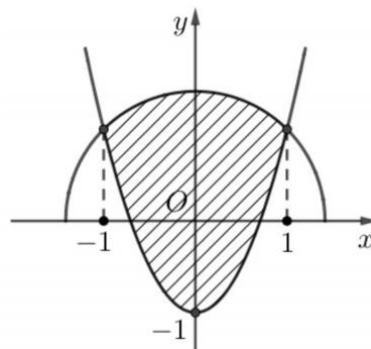


DẠNG 10.1**Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng**

Câu 1: Cho đường cong $(C): y = x^3$. Xét điểm A có hoành độ dương thuộc (C) , tiếp tuyến của (C) tại A tạo với (C) một hình phẳng có diện tích bằng 27. Hoành độ điểm A thuộc khoảng nào dưới đây?

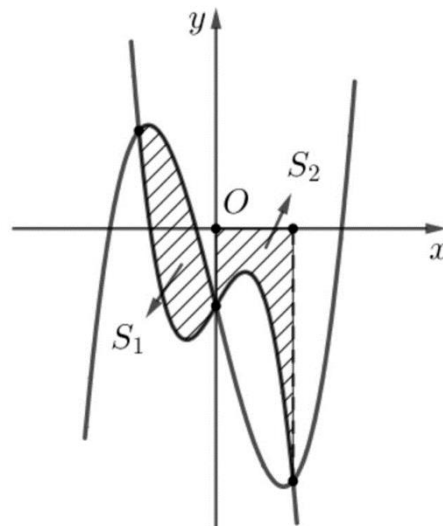
- A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

Câu 2: Hình giới hạn bởi một đường parabol và một nửa đường tròn tâm O bán kính bằng $\sqrt{2}$ (**phần gạch sọc**) trong hình vẽ bên có diện tích bằng



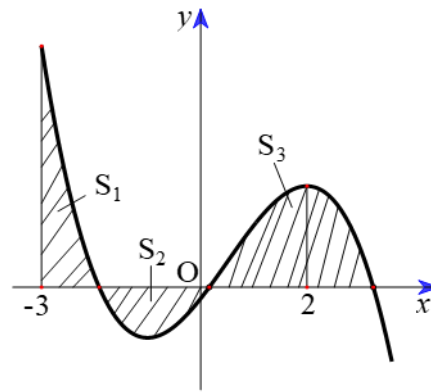
- A. $\frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}$. B. $\frac{7}{3} + \frac{\pi}{2}$. C. $\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}$. D. $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}$

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx + c$, $g(x) = bx^3 + ax + c$, ($a > 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S_1 , S_2 là diện tích hình phẳng được gạch trong hình vẽ. Khi $S_1 + S_2 = 3$ thì $\int_0^1 f(x)dx$ bằng:



- A. 3. B. -3. C. 6. D. -6.

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các hình phẳng được gạch trong hình. Khi $S_1 = S_3 = 3, S_2 = 2$ thì

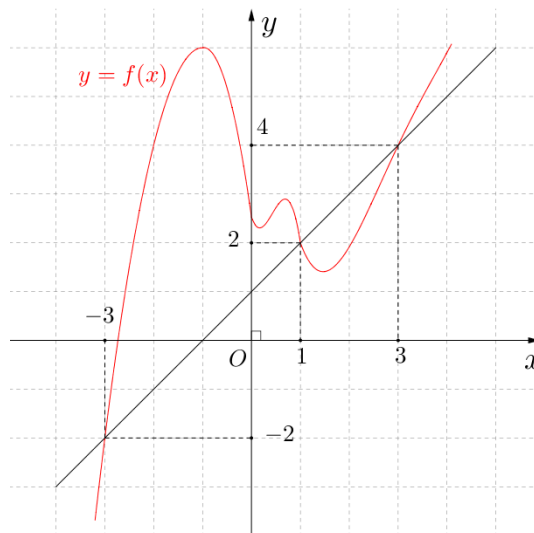
$$\int_0^1 f(5x-3)dx \text{ bằng}$$

- A. 40. B. 20. C. $\frac{8}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn với đồ thị hai hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = 3 - x$ bằng

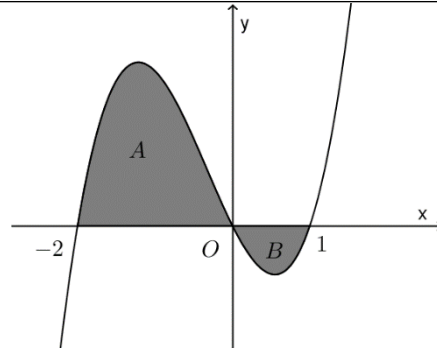
- A. $\frac{7}{3}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{13}{6}$. D. 2.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đường thẳng $y = x + 1, x = -3, x = 1$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đường thẳng $y = x + 1, x = 1, x = 3$. Tính $\int_{-3}^3 f(x)dx$ theo S_1 và S_2 .



- A. $6 - S_1 + S_2$. B. $6 + S_1 - S_2$. C. $10 + S_1 - S_2$. D. $10 - S_1 + S_2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và gọi $A; B$ là hai hình phẳng được gạch trong hình bên dưới lần lượt có diện tích bằng 14 và 5.



Giá trị của $I = \int_{-1}^0 f(3x+1)dx$ bằng:

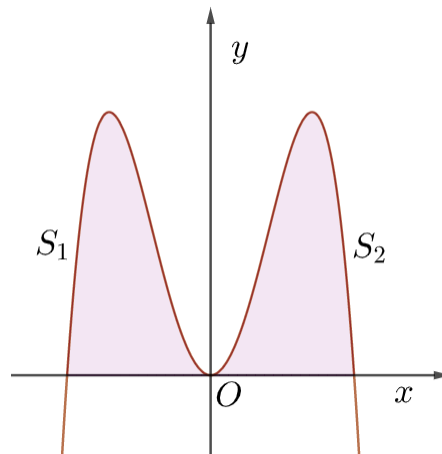
A. 9.

B. $\frac{19}{3}$.

C. 27.

D. 3.

Câu 8: Cho hàm số $y = -x^4 + mx^2$ có đồ thị (C_m) với tham số $m > 0$ được cho như hình vẽ. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt như hình vẽ. Gọi S_1 và S_2 là diện tích các miền được giới hạn bởi đồ thị (C_m) và trục Ox . Biết m_0 là giá trị để $S_1 + S_2 = \frac{10\sqrt{5}}{3}$, hỏi m_0 thuộc khoảng nào sau đây?



