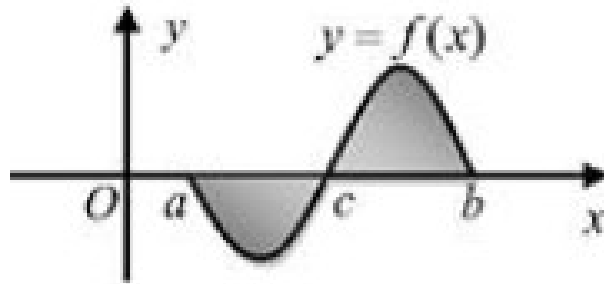
ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KỲ II

MÔN: TOÁN 12 – ĐỀ SỐ: 37 (100TN)

Câu 1: Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 3$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -5$. Tính $I = \int_{-1}^2 [2x - 3f(x) + 4g(x)]dx$.

A. $I = 26$. B. $I = -26$. C. $I = -8$. D. $I = 12$.

Câu 2: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$. Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



- A. $S = \int_a^b f(x)dx$.
- B. $S = \left| \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right|$.
- C. $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- D. $S = -\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$.

Câu 3: Cho $\int_1^3 \left(\frac{2x^2 - 1}{x} \right) dx = a + b \ln 3$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 9. B. 7. C. 8. D. 10.

Câu 4: Tính tích phân sau $\int_0^1 2x(x^2 + 1)^{2021} dx$

A. $\frac{1}{2022}$. B. $\frac{2^{2022} - 1}{2022}$. C. $\frac{2^{2021} - 1}{2021}$. D. $\frac{2^{2022} - 1}{4044}$.

Câu 5: Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 6: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1) \cos x dx = a\pi + b$. Tính $P = a^2 + b^2$

A. 1. B. 4. C. 0. D. 2.

Câu 7: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 3$ và $y = -2|x|$

A. $\frac{12}{3}$. B. $\frac{10}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{10}{6}$.

Câu 8: Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 4x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$ quanh trục Ox .

- A. $\frac{407\pi}{105}$. B. $\frac{814\pi}{105}$. C. $\frac{2048\pi}{105}$. D. $\frac{477\pi}{105}$.

Câu 9: Cho $I = \int_1^3 f(x) dx = 2020$. Tính tích phân $J = \int_0^1 f(2x+1) dx$.

- A. 2021 . B. 4040 . C. 1010 . D. 2020 .

Câu 10: Tích phân $\int_0^1 (x-2)e^{2x} dx = a + be^2$, với a, b là các số hữu tỉ. Biểu thức $a + b$ bằng:

- A. -2 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 2

Câu 11: Biết $I = \int_1^3 x \ln(x^2 + 1) dx = a \ln 10 + b \ln 2 + c$ trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

- A. $T = 5$. B. $T = 2$. C. $T = 0$. D. $T = 10$.

Câu 12: Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 2021$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.

- A. 2020. B. 2019. C. 2022. D. 2021.

Câu 13: Biết $\int_a^b \frac{1}{x} dx = 2$, trong đó a, b là các số thực dương. Tính tích phân $\int_a^b \frac{1}{x \ln x} dx$.

- A. $I = \ln 2$. B. $I = 2$. C. $I = \frac{1}{\ln 2}$. D. $I = \frac{1}{2}$.

Câu 14: Cho tích phân $I = \int_1^3 \frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 + x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c$. Với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $T = 3a^2 + 3a - c$

- A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn: $\bar{z} = (1 + \sqrt{2}i)^2 + (1 - \sqrt{2}i)^2$. Tính môđun của số phức $w = iz - 4$

- A. $|w| = \sqrt{5}$. B. $2\sqrt{5}$. C. 2. D. 5.

Câu 16: . Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $(1 + 2i)z + \bar{z} = i$. Tìm số phức z .

- A. $z = 1 + 2i$. B. $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. C. $z = 2 - i$. D. $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Câu 17: . Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $(1 - i)z + \bar{z} = 2 + i$. Tìm module của số phức $w = 2z - 3i$.

- A. $|w| = 2\sqrt{19}$. B. $|w| = \sqrt{19}$. C. $|w| = 2\sqrt{29}$. D. $|w| = \sqrt{29}$.

- Câu 18:** Tìm số phức liên hợp $\bar{z}$ của số phức $z = (3 - 2i)(2 + 3i)$.
A. $\bar{z} = -5i$. **B.** $\bar{z} = 6 + 6i$. **C.** $\bar{z} = 12 - 5i$ **D.** $\bar{z} = 6 - 6i$.
- Câu 19:** Tìm các số thực x, y biết $(2x + 3y + 1) + (-x + 2y)i = (3x - 2y + 2) + (4x - y - 3)i$
A. $x = \frac{9}{11}, y = \frac{4}{11}$ **B.** $x = -\frac{9}{11}, y = \frac{4}{11}$ **C.** $x = \frac{9}{11}, y = -\frac{4}{11}$ **D.** $x = -\frac{9}{11}, y = -\frac{4}{11}$
- Câu 20:** Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - 3 + i| = 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có bán kính là
A. $R = 3$. **B.** $R = 1$. **C.** $R = 5$ **D.** $R = 9$.
- Câu 21:** Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $(z - 3)(1 + i) = 2i$. Phần ảo của số phức z bằng
A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 9.
- Câu 22:** Biết nghịch đảo của số phức Z bằng số phức liên hợp của nó. Khi đó:
A. $|z| = 1$. **B.** $|z| = 2$. **C.** Z là số thực. **D.** Z là số thuần ảo.
- Câu 23:** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 6z + 12 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$
A. $P = 4\sqrt{3}$ **B.** $P = 2\sqrt{3}$ **C.** $P = 6$ **D.** $P = 3$
- Câu 24:** Cho số phức z thỏa mãn $3z - i\bar{z} = 15 - 13i$. Tìm môđun của Z .
A. 5. **B.** 25. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.
- Câu 25:** Trong mặt phẳng phức, cho 3 điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = -1 + i, z_2 = 1 + 3i, z_3$. Biết tam giác ABC vuông cân tại A và z_3 có phần thực dương. Khi đó, tọa độ điểm C là:
A. $(2; -2)$. **B.** $(3; -3)$. **C.** $(\sqrt{8} - 1; 1)$. **D.** $(1; -1)$.
- Câu 26:** Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ j và $u = (0; -\sqrt{3}; 1)$ là
A. 120° . **B.** 60° . **C.** 150° . **D.** 30° .
- Câu 27:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$.
A. $2x + y + 4z - 16 = 0$ **B.** $2x - y + 4z - 16 = 0$
C. $2x + y + 4z + 16 = 0$ **D.** $-2x + y + 4z - 16 = 0$.
- Câu 28:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 3 = 0$ và điểm $I(1; 1; 0)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với (P) là
A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{5}{6}$ **B.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{25}{6}$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{5}{\sqrt{6}}$.

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{25}{6}$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{1}$ và điểm $A(1;4;-5)$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A song song đường thẳng d và trục Ox .

A. $y+3z-19=0$ B. $y-3z-19=0$ C. $y-3z+19=0$ D. $y+3z+19=0$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Điểm $M(1;2;-3)$

có hình chiếu lên (P) là điểm $M'(a;b;c)$. Tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

A. 3. B. -3. C. 0. D. 6.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-4=0$ và mặt phẳng $(Q): x+3y-2z+2=0$. Đường thẳng d là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+3}{7}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-3}{7}$.

C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-3}{7}$ D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{7}$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;0;4)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$ C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-1}$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{5}$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x+4y+5z-2021=0$. Góc giữa Δ và (α) bằng

A. 30° . B. 60° . C. 0° . D. 90° .

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. 14. B. 24. C. 8. D. 24.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(6;-2;3)$, $B(0;1;6)$, $C(2;0;-1)$, $D(4;1;0)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

A. $V_{ABCD}=96$. B. $V_{ABCD}=24$. C. $V_{ABCD}=72$. D. $V_{ABCD}=12$.

Câu 36: Biết $I = \int_0^2 \frac{\pi x^5 + 3^x + e x^5 3^x}{e \cdot 3^x + \pi} dx = \frac{a}{3} + \frac{1}{e \ln 3} \ln \left(1 + \frac{b \cdot e}{\pi + e} \right)$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $T = a + b^2$.