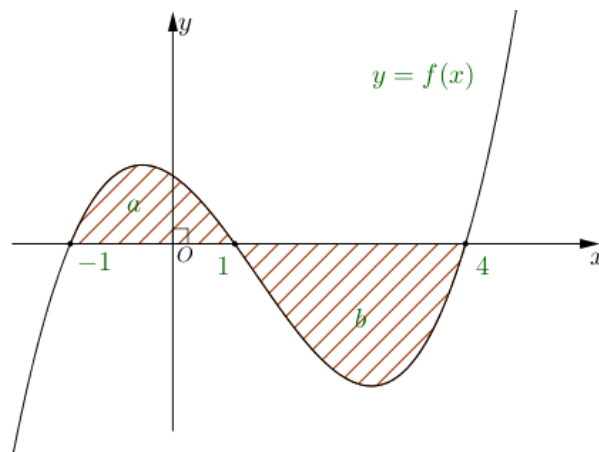
A. (15;30).

B. (5;10).

C. (0;3).

D. (2;6).

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích các miền phẳng A , B lần lượt bằng a và b . Tính

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(5 \sin x - 1) dx.$$

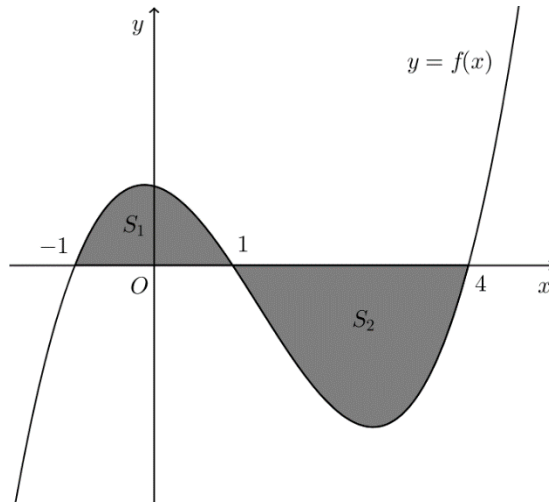
A. $\frac{a+b}{5}.$

B. $\frac{-a-b}{5}.$

C. $\frac{a-b}{5}.$

D. $\frac{b-a}{5}.$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng trong hình, biết $S_1 = 3$ và $S_2 = 7$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(5 \sin x - 1) dx$ bằng:



A. $-\frac{4}{5}.$

B. $\frac{4}{5}.$

C. $-2.$

D. $2.$

Câu 11: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx$ với $m \neq 0$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để diện tích hình phẳng (H) là số nhỏ hơn 20 (đơn vị diện tích).

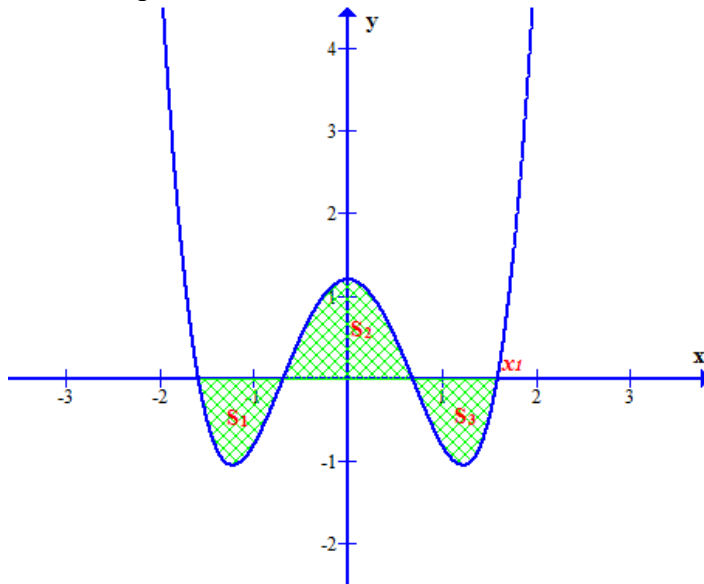
A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

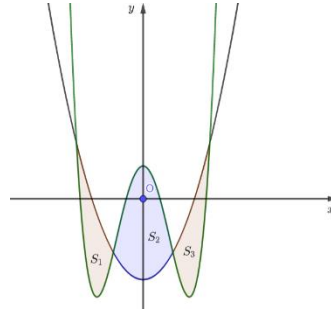
Câu 12: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

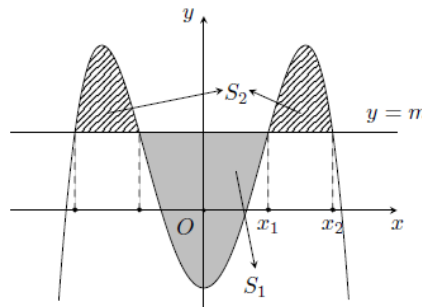
- A. $m = \frac{5}{4}$. B. $m = -\frac{5}{2}$. C. $m = -\frac{5}{4}$. D. $m = \frac{5}{2}$.

Câu 13: Cho hàm số bậc bốn $y = x^4 - 4x^2 + 1$ và parabol $y = x^2 - k$, với $k \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của phần hình phẳng được tô đậm tương ứng trong hình vẽ. Khi $S_2 = S_1 + S_3$ thì k thuộc khoảng nào dưới đây?



- A. $\left(0; \frac{3}{7}\right)$. B. $\left(\frac{9}{5}; \frac{11}{4}\right)$. C. $\left(\frac{11}{4}; 3\right)$. D. $\left(\frac{3}{7}; \frac{9}{5}\right)$.

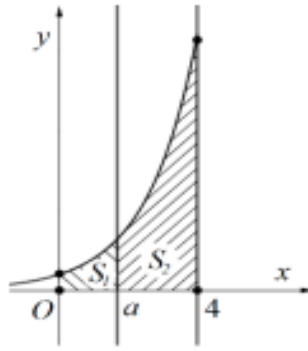
Câu 14: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại bốn điểm phân biệt (như hình vẽ) với $x_2 = 2x_1$.