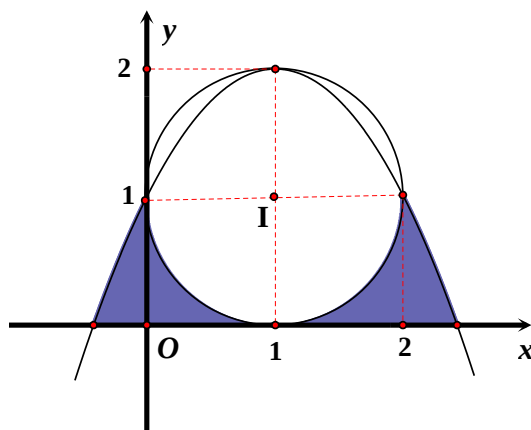
A. 84.

B. 41.

C. 96.

D. 25.

Câu 37: Hình phẳng được tô đậm trong hình dưới đây được giới hạn bởi đường tròn, đường parabol, trục hoành và có diện tích $S = a\sqrt{2} + b - c\pi$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính tổng $3a + 3b - 2c$.



A. 5.

B. 7.

C. 9.

D. 11.

Câu 38: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị hàm số là một phần của parabol có đỉnh $B(2; 6)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Tính quãng đường S mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.

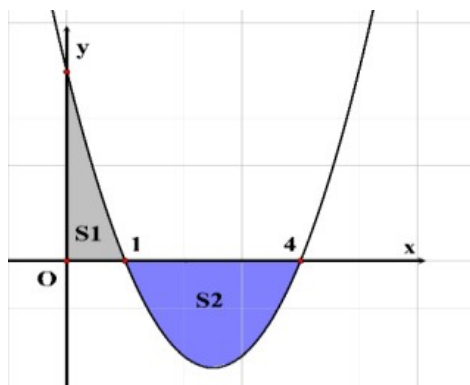
A. 15 km.

B. 33 km.

C. 16 km.

D. 30 km.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ là hàm bậc hai có đồ thị như hình vẽ dưới và có diện tích $S_1 = \frac{11}{6}$, $S_2 = \frac{9}{2}$.



đúng ?

Mệnh đề nào sau đây

A. $f(0) < f(1) < f(4)$ B. $f(\frac{3}{2}) < f(4) < f(1)$

C. $f(\frac{3}{2}) < f(0) < f(1)$ D. $f(1) < f(4) < f(\frac{3}{2})$

Câu 40: Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ với $b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $2w - 1 + 3i$ và $iw + 2 + 3i$, với w là một số phức. Tính giá trị của biểu thức $S = 2b^2 - c$.

- A. 294. B. -409. C. 27. D. 37.

Câu 41: Cho số phức z thỏa mãn $(z-2)(\bar{z}+3i)$ là một số thuần ảo. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có chu vi bằng.

- A. $\pi\sqrt{13}$. B. $2\pi\sqrt{13}$. C. $\frac{\pi\sqrt{13}}{2}$. D. $\frac{13\pi}{4}$.

Câu 42: Cho số phức Z thỏa mãn hệ thức $|z-2+3i|=|z+i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|2z+i(1-2i)|$ bằng

- A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{7\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A , B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

- A. 1 mặt phẳng. B. 2 mặt phẳng. C. 0 mặt phẳng. D. Vô số mặt phẳng.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;1;0)$, $B(3;-1;2)$, $C(-1;6;7)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (Oxz) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất.

- A. $M(3;0;-1)$. B. $M(1;0;0)$. C. $M(1;0;3)$. D. $M(1;1;3)$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$; $d': \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - y - z = 0$. Phương trình nào sau đây là phương

trình của đường thẳng Δ song song với (P) , cắt d và d' lần lượt tại M và N mà $MN = \sqrt{2}$.

- A. $\Delta: \frac{7x-4}{3} = \frac{7y+4}{8} = \frac{7z+8}{-5}$. B. $\Delta: \frac{7x-4}{3} = \frac{7y-4}{8} = \frac{7z+8}{-5}$.
C. $\Delta: \frac{7x-1}{3} = \frac{7y-4}{8} = \frac{7z+3}{-5}$. D. $\Delta: \frac{7x-1}{3} = \frac{7y+4}{8} = \frac{7z+8}{-5}$.

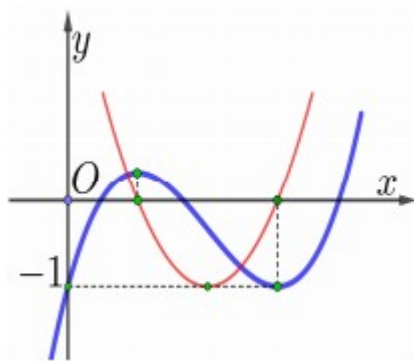
Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$$x^6 \cdot [f'(x)]^3 + 64 \cdot [f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(1) = \frac{37}{64}. \text{ Tính tích phân } \int_0^1 f(x) dx.$$

- A. $\frac{229}{256}$. B. $\frac{-229}{256}$. C. $\frac{256}{229}$. D. $\frac{-256}{229}$.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$ và $y = g(x) = cx^2 - 4x + d$ có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn

$x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$.



- A. $S = \frac{9}{4}$. B. $\frac{27}{4}$. C. 3. D. 9.

Câu 48: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 7i| = 2$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - 2i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Giá trị $|z - \sqrt{2} - \sqrt{2}i|$ bằng

- A. $\sqrt{58}$. B. $\sqrt{41}$. C. $\sqrt{38}$. D. $\sqrt{61}$.

Câu 49: Trong không gian $(Oxyz)$ cho điểm $A(2, 2, 1)$ và điểm $B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Gọi Δ là đường phân giác trong của góc A của tam giác OAB . Điểm $M(a; b; c)$ trên Δ sao cho $MO + OB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hỏi $T = 7a + 8b + 2021c$ có giá trị bằng

- A. 2019. B. 2020. C. 2017. D. 2018.

Câu 50: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $M(2; -1; 1)$, song song với mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 2021 = 0$ sao cho tổng khoảng cách từ các điểm $A(2; -2; 0), B(1; 0; 3)$ tới đường thẳng đó đạt giá trị nhỏ nhất. Vectơ chỉ phương của d là

$u_d = (a; b; c)$. Tổng $a^2 + b^2 + c^2$ bằng:

- A. 2020. B. 30. C. 100. D. 120.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

- Câu 1:** Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 3$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -5$. Tính $I = \int_{-1}^2 [2x - 3f(x) + 4g(x)] dx$.
- A. $I = 26$. B. $I = -26$! C. $I = -8$. D. $I = 12$.

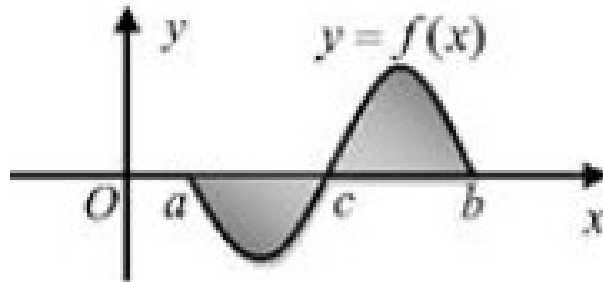
Lời giải

Ta có:
$$I = \int_{-1}^2 [2x - 3f(x) + 4g(x)] dx$$

$$= \left[x^2 \right]_{-1}^2 - 3 \int_{-1}^2 f(x)dx + 4 \int_{-1}^2 g(x)dx$$

$$= (4 - 1) - 3 \cdot 3 + 4(-5) = -26$$

- Câu 2:** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



- A. $S = \int_a^b f(x)dx$. B. $S = \left| \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right|$.
- C. $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. D. $S = - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$!

Lời giải

Ta có:
$$S = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|dx = - \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

- Câu 3:** Cho $\int_1^3 \left(\frac{2x^2 - 1}{x} \right) dx = a + b \ln 3$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của $a + b$ bằng
- A. 9. B. 7 ! C. 8. D. 10.

Lời giải

$$\int_1^3 \frac{2x^2 - 1}{x} dx = \int_1^3 \left(2x - \frac{1}{x} \right) dx = \left(x^2 - \ln|x| \right) \Big|_1^3 = 8 - \ln 3 \Rightarrow a = 8, b = -1 \Rightarrow a + b = 7$$

- Câu 4:** Tính tích phân sau $\int_0^1 2x(x^2 + 1)^{2021} dx$
- A. $\frac{1}{2022}$. B. $\frac{2^{2022} - 1}{2022}$ **!** C. $\frac{2^{2021} - 1}{2021}$. D. $\frac{2^{2022} - 1}{4044}$.

Lời giải

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow 2x dx = dt$; Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 2$

Khi đó: $\int_0^1 2x(x^2 + 1)^{2021} dx = \int_1^2 t^{2021} dt = \frac{t^{2022}}{2022} \Big|_1^2 = \frac{2^{2022} - 1}{2022}$.

- Câu 5:** [Mức độ 2] Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx$ bằng
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **!**

Lời giải

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{3} - \sin 0) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

- Câu 6:** [Mức độ 2] Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1) \cos x dx = a\pi + b$. Tính $P = a^2 + b^2$
- A. 1. B. 4. C. 0. D. 2 **!**

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = 2x + 1 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = \sin x \end{cases}$

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1) \cos x dx = (2x + 1) \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = \pi + 1 + 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$
 $= \pi + 1 + 2(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) = \pi - 1$. Vậy $P = a^2 + b^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$.

- Câu 7:** [Mức độ 2] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 3$ và $y = -2|x|$
- A. $\frac{12}{3}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{10}{6}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 3 = -2|x| \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 3 = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Diện tích hình phẳng là: $S = \int_{-1}^1 |x^2 - 3 + 2|x|| dx = \int_{-1}^0 |x^2 - 3 - 2x| dx + \int_0^1 |x^2 - 3 + 2x| dx$

Mà $x^2 - 3 - 2x < 0 \forall x \in (-1; 0)$ và $x^2 - 3 + 2x < 0 \forall x \in (0; 1)$ nên

$S = \left| \int_{-1}^0 (x^2 - 3 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^2 - 3 + 2x) dx \right|$

$$= \left| \left(\frac{x^3}{3} - 3x - x^2 \right) \right|_{-1}^0 + \left| \left(\frac{x^3}{3} - 3x + x^2 \right) \right|_0^1 = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}.$$

Câu 8: [Mức độ 2] Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 4x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$ quanh trục Ox .

- A. $\frac{407\pi}{105}$. B. $\frac{814\pi}{105}$ | C. $\frac{2048\pi}{105}$. D. $\frac{477\pi}{105}$.

Lời giải

$$V = \pi \int_{-1}^1 (x^3 - 4x)^2 dx = \frac{814\pi}{105}.$$

Câu 9: [Mức độ 2] Cho $I = \int_1^3 f(x) dx = 2020$. Tính tích phân $J = \int_0^1 f(2x+1) dx$.

- A. 2021. B. 4040. C. 1010. D. 2020.

Lời giải

Đặt $t = 2x + 1 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 3$.

$$\text{Khi đó } J = \int_0^1 f(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} \cdot 2020 = 1010.$$

Câu 10: [Mức độ 2] Tích phân $\int_0^1 (x-2)e^{2x} dx = a + be^2$, với a, b là các số hữu tỉ. Biểu thức $a + b$ bằng:

- A. -2 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 2

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x - 2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases} \quad \text{Suy ra: } \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx = (x-2) \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^2 + 1 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} e^2 + 1 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} e^2 + \frac{5}{4} = \frac{5 - 3e^2}{4}.$$

$$a = \frac{5}{4}, b = -\frac{3}{4}, \text{ suy ra } a + b = \frac{1}{2}.$$

Suy ra

Câu 11: [Mức độ 2] Biết $I = \int_1^3 x \ln(x^2 + 1) dx = a \ln 10 + b \ln 2 + c$ trong đó a, b, c là các số nguyên.

Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

- A. $T = 5$. B. $T = 2$. C. $T = 0$ | D. $T = 10$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x^2 + 1) \\ dv = x dx \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ v = \frac{x^2 + 1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } I = \frac{x^2 + 1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2 + 1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2 + 1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^3 - \int_1^3 x dx$$

$$= \frac{x^2 + 1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^3 - \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^3 = \frac{10}{2} \ln 10 - \frac{2}{2} \ln 2 - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = 5 \ln 10 - \ln 2 - 4.$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \Rightarrow a + b + c = 0. \\ c = -4 \end{cases}$$

Suy ra

- Câu 12:** [Mức độ 2] Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 2021$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.
- A. 2020. B. 2019. C. 2022. D. 2021.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx. \text{ Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 0, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = 2021.$$

- Câu 13:** [Mức độ 2] Biết $\int_a^b \frac{1}{x} dx = 2$, trong đó a, b là các số thực dương. Tính tích phân $\int_a^b \frac{1}{x \ln x} dx$.
- A. $I = \ln 2$. B. $I = 2$ C. $I = \frac{1}{\ln 2}$. D. $I = \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx. \text{ Đổi cận: khi } x = e^a \Rightarrow t = a; x = e^b \Rightarrow t = b$$

$$\text{Vậy } I = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \int_a^b \frac{1}{x} dx = 2.$$

- Câu 14:** [Mức độ 2] Cho tích phân $I = \int_1^3 \frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 + x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c$. Với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $T = 3a^2 + 3a - c$.
- A. -1. B. 0 C. 1. D. 2.

Lời giải

$$I = \int_1^3 \frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 + x} dx = \int_1^3 \frac{3(x^2 + x) + 2x + 1}{x^2 + x} dx = \int_1^3 3 dx + \int_1^3 \frac{2x + 1}{x^2 + x} dx = \int_1^3 3 dx + \int_1^3 \frac{d(x^2 + x)}{x^2 + x}$$

$$= 3x \Big|_1^3 + \ln |x^2 + x| \Big|_1^3 = 6 + \ln 6 - \ln 2 - \ln 3 + 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \Rightarrow T = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 6 = 0 \\ c = 6 \end{cases}$$

Câu 15: [Mức độ 2] Cho số phức z thỏa mãn: $\bar{z} = (1 + \sqrt{2}i)^2 + (1 - \sqrt{2}i)^2$. Tính môđun của số phức $w = iz - 4$

- A. $|w| = \sqrt{5}$. B. $2\sqrt{5}$! C. 2. D. 5.

Lời giải

Ta có: $\bar{z} = (1 + \sqrt{2}i)^2 + (1 - \sqrt{2}i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i - 2 + 1 - 2\sqrt{2}i - 2 = -2 \Rightarrow z = -2$

Do đó: $w = -2i - 4 \Rightarrow |w| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Câu 16: [Mức độ 2]. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $(1 + 2i)z + \bar{z} = i$. Tìm số phức z .

- A. $z = 1 + 2i$. B. $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. C. $z = 2 - i$. D. $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$!

Lời giải

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Ta có: $(1 + 2i)z + \bar{z} = (1 + 2i)(x + yi) + x - yi = (2x - 2y) + 2xi$

Theo giả thiết ta suy ra
$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Câu 17: [Mức độ 2]. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $(1 - i)z + \bar{z} = 2 + i$. Tìm module của số phức $w = 2z - 3i$.

- A. $|w| = 2\sqrt{19}$. B. $|w| = \sqrt{19}$. C. $|w| = 2\sqrt{29}$. D. $|w| = \sqrt{29}$!

Lời giải

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Ta có: $(1 - i)z + 2\bar{z} = (1 - i)(x + yi) + 2x - 2yi = (3x + y) - (x + y)i$

Theo giả thiết ta suy ra
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -(x + y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow z = -1 + 4i$$

$\Rightarrow w = 2(-1 + 4i) - 3i = -2 + 5i$, do đó $|w| = \sqrt{29}$

Câu 18: [Mức độ 2] Tìm số phức liên hợp $\bar{z}$ của số phức $z = (3 - 2i)(2 + 3i)$.