Gọi S_1 là phần diện tích hình phẳng nằm dưới đường thẳng $y = m$, giới hạn bởi đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số đã cho. Gọi S_2 là phần diện tích hình phẳng nằm trên đường thẳng $y = m$, giới hạn bởi đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số đã cho. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

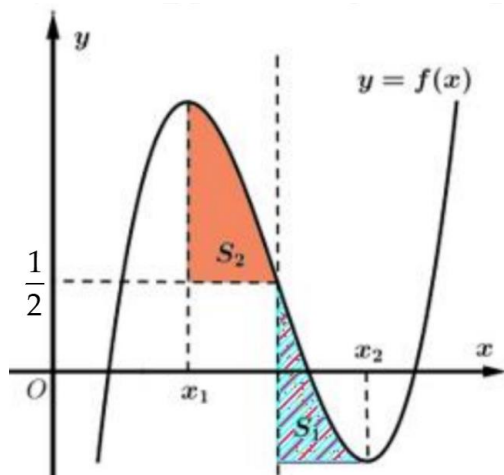
- A. $\frac{19}{8}$. B. $\frac{30}{11}$. C. $\frac{19}{11}$. D. $\frac{30}{19}$.

Câu 15: Cho hình thang cong (**H**) giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$. Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) chia hình (**H**) thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm a để $S_2 = 4S_1$.



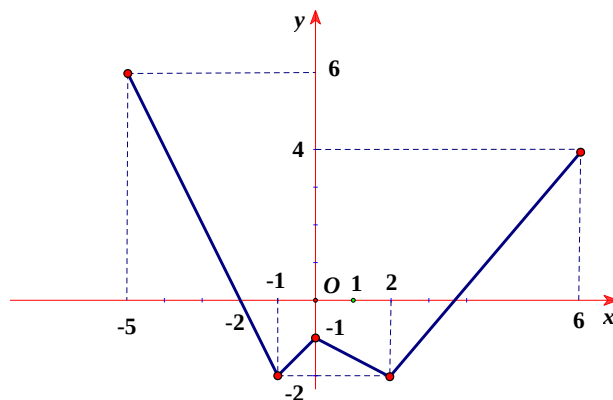
- A. $a = 3$. B. $a = \log_2 13$. C. $a = 2$. D. $a = \log_2 \frac{16}{5}$.

Câu 16: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 1$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



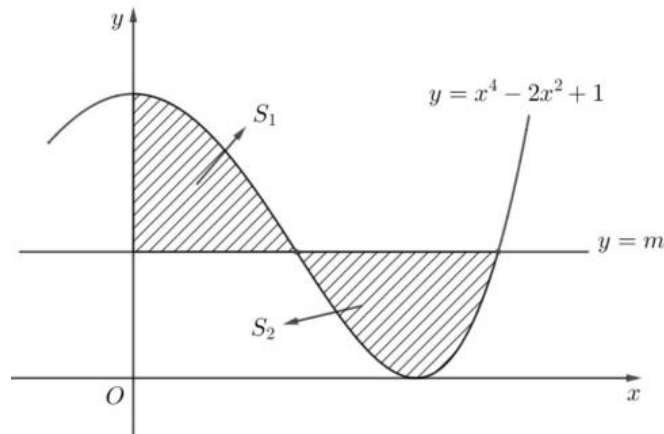
- A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{5}{3}$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5; 6]$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-5}^0 f(x) dx$ bằng.



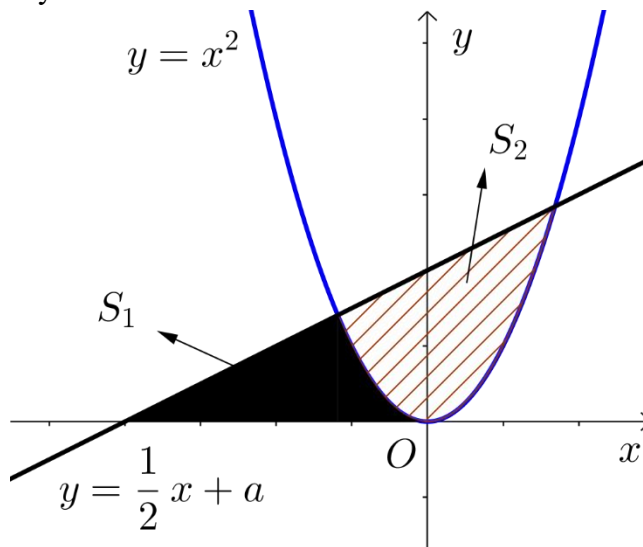
- A. $\frac{25}{2}$. B. $\frac{19}{2}$. C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{13}{2}$.

Câu 18: Đường thẳng $y = m$ ($0 < m < 1$) cắt đường cong $y = x^4 - 2x^2 + 1$ tại hai điểm phân biệt thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy và chia thành hai hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ. Biết $S_1 = S_2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



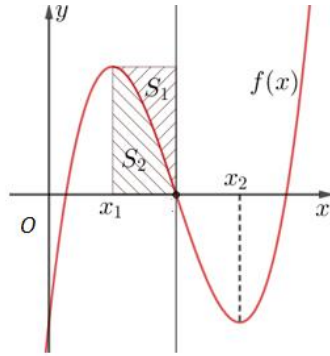
- A. $m \in \left(0; \frac{2}{5}\right)$. B. $m \in \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$. C. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right)$. D. $m \in \left(\frac{3}{5}; 1\right)$

Câu 19: Cho đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + a$ và parabol $y = x^2$ (a là tham số thực). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được tô đậm và gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



- A. $\left(\frac{7}{2}; 4\right)$. B. $\left(-\frac{1}{16}; \frac{5}{2}\right)$. C. $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$. D. $\left(3; \frac{7}{2}\right)$.

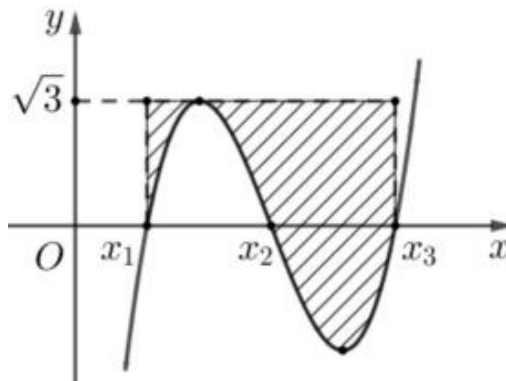
Câu 20: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ



Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai hình phẳng được gạch trong hình vẽ. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

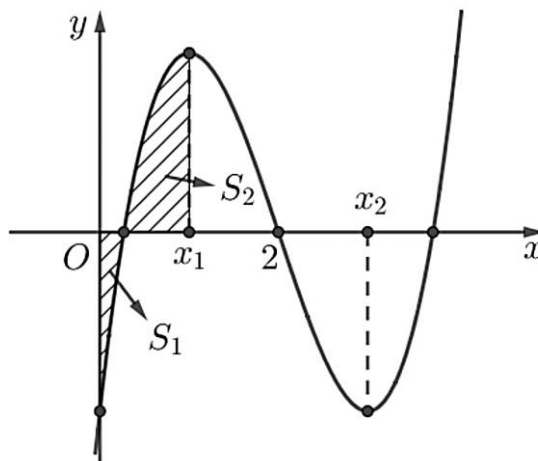
- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{5}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 21: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2\sqrt{3}$ và x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ bằng



- A. $6\sqrt{3}$. B. $4\sqrt{6}$. C. $4\sqrt{3}$. D. 6.

Câu 22: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 sao cho $x_2 - x_1 = 2$ và $f''(2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:



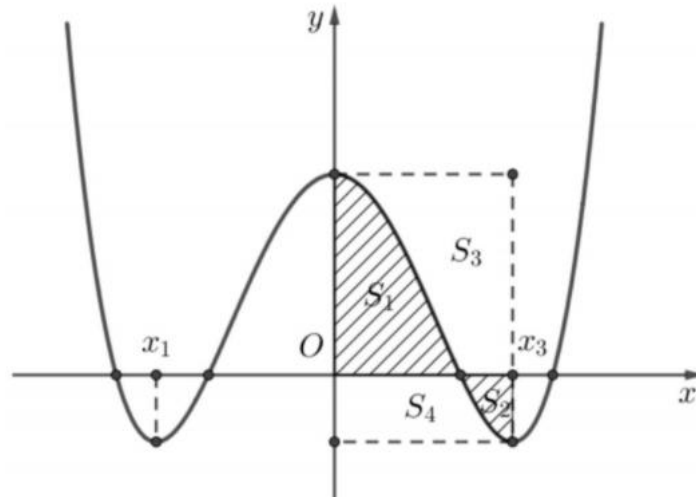
A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{3}{8}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích các hình phẳng trong hình vẽ bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?



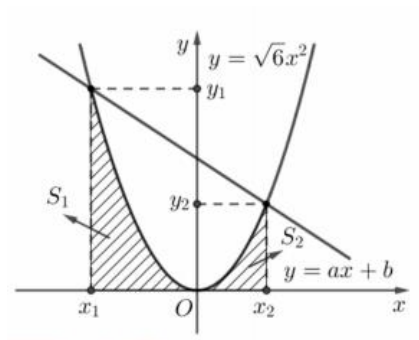
A. 0,65.

B. 0,7.

C. 0,55.

D. 0,6.

Câu 24: Biết rằng đường thẳng $d: ax + b$ cắt parabol $y = \sqrt{6}x^2$ tại hai điểm $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ sao cho $y_1 + y_2 = 20\sqrt{6}$ và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (P) bằng $36\sqrt{6}$ gọi $S_1; S_2$ là diện tích hình phẳng được giới hạn trong hình. Tổng $S_1 + S_2$



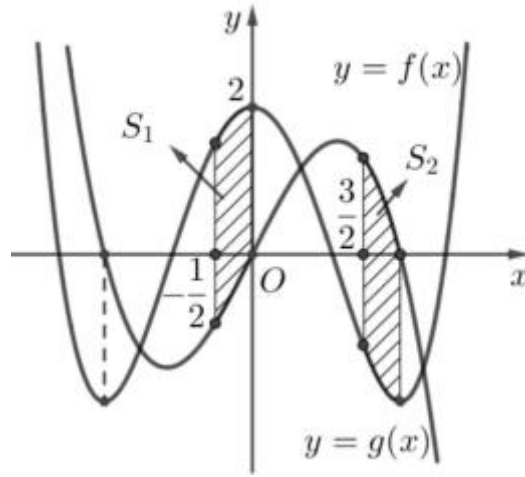
A. $30\sqrt{6}$.

B. $27\sqrt{6}$.

C. $18\sqrt{6}$.

D. $24\sqrt{6}$.

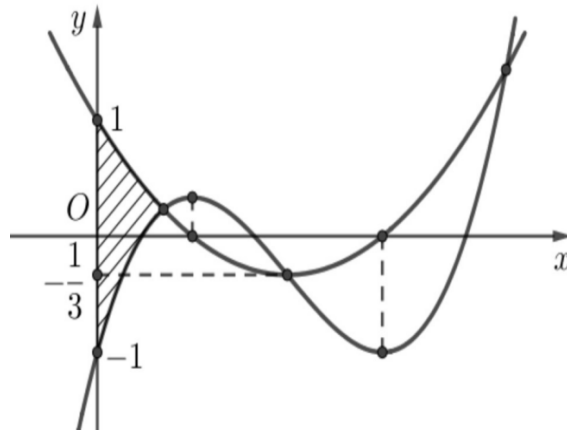
Câu 25: Cho hàm số $f(x) = ax^4 - 2x^2 + 2; g(x) = bx^3 + cx^2 + 2x$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Gọi S_1, S_2 là diện tích các hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ, khi $S_1 = \frac{557}{480}$ thì S_2 bằng

- A. $\frac{299}{240}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{557}{480}$. D. $\frac{301}{240}$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$; $g(x) = mx^2 + nx + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên



Biết rằng $f''(2) = 0$ và hai đồ thị hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 7$. Diện tích của hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(0; \frac{2}{5}\right)$. B. $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right)$. D. $\left(\frac{3}{5}; 1\right)$.

Câu 27: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1$; $g(x) = cx^2 + 4x + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	0	1	$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$			$-\infty$

Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = g(x); x = 1; x = 2$ bằng

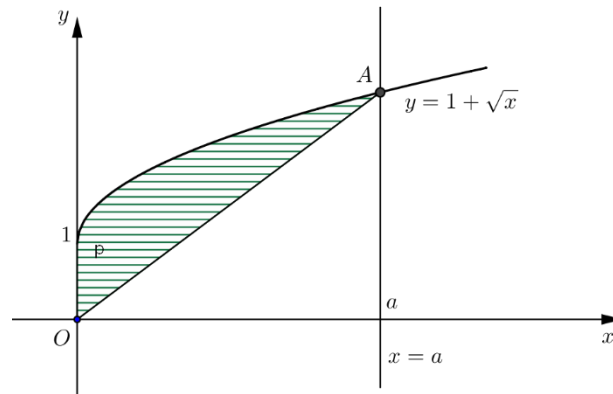
A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 28: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét đồ thị $(P): y = 1 + \sqrt{x}$ và đường thẳng $d: x = a$ cắt nhau tại điểm A .



Kí hiệu S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường Oy , (P) và đường thẳng OA ; S' là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường Oy , (P) , Ox và d . Giả sử rằng $S = \frac{1}{3}S'$, hỏi giá trị a thuộc khoảng nào sau đây?