- A. $\bar{z} = -5i$. B. $\bar{z} = 6 + 6i$. C. $\bar{z} = 12 - 5i$ D. $\bar{z} = 6 - 6i$.

Lời giải

Ta có: $z = (3 - 2i)(2 + 3i) = 6 + 9i - 4i + 6 = 12 + 5i \Rightarrow \bar{z} = 12 - 5i$.

Câu 19: [**Mức độ 2**] Tìm các số thực x, y biết $(2x + 3y + 1) + (-x + 2y)i = (3x - 2y + 2) + (4x - y - 3)i$

- A.** $x = \frac{9}{11}, y = \frac{4}{11}$ **B.** $x = -\frac{9}{11}, y = \frac{4}{11}$ **C.** $x = \frac{9}{11}, y = -\frac{4}{11}$ **D.** $x = -\frac{9}{11}, y = -\frac{4}{11}$

Lời giải

Ta có

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 3x - 2y + 2 \\ -x + 2y = 4x - y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5y = 1 \\ -5x + 3y = -3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9}{11}, y = \frac{4}{11}$$

Câu 20: [**Mức độ 2**] Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - 3 + i| = 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có bán kính là

- A.** $R = 3$. **B.** $R = 1$. **C.** $R = 5$ **D.** $R = 9$.

Lời giải

Gọi $M(x; y)$ với $x, y \in \mathbb{R}$ là điểm biểu diễn của số phức z . Ta có $z = x + yi$.

Theo giả thiết ta có $|z - 3 + i| = 5 \Leftrightarrow |x + yi - 3 + i| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 1)^2} = 5$
 $\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm $I(3; -1)$, bán kính $R = 5$.

Câu 21: [**Mức độ 2**] Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $(z - 3)(1 + i) = 2i$. Phần ảo của số phức z bằng

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $(z - 3)(1 + i) = 2i \Leftrightarrow z - 3 = \frac{2i}{1 + i} \Leftrightarrow z - 3 = 1 + i \Leftrightarrow z = 4 + i$

Vậy phần ảo của số phức z là 1.

Câu 22: [**Mức độ 2**] Biết nghịch đảo của số phức z bằng số phức liên hợp của nó. Khi đó:

- A.** $|z| = 1$. **B.** $|z| = 2$. **C.** z là số thực. **D.** z là số thuần ảo.

Lời giải

Điều kiện $z \neq 0$. Có $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$; $z^{-1} = \bar{z} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z} \Leftrightarrow \bar{z}(1 - |z|^2) = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$ (do $z \neq 0$)

Câu 23: [**Mức độ 2**] Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 6z + 12 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$

- A.** $P = 4\sqrt{3}$ **B.** $P = 2\sqrt{3}$ **C.** $P = 6$ **D.** $P = 3$

Lời giải

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 12 = 12i^2 \Rightarrow z^2 + 6z + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -3 + \sqrt{3}i \\ z_2 = -3 - \sqrt{3}i \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } P = |z_1| + |z_2| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} + \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}.$$

Câu 24: [Mức độ 2] Cho số phức z thỏa mãn $3z - i\bar{z} = 15 - 13i$. Tìm môđun của z .

A. 5.

B. 25.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\sqrt{7}$.

Lời giải

$$z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}). \text{ Ta có } 3(a + bi) - i(a - bi) = 15 - 13i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = 15 \\ -a + 3b = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}$$

Gọi

$$\text{Vậy } z = 4 - 3i \Rightarrow |z| = 5.$$

Câu 25: [Mức độ 2] Trong mặt phẳng phức, cho 3 điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = -1 + i, z_2 = 1 + 3i, z_3$. Biết tam giác ABC vuông cân tại A và z_3 có phần thực dương. Khi đó, tọa độ điểm C là:

A. $(2; -2)$.

B. $(3; -3)$.

C. $(\sqrt{8} - 1; 1)$.

D. $(1; -1)$.

Lời giải

$$\text{Giả sử } z_3 = a + bi \text{ với } a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ suy ra } C(a; b).$$

$$\text{Ta có } A(-1; 1), B(1; 3) \Rightarrow AB = (2; 2), AC = (a + 1; b - 1).$$

Tam giác ABC vuông tại A nên

$$AB \cdot AC = 0 \Leftrightarrow 2(a + 1) + 2(b - 1) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a \quad (1)$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ cân tại } A \text{ nên } AC = AB \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b - 1)^2 = 8 \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta được:

$$(a + 1)^2 + (-a - 1)^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 = 4 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$$

Vì $a > 0$ nên $a = 1 \Rightarrow b = -1$. Vậy điểm C có tọa độ là $(1; -1)$.

Câu 26: [Mức độ 2] Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ j và $u = (0; -\sqrt{3}; 1)$ là

A. 120° .

B. 60° .

C. 150°

D. 30° .

Lời giải

Gọi α là góc giữa hai vectơ $j(0;1;0)$ và $u=(0;-\sqrt{3};1)$, ta có:

$$\cos \alpha = \frac{j \cdot u}{|j| \cdot |u|} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 150^\circ$$

- Câu 27:** [Mức độ 2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$.
- A. $2x + y + 4z - 16 = 0$ B. $2x - y + 4z - 16 = 0$
 C. $2x + y + 4z + 16 = 0$ D. $-2x + y + 4z - 16 = 0$

Lời giải

+) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$.
 +) Mặt phẳng (P) vuông góc đường thẳng Δ nên (P) nhận vec tơ chỉ phương của đường thẳng Δ làm vec tơ pháp tuyến. Suy ra (P) có vec tơ pháp tuyến là $n(2;1;4)$.
 Khi đó: $2(x-1) + (y-2) + 4(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 4z - 16 = 0$.
 Vậy phương trình mặt phẳng $(P): 2x + y + 4z - 16 = 0$.

- Câu 28:** [Mức độ 2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 3 = 0$ và điểm $I(1;1;0)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với (P) là
- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{5}{6}$ B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{25}{6}$
 C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{5}{\sqrt{6}}$ D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{25}{6}$

Lời giải

$$r = d(I, (P)) = \frac{|1+1-2 \cdot 0+3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

 Mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng nên bán kính mặt cầu là $\frac{5}{\sqrt{6}}$.
 Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{25}{6}$.

- Câu 29:** [Mức độ 2] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{1}$ và điểm $A(1;4;-5)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A song song đường thẳng d và trục Ox .
- A. $y + 3z - 19 = 0$ B. $y - 3z - 19 = 0$ C. $y - 3z + 19 = 0$ D. $y + 3z + 19 = 0$

Lời giải

Ta có: $u_d = (-2;3;1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d và $i = (1;0;0)$

$$\Rightarrow n_p = [u_d; i] = (0;1;-3)$$
 là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A song song đường thẳng d và trục Ox là
 $0.(x-1)+1.(y-4)-3(z+5)=0 \Leftrightarrow y-3z-19=0$

- Câu 30:** [Mức độ 2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Điểm $M(1;2;-3)$ có hình chiếu lên (P) là điểm $M'(a;b;c)$. Tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?
A. 3 **B.** -3 **C.** 0 **D.** 6

Lời giải

Đường thẳng Δ qua $M(1;2;-3)$ vuông góc với (P) nhận véc-tơ pháp tuyến $n=(1;1;1)$ của

$$\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=-3+t \end{cases}$$

(P) làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình

Xét phương trình $(1+t)+(2+t)+(-3+t)-3=0 \Leftrightarrow t=1$.

Suy ra giao điểm của Δ và (P) là $M'(2;3;-2)$ là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P) .

Do đó $a+b+c=3$. **111Equation Chapter 1 Section 1**

- Câu 31:** [Mức độ 2] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-4=0$ và mặt phẳng $(Q): x+3y-2z+2=0$. Đường thẳng d là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+3}{7}$ **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-3}{7}$
C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-3}{7}$ **D.** $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{7}$

Lời giải

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $n_p=(2;-1;1)$.