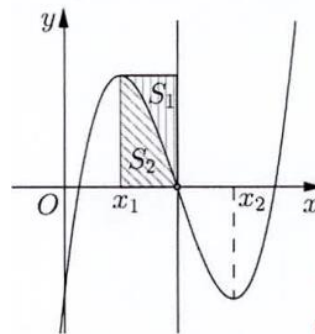
A. $(0; 4)$.

B. $(4; 8)$.

C. $(8; 16)$.

D. $(16; +\infty)$.

Câu 29: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \frac{\ln \sin x + \cos x}{\sin^2 x}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$ là $S = \frac{\pi}{a} + b \ln \sqrt{c}$ với $a \in \mathbb{Z}$ và b, c là các số nguyên tố. Khi đó $a + b + c$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 31: Trong mặt phẳng Oxy , xét tứ giác có diện tích bằng $\ln \frac{91}{90}$; các đỉnh có hoành độ là các số nguyên liên tiếp và nằm trên đồ thị của hàm số $y = \ln x$. Hãy tính tổng các chữ số của hoành độ đỉnh xa gốc tọa độ nhất:

A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 8.

Câu 32: Cho hàm số $y = \sqrt{x}$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ dương. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành và đường thẳng đi qua M và vuông góc với trục hoành; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường thẳng OM . Biết $\frac{S_2}{S_1} = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản), giá trị của $a + b$ bằng

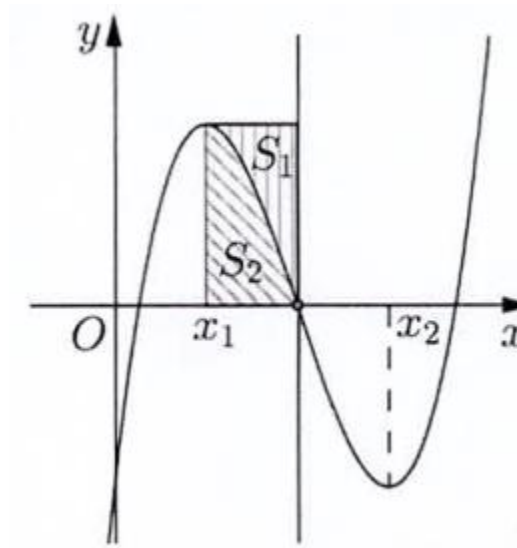
A. 6.

B. 5.

C. 19.

D. 21.

Câu 33: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



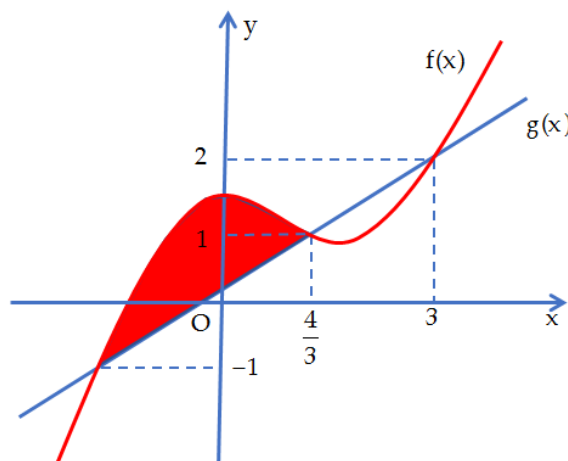
A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Câu 34: Cho $f(x), g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ. Biết diện tích hình S (được tô màu) bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.



A. $\frac{61}{48}$.

B. $\frac{34}{27}$.

C. $\frac{17}{15}$.

D. $\frac{43}{35}$.

Câu 35. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x) = \ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		$\ln 10$	$\ln 42$	$\ln 37$	

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(38; 39)$.

B. $(25; 26)$.

C. $(28; 29)$.

D. $(35; 36)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho đường cong $(C): y = x^3$. Xét điểm A có hoành độ dương thuộc (C) , tiếp tuyến của (C) tại A tạo với (C) một hình phẳng có diện tích bằng 27. Hoành độ điểm A thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2$.

Có $A \in (C) \Rightarrow A(a; a^3), a > 0$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại A là $d: y = 3a^2(x - a) + a^3$ hay $d: y = 3a^2(x - a) + a^3$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$x^3 = 3a^2(x - a) + a^3 \Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -2a \end{cases}.$$

Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi tiếp tuyến d và (C) .

$$\text{Ta có } S = 27 \Leftrightarrow \int_{-2a}^a |x^3 - 3a^2(x - a) - a^3| dx = 27$$

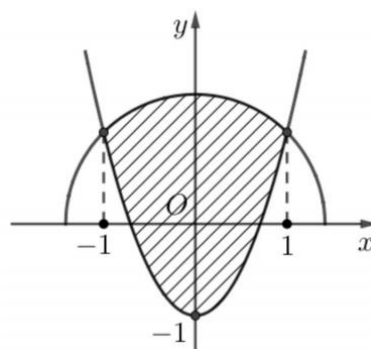
$$\Leftrightarrow \left| \int_{-2a}^a (x^3 - 3a^2x + 2a^3) dx \right| = 27$$

$$\Leftrightarrow \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3a^2x^2}{2} + 2a^3x \right) \right|_{-2a}^a = 27$$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{4}a^4 = 27 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ a = -\sqrt{2} \text{ (ktm } a > 0) \end{cases}.$$

Vậy $a = \sqrt{2}$.

Câu 2: Hình giới hạn bởi một đường parabol và một nửa đường tròn tâm O bán kính bằng $\sqrt{2}$ (**phần gạch sọc**) trong hình vẽ bên có diện tích bằng



A. $\frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{7}{3} + \frac{\pi}{2}$.

C. $\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}$.

D. $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}$.

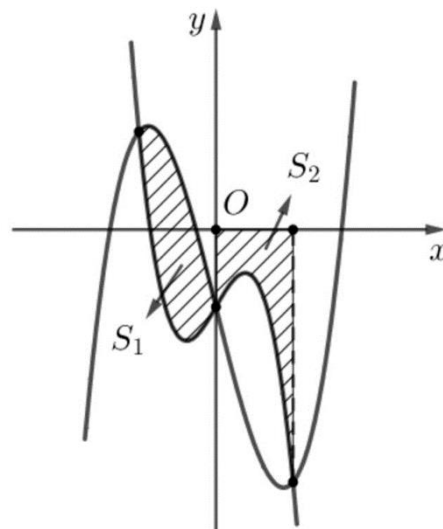
Lời giải**Chọn A**

Phương trình nhánh trên đường tròn $y = \sqrt{2-x^2}$. $x = \pm 1 \Rightarrow y = 1$.

Parabol có đỉnh $(0; -1)$ và đi qua hai điểm $(-1; 1)$, $(1; 1)$ có phương trình: $y = 2x^2 - 1$.

$$S = \int_{-1}^1 \left[\sqrt{2-x^2} - (2x^2 - 1) \right] dx = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx + c$, $g(x) = bx^3 + ax + c$, ($a > 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S_1 , S_2 là diện tích hình phẳng được gạch trong hình vẽ. Khi $S_1 + S_2 = 3$ thì $\int_0^1 f(x)dx$ bằng:



A. 3.

B. -3.

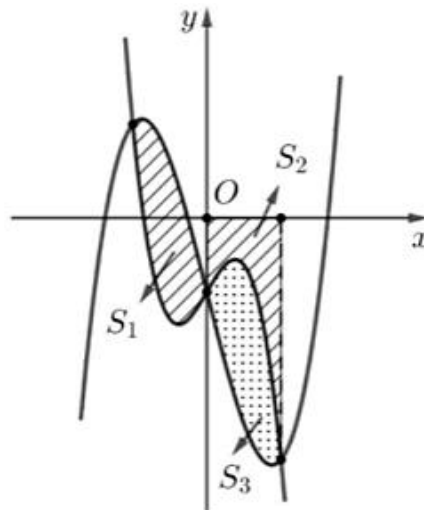
C. 6.

D. -6.

Lời giải**Chọn B**

Phương trình hoành độ giao điểm: $(a-b)x^3 + (b-a)x = 0 \Leftrightarrow (a-b)(x^3 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}$

Ký hiệu S_3 là diện tích hình phẳng như hình vẽ dưới.



Cách 1: Ta có:
$$\begin{cases} S_1 = \int_{-1}^0 (f(x) - g(x))dx = (a-b) \int_{-1}^0 (x^3 - x)dx = \frac{1}{4}(a-b) \\ S_3 = \int_0^1 (g(x) - f(x))dx = (a-b) \int_0^1 -(x^3 - x)dx = \frac{1}{4}(a-b) \end{cases} \Rightarrow S_1 = S_3.$$

Vậy $S_1 + S_2 = 3 \Leftrightarrow S_3 + S_2 = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 (g(x) - f(x))dx + \int_0^1 -g(x)dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = -3.$

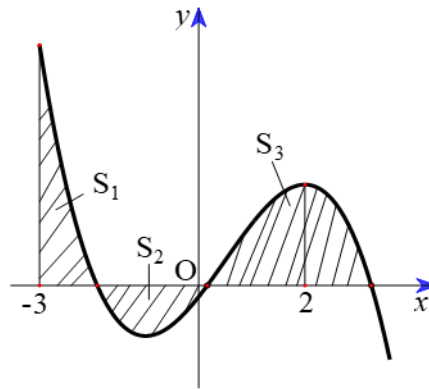
Cách 2: $S_1 = \int_{-1}^0 (f(x) - g(x))dx = (a-b) \int_{-1}^0 (x^3 - x)dx = \frac{1}{4}(a-b);$

$$S_2 = -\int_0^1 g(x)dx = -\int_0^1 (bx^3 + ax + c)dx = -\left(\frac{b}{4} + \frac{a}{2} + c\right)$$

Vi vậy $S_1 + S_2 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(a-b) - \frac{b}{4} - \frac{a}{2} - c = 3 \Leftrightarrow a + 2b + 4c = -12.$

Suy ra $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + bx + c)dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = \frac{a + 2b + 4c}{4} = -3.$

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các hình phẳng được gạch trong hình. Khi $S_1 = S_3 = 3, S_2 = 2$ thì

$\int_0^1 f(5x-3)dx$ bằng

- A. 40. B. 20. C. $\frac{8}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Với $x \in [-3; 2]$ ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$

Xét $I = \int_0^1 f(5x-3)dx$

Đặt $t = 5x-3 \Rightarrow dt = 5dx \Rightarrow dx = \frac{1}{5}dt$

$x = 0 \Rightarrow t = -3; x = 1 \Rightarrow t = 2$

$$I = \frac{1}{5} \int_{-3}^2 f(t)dt = \frac{1}{5} \int_{-3}^2 f(x)dx = \frac{1}{5} \left(\int_{-3}^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx + \int_b^2 f(x)dx \right) = \frac{1}{5} (S_1 - S_2 + S_3) = \frac{4}{5}.$$

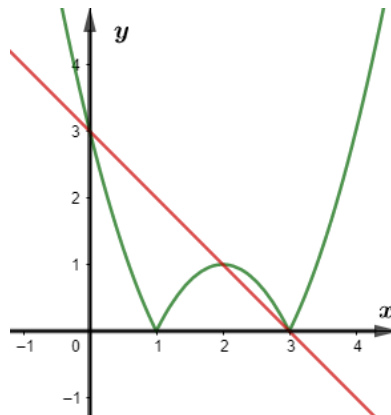
Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = 3 - x$ bằng

A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{13}{6}$.

D. 2.

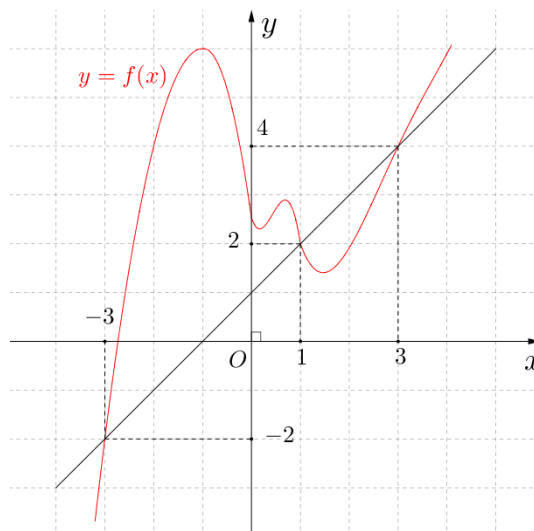
Lời giải**Chọn C**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $|x^2 - 4x + 3| = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là:

$$S = \int_0^2 \left| (3-x) - (x^2 - 4x + 3) \right| dx + \int_2^3 \left| (x^2 - 4x + 3) - (3-x) \right| dx = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đường thẳng $y = x + 1$, $x = -3$, $x = 1$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, đường thẳng $y = x + 1$, $x = 1$, $x = 3$. Tính $\int_{-3}^3 f(x) dx$ theo S_1 và S_2 .