Mặt phẳng (Q) có véc-tơ pháp tuyến $n_q=(1;3;-2)$.

Gọi u là 1 véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d . Do $d=(P) \cap (Q)$ nên $\begin{cases} u \perp n_p \\ u \perp n_q \end{cases}$.

Chọn $u=[n_p, n_q]=(-1;5;7)$.

Lấy điểm $M(1;y;z) \in d \Rightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ M \in (Q) \end{cases}$ Tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2-y+z-4=0 \\ 1+3y-2z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=3 \end{cases} \text{ Suy ra } M(1;1;3).$$

Phương trình đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-3}{7}$.

Câu 32: [Mức độ 3] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;0;4)$ và đường thẳng d có phương

trình $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$. C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-1}$ |

Lời giải

Cách 1:

Đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ có véc tơ chỉ phương $u = (1;1;2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d , nên nhận véc tơ chỉ phương của

d là vectơ pháp tuyến $(P): 1(x+1) + y + 2(z-4) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 7 = 0$

Gọi B là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng $d \Rightarrow B(-1+t; t; 1+2t)$.

Vì $B \in (P) \Leftrightarrow (-1+t) + t + 2(1+2t) - 7 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow B(0; 1; 3)$

Ta có đường thẳng Δ đi qua A và nhận vectơ $\overrightarrow{AB} = (1;1;-1)$ là véc tơ chỉ phương có dạng

$\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-1}$.

Cách 2:

Gọi $d \cap \Delta = B \Rightarrow B(-1+t; t; 1+2t)$

$\overrightarrow{AB} = (t; t; -3+2t)$. Đường thẳng d có VTCP là $u_d = (1;1;2)$

Vì $d \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{AB} \perp u_d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot u_d = 0 \Leftrightarrow t + t + 2(-3+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (1;1;-1)$. Ta có đường thẳng Δ đi qua $A(-1;0;4)$ và nhận véc tơ $\overrightarrow{AB} = (1;1;-1)$ là véc tơ

chỉ phương có dạng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-1}$.

Câu 33: [Mức độ 2] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{5}$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x + 4y + 5z - 2021 = 0$.

Góc giữa Δ và (α) bằng

A. 30° . B. 60° . C. 0° . D. 90° |

Lời giải

Ta có một véc tơ chỉ phương của Δ là $u_{\Delta} = (3; 4; 5)$; một véc tơ pháp tuyến của (α) là $n_{(\alpha)} = (3; 4; 5)$.

Cách 1: Nhận thấy $u_{\Delta} = n_{(\alpha)}$ nên đường thẳng $\Delta \perp (\alpha)$ suy ra $(\Delta; (\alpha)) = 90^\circ$.

Cách 2: Áp dụng công thức $\sin \varphi = \frac{|u_{\Delta} \cdot n_{(\alpha)}|}{|u_{\Delta}| \cdot |n_{(\alpha)}|}$ (trong đó $\varphi = (\Delta; (\alpha))$)
 $\Rightarrow \sin \varphi = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = 1 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$.

Câu 34: [Mức độ 2] Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$. Diện tích tam giác ABC bằng
A. 14 **B.** 24 **C.** 8 **D.** 24

Lời giải

Fb tác giả: Tran Minh

$$AB = (2; -2; -3), AC = (4; 0; 6), [AB, AC] = (-12; -24; 8) \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[AB, AC]| = 14$$

Câu 35: [Mức độ 3] Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(6; -2; 3)$, $B(0; 1; 6)$, $C(2; 0; -1)$, $D(4; 1; 0)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.
A. $V_{ABCD} = 96$ **B.** $V_{ABCD} = 24$ **C.** $V_{ABCD} = 72$ **D.** $V_{ABCD} = 12$

Lời giải

Ta có $AB = (-6; 3; 3)$, $AC = (-4; 2; -4)$, $AD = (-2; 3; -3)$.

$$[AB, AC] = (-18; -36; 0)$$

$[AB, AC] \cdot AD = -72 \neq 0 \Rightarrow A, B, C, D$ là 4 đỉnh của một tứ diện.

Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[AB, AC] \cdot AD| = 12$.

Câu 36: [Mức độ 3] Biết $I = \int_0^2 \frac{\pi x^5 + 3^x + e x^5 3^x}{e \cdot 3^x + \pi} dx = \frac{a}{3} + \frac{1}{e \ln 3} \ln \left(1 + \frac{b \cdot e}{\pi + e} \right)$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $T = a + b^2$.
A. 84 **B.** 41 **C.** 96 **D.** 25

Lời giải

$$I = \int_0^2 \frac{\pi x^5 + 3^x + e x^5 3^x}{e \cdot 3^x + \pi} dx = \int_0^2 \left(x^5 + \frac{3^x}{e \cdot 3^x + \pi} \right) dx = \frac{1}{6} x^6 \Big|_0^2 + K = \frac{32}{3} + K.$$

Ta có

Tính
$$K = \int_0^2 \frac{3^x}{e \cdot 3^x + \pi} dx.$$

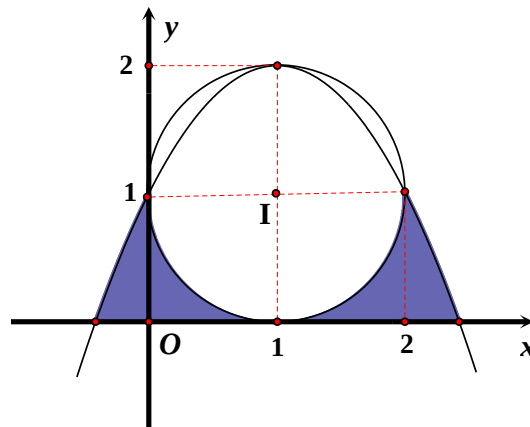
Đặt $t = e \cdot 3^x + \pi \Rightarrow dt = e \cdot \ln 3 \cdot 3^x dx \Rightarrow 3^x dx = \frac{1}{e \ln 3} dt.$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=\pi+e; \quad x=2 \Rightarrow t=9e+\pi.$

Khi đó
$$K = \frac{1}{e \cdot \ln 3} \cdot \int_{\pi+e}^{9e+\pi} \frac{dt}{t} = \frac{1}{e \cdot \ln 3} \ln|t| \Big|_{\pi+e}^{9e+\pi} = \frac{1}{e \ln 3} \ln \frac{9e+\pi}{e+\pi} = \frac{1}{e \ln 3} \ln \left(1 + \frac{8e}{\pi+e} \right).$$

Vậy
$$I = \frac{32}{3} + \frac{1}{e \ln 3} \ln \left(1 + \frac{8e}{\pi+e} \right) \Rightarrow \begin{cases} a=32 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow T = a + b^2 = 96.$$

Câu 37: [Mức độ 3] Hình phẳng được tô đậm trong hình dưới đây được giới hạn bởi đường tròn, đường parabol, trục hoành và có diện tích $S = a\sqrt{2} + b - c\pi$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính tổng $3a + 3b - 2c$.



A. 5.

B. 7.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Phương trình của parabol là $y = -x^2 + 2x + 1$.

Phương trình đường tròn là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow$ phần đường tròn nằm phía dưới đường thẳng $y=1$ có phương trình là $y = 1 - \sqrt{2x - x^2}$.

Parabol cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là $x = 1 \pm \sqrt{2}$ và cắt đường tròn tại các điểm có hoành độ là $0, 1, 2$ (trong đó tiếp xúc tại điểm có hoành độ bằng 1).

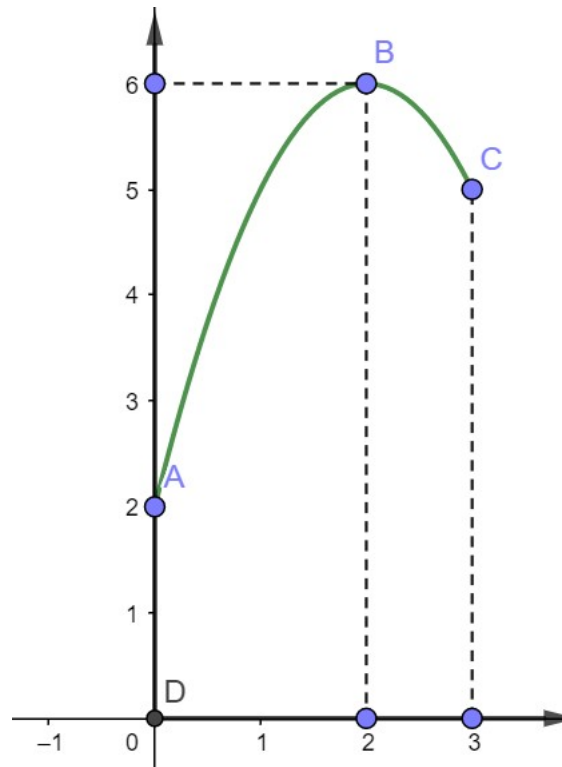
Do tính đối xứng nên diện tích của hai phần tô đậm là bằng nhau, do đó:

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{1-\sqrt{2}}^0 (-x^2 + 2x + 1) dx + 2 \int_0^1 (1 - \sqrt{2x - x^2}) dx = \frac{8\sqrt{2} - 10}{3} + 2 \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - (x-1)^2}) dx \\ &= \frac{8\sqrt{2} - 4}{3} - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t dt \quad (\text{với } x-1 = \sin t) \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{8}{3}, b = -\frac{4}{3}, c = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3a + 3b - 2c = 5$$

- Câu 38:** [Mức độ 3] Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị hàm số là một phần của parabol có đỉnh $B(2;6)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Tính quãng đường S mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.
- A.** 15 km **B.** 33 km **C.** 16 km **D.** 30 km

Lời giải



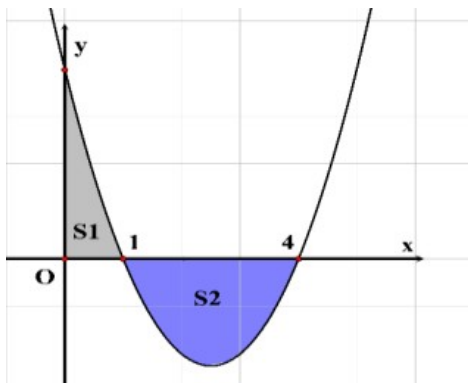
Gọi hàm số biểu thị vận tốc của vật là $v(t) = at^2 + bt + c$.

$$\begin{cases} c = 2 \\ \frac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = 4 \\ a = -1 \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có :

Suy ra $v(t) = -t^2 + 4t + 2, 0 \leq t \leq 3$. Vậy $S = \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (-t^2 + 4t + 2) dt = 15 (km)$.

- Câu 39:** [Mức độ 3] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ là hàm bậc hai có đồ thị như hình vẽ dưới và có diện tích $S_1 = \frac{11}{6}, S_2 = \frac{9}{2}$.

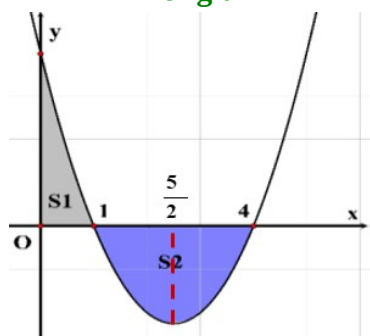


đúng ?

Mệnh đề nào sau đây

- A. $f(0) < f(1) < f(4)$. B. $f\left(\frac{5}{2}\right) < f(4) < f(1)$.
 C. $f\left(\frac{5}{2}\right) < f(0) < f(1)$. D. $f(1) < f(4) < f\left(\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải



Ta có $\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = S_1 = \frac{11}{6} \Rightarrow f(1) > f(0)$ (1)

Do $y = f'(x)$ là hàm bậc hai theo hình vẽ trên thì $x = \frac{5}{2}$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số

$y = f'(x)$ từ đó ta có: $\int_0^{\frac{5}{2}} f'(x) dx = f\left(\frac{5}{2}\right) - f(0) = \int_0^1 f'(x) dx + \int_1^{\frac{5}{2}} f'(x) dx = S_1 - \frac{1}{2} S_2 = -\frac{5}{12} < 0$

suy ra $f\left(\frac{5}{2}\right) < f(0)$ (2). Từ (1) và (2) ta có $f\left(\frac{5}{2}\right) < f(0) < f(1)$.

Câu 40: [Mức độ 3] Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ với $b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $2w - 1 + 3i$ và $iw + 2 + 3i$, với w là một số phức. Tính giá trị của biểu thức $S = 2b^2 - c$.

- A. 294 . B. -409 . C. 27 . D. 37 .

Lời giải

Vì $z_1 = 2w - 1 + 3i$ và $z_2 = iw + 2 + 3i$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai hệ số thực nên $z_2 = \overline{z_1}$. Đặt $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $z_1 = 2(x + yi) - 1 + 3i = (2x - 1) + (2y + 3)i$

$z_2 = i(x + yi) + 2 + 3i = (2 - y) + (x + 3)i$

Vì $z_2 = \overline{z_1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - y = 2x - 1 \\ x + 3 = -2y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$

Suy ra $z_1 = 7 - 7i$; $z_2 = 7 + 7i$

Áp dụng định lý Vi-et ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{1} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -14 \\ c = 98 \end{cases}$. Suy ra $S = 2b^2 - c = 294$.

Câu 41: [Mức độ 3] Cho số phức z thỏa mãn $(z - 2)(\overline{z} + 3i)$ là một số thuần ảo. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có chu vi bằng.

A. $\pi\sqrt{13}$ **B.** $2\pi\sqrt{13}$ **C.** $\frac{\pi\sqrt{13}}{2}$ **D.** $\frac{13\pi}{4}$

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có: $(x + yi - 2)(x - yi + 3i) = x^2 + y^2 - 2x - 3y + (3x + 2y - 6)i$

Do $(z - 2)(\overline{z} + 3i)$ là một số thuần ảo nên có phần thực bằng 0 hay $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$ có bán kính $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Vậy chu vi đường tròn là $2\pi R = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = \pi\sqrt{13}$.

Câu 42: [Mức độ 3] Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $|z - 2 + 3i| = |z + i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2z + i(1 - 2i)|$ bằng

A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** $\frac{7\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Cách 1:

Giả sử $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

Từ giả thiết ta có $|a - 2 + (b + 3)i| = |a + (b + 1)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a - 2)^2 + (b + 3)^2} = \sqrt{a^2 + (b + 1)^2} \Leftrightarrow -4a + 4b + 12 = 0 \Leftrightarrow a = b + 3$

Biểu thức $P = |2z + i(1 - 2i)| = |2a + 2bi + i + 2| = \sqrt{(2a + 2)^2 + (2b + 1)^2}$

$$\Rightarrow P = \sqrt{(2b+6+2)^2 + (2b+1)^2} = \sqrt{4b^2 + 32b + 64 + 4b^2 + 4b + 1} = \sqrt{8b^2 + 36b + 65}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{2\left(4b^2 + 18b + \frac{81}{4}\right) + \frac{49}{2}} = \sqrt{2\left(2b + \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{49}{2}} \geq \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $P_{\min} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ đạt được khi $b = -\frac{9}{4}; a = \frac{3}{4}$.

Cách 2:

Giả sử $z = a + bi, (a; b \in \mathbb{R})$

Từ giả thiết ta có $|a - 2 + (b+3)i| = |a + (b+1)i|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (b+3)^2} = \sqrt{a^2 + (b+1)^2} \Leftrightarrow -4a + 4b + 12 = 0 \Leftrightarrow -a + b + 3 = 0$$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $\Delta: -x + y + 3 = 0$

$$P = |2z + i(1-2i)| = |2a + 2bi + i + 2| = 2\left|a + 1 + \left(b + \frac{1}{2}\right)i\right| = 2\sqrt{(a+1)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2}$$

Biểu thức

Giả sử $M(a; b), A\left(-1; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow M \in \Delta$ và $P = 2AM$.

$$\Rightarrow P \geq 2d(M; \Delta) = 2 \cdot \frac{\left|1 - \frac{1}{2} + 3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Câu 43: [Mức độ 3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. 1 mặt phẳng. **B.** 2 mặt phẳng. **C.** 0 mặt phẳng. **D.** Vô số mặt phẳng.