A. $6 - S_1 + S_2$.

B. $6 + S_1 - S_2$.

C. $10 + S_1 - S_2$.

D. $10 - S_1 + S_2$.

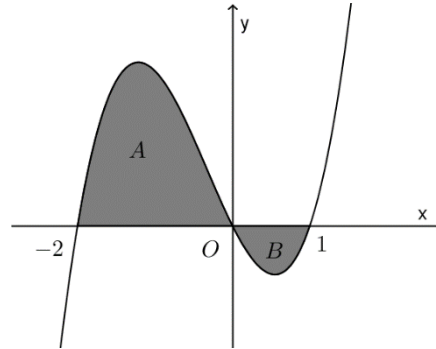
Lời giải**Chọn B**

Ta có $S_1 = \int_{-3}^1 [f(x) - (x+1)] dx = \int_{-3}^1 f(x) dx - \int_{-3}^1 (x+1) dx = \int_{-3}^1 f(x) dx$

$$S_2 = \int_1^3 [(x+1) - f(x)] dx = \int_1^3 (x+1) dx - \int_1^3 f(x) dx = 6 - \int_1^3 f(x) dx \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = 6 - S_2$$

$$\text{Ta có } \int_{-3}^3 f(x) dx = \int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = S_1 + 6 - S_2.$$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và gọi A ; B là hai hình phẳng được gạch trong hình bên dưới lần lượt có diện tích bằng 14 và 5.



Giá trị của $I = \int_{-1}^0 f(3x+1) dx$ bằng:

A. 9.

B. $\frac{19}{3}$.

C. 27.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } I = \int_{-1}^0 f(3x+1) dx$$

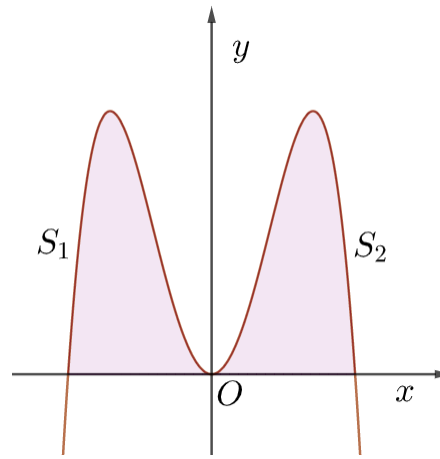
$$\text{Đặt } 3x+1 = t \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow t = -2$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow I = \int_{-2}^1 f(t) \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right] = \frac{1}{3} (S_A - S_B) = 3.$$

Câu 8: Cho hàm số $y = -x^4 + mx^2$ có đồ thị (C_m) với tham số $m > 0$ được cho như hình vẽ. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt như hình vẽ. Gọi S_1 và S_2 là diện tích các miền được giới hạn bởi đồ thị (C_m) và trục Ox . Biết m_0 là giá trị để $S_1 + S_2 = \frac{10\sqrt{5}}{3}$, hỏi m_0 thuộc khoảng nào sau đây?



A. (15;30).

B. (5;10).

C. (0;3).

D. (2;6).

Lời giải**Chọn D**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

$$-x^4 + mx^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases}.$$

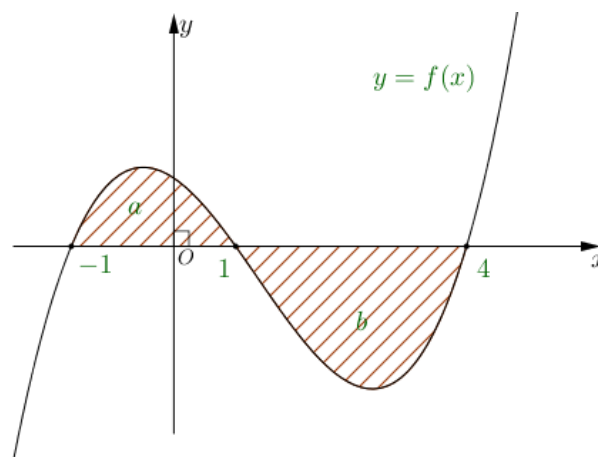
Do đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng nên $S_1 = S_2$.

$$\text{Ta có } S_1 + S_2 = \frac{10\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow 2S_2 = \frac{10\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow S_2 = \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Mà } S_2 = \int_0^{\sqrt{m}} (-x^4 + mx^2) dx = \frac{5\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{mx^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{m}} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(\sqrt{m})^5}{5} + \frac{m(\sqrt{m})^3}{3} = \frac{5\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow m^{\frac{5}{2}} = \frac{25\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow m = \frac{5}{\sqrt[5]{4}} \approx 3,78.$$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích các miền phẳng A, B lần lượt bằng a và b. Tính

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(5 \sin x - 1) dx.$$

A. $\frac{a+b}{5}$.

B. $\frac{-a-b}{5}$.

C. $\frac{a-b}{5}$.

D. $\frac{b-a}{5}$.

Lời giải

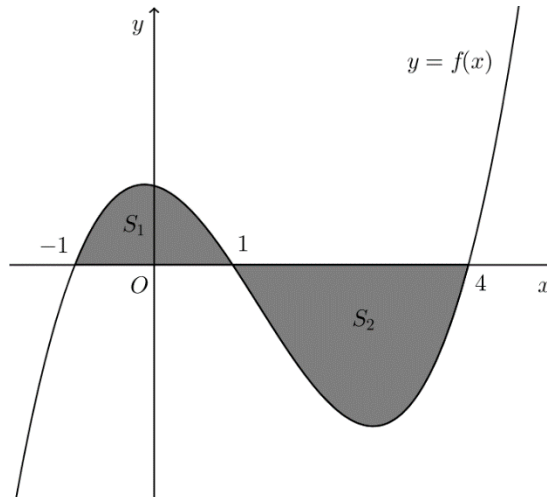
Chọn C

$$\text{Đặt } t = 5 \sin x - 1 \Rightarrow dt = 5 \cos x dx \Leftrightarrow \cos x dx = \frac{dt}{5}$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = -1, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 4.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_{-1}^4 \frac{1}{5} f(t) dt = \frac{1}{5} \left(\int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^4 f(t) dt \right) = \frac{a-b}{5}$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng trong hình, biết $S_1 = 3$ và $S_2 = 7$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(5 \sin x - 1) dx$ bằng:



A. $-\frac{4}{5}$.

B. $\frac{4}{5}$.

C. -2 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(5 \sin x - 1) dx.$$

$$\text{Đặt } 5 \sin x - 1 = t \Rightarrow \cos x dx = \frac{1}{5} dt.$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 4$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^4 f(t) \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int_{-1}^4 f(x) dx = \frac{1}{5} \int_{-1}^1 f(x) dx + \frac{1}{5} \int_1^4 f(x) dx = \frac{1}{5} S_1 + \frac{1}{5} (-S_2) = -\frac{4}{5}.$$

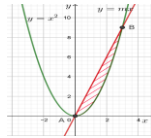
Câu 11: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = mx$ với $m \neq 0$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để diện tích hình phẳng (H) là số nhỏ hơn 20 (đơn vị diện tích).