Lời giải

Gọi phương trình mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(P): Ax + By + Cz + D = 0 (A^2 + B^2 + C^2 > 0)$

Theo đề bài, mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, B nên ta có:

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ 2C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2C \\ D = -2C \end{cases}$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $2Cx + By + Cz - 2C = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1, 1, 0)$ và bán kính $R = 1$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên: $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2C + B - 2C|}{\sqrt{5C^2 + B^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{|B|}{\sqrt{5C^2 + B^2}} = 1$
 $\Leftrightarrow B^2 = 5C^2 + B^2 \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra: $A = D = 0 \Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $y = 0$.

Vậy: Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Câu 44: [Mức độ 3] Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 1; 0)$, $B(3; -1; 2)$, $C(-1; 6; 7)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (Oxz) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất.

- A. $M(3; 0; -1)$ B. $M(1; 0; 0)$ C. $M(1; 0; 3)$ D. $M(1; 1; 3)$

Lời giải

Cách 1

$$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$$

$$MA^2 = (x-1)^2 + 1 + z^2, \quad MB^2 = (x-3)^2 + 1 + (z-2)^2, \quad MC^2 = (x+1)^2 + 36 + (z-7)^2$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3x^2 - 6x + 3z^2 - 18z + 102 = 3(x-1)^2 + 3(z-3)^2 + 72 \geq 72$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=1, z=3$. Vậy $M(1; 0; 3)$.

Cách 2

$$\Rightarrow \begin{cases} G(1; 2; 3) \\ GA + GB + GC = 0 \end{cases}$$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC

$$\text{Ta có: } MA^2 + MB^2 + MC^2 = (MG + GA)^2 + (MG + GB)^2 + (MG + GC)^2$$

$$= 3MG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2) + 2MG(GA + GB + GC)$$

$$= 3MG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

$MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất

$\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxz) . Vậy $M(1; 0; 3)$.

Câu 45: [Mức độ 3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$;

$d': \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - y - z = 0$. Phương trình nào sau đây là phương trình

của đường thẳng Δ song song với (P) , cắt d và d' lần lượt tại M và N mà $MN = \sqrt{2}$.

A. $\Delta: \frac{7x-4}{3} = \frac{7y+4}{8} = \frac{7z+8}{-5}$

B. $\Delta: \frac{7x-4}{3} = \frac{7y-4}{8} = \frac{7z+8}{-5}$

C. $\Delta: \frac{7x-1}{3} = \frac{7y-4}{8} = \frac{7z+3}{-5}$.

D. $\Delta: \frac{7x-1}{3} = \frac{7y+4}{8} = \frac{7z+8}{-5}$.

Lời giải

Gọi $M(t; t; -2t)$ và $N(-1-2t'; t'; -1-t')$. Suy ra $MN = (-1-2t'-t; t'-t; -1-t'+2t)$.

Mặt phẳng (P) nhận $n = (1; -1; -1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do đường thẳng Δ song song với (P) nên $MN \cdot n = 0$
 $\Leftrightarrow -1-2t'-t-t'+t+1+t'-2t = 0 \Leftrightarrow t = -t'$.

Khi đó $MN = (-1+t; -2t; -1+3t) \Rightarrow MN = \sqrt{14t^2 - 8t + 2}$.

$$MN = \sqrt{2} \Leftrightarrow 14t^2 - 8t + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Với $t = 0$ thì $MN = (-1; 0; -1)$ (loại do không có phương án chọn).

Với $t = \frac{4}{7}$ thì $MN = \left(-\frac{3}{7}; -\frac{8}{7}; \frac{5}{7}\right) = -\frac{1}{7}(3; 8; -5)$ và $M\left(\frac{4}{7}; \frac{4}{7}; -\frac{8}{7}\right)$.

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x - \frac{4}{7}}{3} = \frac{y - \frac{4}{7}}{8} = \frac{z + \frac{8}{7}}{-5}$ hay $\Delta: \frac{7x-4}{3} = \frac{7y-4}{8} = \frac{7z+8}{-5}$.

Câu 46: [Mức độ 4] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$$x^6 \cdot [f'(x)]^3 + 64 \cdot [f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(1) = \frac{37}{64}. \text{ Tính tích phân } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{229}{256}$

B. $\frac{-229}{256}$

C. $\frac{256}{229}$

D. $-\frac{256}{229}$

Lời giải

Ta có: $x^6 \cdot [f'(x)]^3 + 64 \cdot [f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x) - 1]^4} = -\frac{64}{x^6} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x) - 1} \cdot [f(x) - 1]} = -\frac{4}{x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x) - 1} \cdot [f(x) - 1]} dx = \int -\frac{4}{x^2} dx (*)$$

Bằng phép đổi biến, $t = \sqrt[3]{f(x) - 1} \Rightarrow t^3 = f(x) - 1 \Rightarrow 3t^2 dt = f'(x) dx$

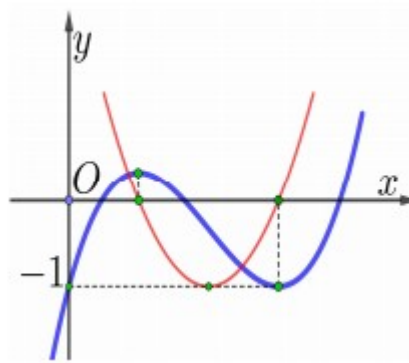
$$(*) \Rightarrow \frac{-3}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} = \frac{4}{x} + C$$

, thay $x = 1$ ta được $\frac{-3}{\sqrt[3]{f(1) - 1}} = \frac{4}{1} + C$

Vì $f(1) = \frac{37}{64} \Rightarrow C = 0$, khi đó $\sqrt[3]{f(x)-1} = \frac{-3x}{4} \Rightarrow f(x) = \left(\frac{-3x}{4}\right)^3 + 1$.

Suy ra $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{-27x^3}{64} + 1\right)dx = \frac{229}{256}$.

Câu 47: [Mức độ 4] Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx - 1$ và $y = g(x) = cx^2 - 4x + d$ có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$.



A. $S = \frac{9}{4}$

B. $\frac{27}{4}$

C. 3.

D. 9.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3ax^2 - 4x + b$ là hàm số bậc hai, cùng bậc với $g(x)$.

Mà từ đồ thị ta có hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm là nghiệm pt $g(x) = 0$ nên $f'(x) = k \cdot g(x), \forall x \in \mathbb{R} (k \neq 0)$.

$$\Leftrightarrow 3ax^2 - 4x + b = k(cx^2 - 4x + d), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = kc \\ -4 = -4k \\ b = kd \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ 3a = c \\ b = d \end{cases} \quad (1)$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ có tung độ đỉnh bằng -1 nên $g\left(\frac{2}{c}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{4}{c} - \frac{8}{c} + d = -1 \Leftrightarrow d = \frac{4}{c} - 1$.
(2)

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$:

$$ax^3 - 2x^2 + bx - 1 = cx^2 - 4x + d \Leftrightarrow ax^3 - (2+c)x^2 + (b+4)x - 1 - d = 0 \quad (*)$$

Theo giả thiết, phương trình (*) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ nên theo định lý Viet cho phương trình bậc ba, ta có $\frac{2+c}{a} = 9 \Leftrightarrow 2+c = 9a$. (3)

$$\begin{cases} 3a = c \\ b = d \\ d = \frac{4}{c} - 1 \\ 2+c = 9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = c \\ b = d \\ d = \frac{4}{c} - 1 \\ 2+c = 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 3 \\ c = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hpt:

Với các giá trị trên thay vào (*) thì thỏa mãn phương trình có 3 nghiệm phân biệt có tổng bằng 9.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Xét phương trình

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $\begin{cases} y = f(x) \\ y = -1 \end{cases}$ là:

$$S = \int_0^3 \left| \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right| dx = \left| \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right) dx \right| = \left| \left(\frac{x^4}{12} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) \right|_0^3 = \frac{9}{4}.$$

Câu 48: [Mức độ 4] Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 7i| = 2$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - 2i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Giá trị $|z - \sqrt{2} - \sqrt{2}i|$ bằng

A. $\sqrt{58}$ **B.** $\sqrt{41}$ **C.** $\sqrt{38}$ **D.** $\sqrt{61}$

Lời giải

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn của số phức z . Gọi $A(-2; 0), B(0; 2)$ và $J(-1; 1)$ (J là trung điểm của AB)

Phương trình đường thẳng $AB: x - y + 2 = 0$

$$\text{Ta có } |z - 3 - 7i| = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 4 \quad (C)$$

Suy ra điểm M thuộc vào đường tròn tâm $I(3; 7)$, bán kính $R = 2$.

Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng AB , phương trình đường thẳng $IH: x + y - 10 = 0 \Rightarrow$ Tọa độ của điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow H(4; 6)$$

Từ giả thiết: $P = |z+2|^2 - |z-2i|^2 = MA^2 - MB^2 = MA^2 - MB^2 = (MA - MB)(MA + MB)$

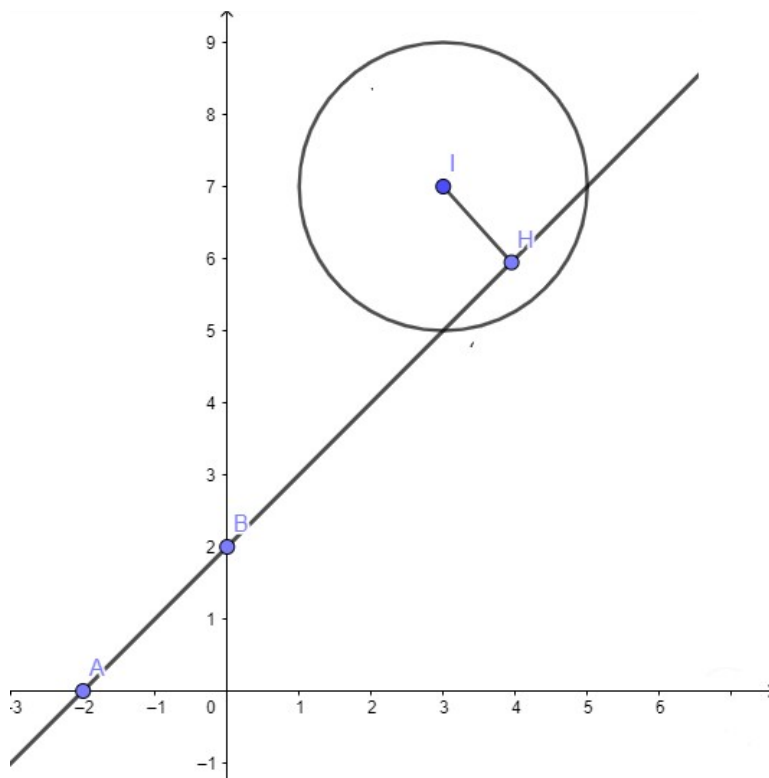
$$= 2BA.MJ = 2.BA(MI + IH + HJ) = 2BA.MI + 2BA.HJ + 2BA.IH$$

Có: $BA = (-2; -2); HJ = (-5; -5) \Rightarrow BA.HJ = (-2).(-5) + (-2).(-5) = 20$

$$BA.IH = 0 \quad (\forall IH \perp AB)$$

Suy ra: $P = 2BAMI.\cos\alpha + 40 \leq 2.BAMI + 40$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \cos\alpha = 1$.

Suy ra điểm M là giao của đường thẳng Δ qua I song song với BA cắt đường tròn (C)



Phương trình đường thẳng $\Delta: x - y + 4 = 0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ (x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{2}; y = 7 + \sqrt{2} \Rightarrow |z - \sqrt{2} - \sqrt{2}i| = \sqrt{58} \\ x = 3 - \sqrt{2}; y = 7 - \sqrt{2} \Rightarrow |z - \sqrt{2} - \sqrt{2}i| = \sqrt{74 - 40\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vậy: Khi $P = |z+2|^2 - |z-2i|^2$ đạt giá trị lớn nhất thì $|z - \sqrt{2} - \sqrt{2}i| = \sqrt{58}$.

Câu 49: [Mức độ 4] Trong không gian (Oxyz) cho điểm $A(2, 2, 1)$ và điểm $B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Gọi Δ là đường phân giác trong của góc A của tam giác OAB . Điểm $M(a; b; c)$ trên Δ sao cho $MO + OB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hỏi $T = 7a + 8b + 2021c$ có giá trị bằng

A. 2019.

B. 2020.

C. 2017.

D. 2018!

Lời giải

Gọi C là chân đường phân giác trong tại góc A .

$$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3; \quad AB = \sqrt{\left(-\frac{8}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + (1-1)^2} = 5$$

Ta có $\frac{CO}{CB} = \frac{AO}{AB} = \frac{3}{5}$. Vậy $CO = -\frac{3}{5}CB \Leftrightarrow 5CO + 3CB = 0 \Rightarrow C = \left(-1; \frac{1}{2}; 1\right)$.

Có $AC = \left(-3; -\frac{3}{2}; 0\right)$ nên chọn vtcp của Δ là $u(2; 1; 0)$

Vậy phương trình đường phân giác trong xuất phát từ đỉnh A là:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 \end{cases}$$

Để thấy O, B nằm khác phía so với Δ nên $T = OM + OB$ nhỏ nhất khi O, M, B thẳng hàng hay $M = OB \cap \Delta$.

Suy ra $M \equiv C$. Vậy $M \left(-1; \frac{1}{2}; 1\right)$ nên $T = 7a + 8b + 2021c = -7 + 4 + 2021 = 2018$.

Câu 50: [Mức độ 4] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $M(2; -1; 1)$, song song với mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 2021 = 0$ sao cho tổng khoảng cách từ các điểm $A(2; -2; 0), B(1; 0; 3)$ tới đường thẳng đó đạt giá trị nhỏ nhất. Vectơ chỉ phương của d là $u_d = (a; b; c)$ (trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 4$). Tổng $a^2 + b^2 + c^2$ bằng:

A. 2020.

B. 30.

C. 100.

D. 120

Lời giải

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $M(2; -1; 1)$ và song song với (P) , ta có $(Q): x - 2y - z - 3 = 0$.

Khi đó $d \subset (Q)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng (Q) .

Ta có $d(A; d) + d(B; d) \geq d(A; (Q)) + d(B; (Q)) = AH + BK$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng d đi qua hai điểm H, K . Khi đó $u_d = kHK$ (với $k \neq 0$).

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (Q) , khi đó phương trình của

đường thẳng d_1 là
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = -t \end{cases}$$
.

$$H = d_1 \cap (Q) \Rightarrow 2 + t - 2(-2 - 2t) - (-t) - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1}{2} \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}; -1; \frac{1}{2}\right).$$

Vì

Gọi d_2 là đường thẳng đi qua B và vuông góc với mặt phẳng (Q) , khi đó phương trình của

$$\text{đường thẳng } d_2 \text{ là } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 - t \end{cases}.$$

$$K = d_2 \cap (Q) \Rightarrow 1 + t - 2(-2t) - (3 - t) - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{6} \Rightarrow K\left(\frac{11}{6}; \frac{-10}{6}; \frac{13}{6}\right).$$

Vì

$$\text{Vậy } HK = \left(\frac{1}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{5}{3}\right) \Rightarrow u_d = kHK = \left(\frac{k}{3}; \frac{-2k}{3}; \frac{5k}{3}\right) \Rightarrow a = \frac{k}{3}; b = \frac{-2k}{3}; c = \frac{5k}{3}.$$

$$\text{Mà } a + b + c = 4 \Rightarrow \frac{k}{3} + \frac{-2k}{3} + \frac{5k}{3} = 4 \Rightarrow k = 6.$$

$$\text{Vậy } a = 2; b = -4; c = 10 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 120.$$

----- **HẾT** -----