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải**Chọn B**

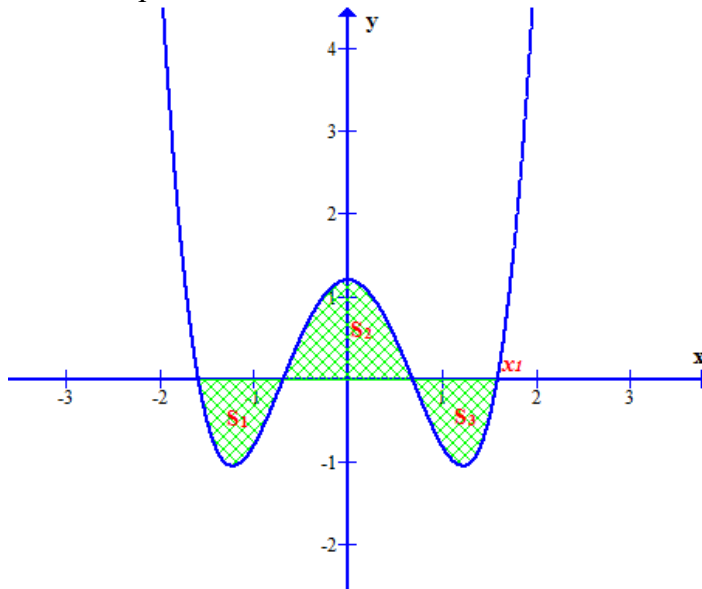
Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = x^2$ và $y = mx$ là: $x^2 = mx$
 $\Leftrightarrow x = 0, x = m$.

Với $m > 0$, diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int_0^m (mx - x^2) dx = \left(\frac{mx^2}{2} - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^m = \frac{m^3}{6}$.

$S < 20 \Leftrightarrow \frac{m^3}{6} < 20 \Leftrightarrow m^3 < 120 \Leftrightarrow m < \sqrt[3]{120}$, mà m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên dương của m cần tìm.

Câu 12: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

A. $m = \frac{5}{4}$.

B. $m = -\frac{5}{2}$.

C. $m = -\frac{5}{4}$.

D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải**Chọn A**

Gọi x_1 là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$, ta có $m = -x_1^4 + 3x_1^2$, (1)

Vì $S_1 + S_3 = S_2$ và $S_1 = S_3$ nên $S_2 = 2S_3$ hay $\int_0^{x_1} f(x) dx = 0$.

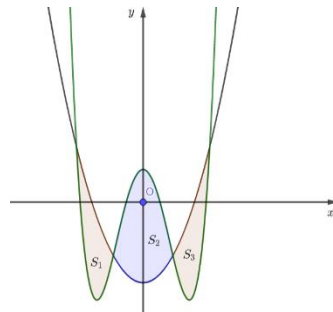
$$\text{Mà } \int_0^{x_1} f(x) dx = \left(\frac{x^5}{5} - x^3 + mx \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{x_1^5}{5} - x_1^3 + mx_1 = x_1 \left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m \right).$$

$$\text{Do đó, } x_1 \left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m = 0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có phương trình } \frac{x_1^4}{5} - x_1^2 - x_1^4 + 3x_1^2 = 0 \Leftrightarrow -4x_1^4 + 10x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } m = -x_1^4 + 3x_1^2 = \frac{5}{4}.$$

Câu 13: Cho hàm số bậc bốn $y = x^4 - 4x^2 + 1$ và parabol $y = x^2 - k$, với $k \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của phần hình phẳng được tô đậm tương ứng trong hình vẽ. Khi $S_2 = S_1 + S_3$ thì k thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(0; \frac{3}{7}\right)$.

B. $\left(\frac{9}{5}; \frac{11}{4}\right)$.

C. $\left(\frac{11}{4}; 3\right)$.

D. $\left(\frac{3}{7}; \frac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Do tính đối xứng của đồ thị hàm số qua trục Oy nên $2S_3 = S_2$.

Giả sử nghiệm lớn nhất của phương trình: $x^4 - 5x^2 + 1 + k = 0$ là a .

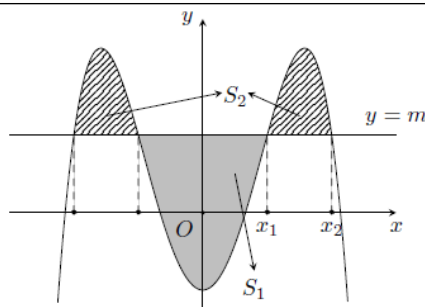
$$\text{Nên: } \int_0^a (x^4 - 5x^2 + 1 + k) dx = 0 \Rightarrow \frac{a^5}{5} - \frac{5a^3}{3} + (1+k)a = 0 \quad (1)$$

Do a là nghiệm của phương trình $x^4 - 5x^2 + 1 + k = 0$ nên:
 $a^4 - 5a^2 + 1 + k = 0 \Rightarrow a^5 - 5a^3 + (1+k)a = 0 \quad (2)$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow -\frac{4}{5}a^5 + \frac{10}{3}a^3 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{25}{6}$$

$$\text{Thay } a^2 = \frac{25}{6} \text{ vào phương trình (1) thì được } k = \frac{89}{36}.$$

Câu 14: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại bốn điểm phân biệt (như hình vẽ) với $x_2 = 2x_1$.



Gọi S_1 là phần diện tích hình phẳng nằm dưới đường thẳng $y = m$, giới hạn bởi đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số đã cho. Gọi S_2 là phần diện tích hình phẳng nằm trên đường thẳng $y = m$, giới hạn bởi đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số đã cho. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{19}{8}$.

B. $\frac{30}{11}$.

C. $\frac{19}{11}$.

D. $\frac{30}{19}$.

Lời giải

Chọn C

Chọn hàm số $y = -x^4 + 5x^2 - 1$ và $m = 3$. Khi đó ta có phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và đường thẳng là $-x^4 + 5x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$.

Khi đó $S_2 = 2 \int_1^2 (-x^4 + 5x^2 - 4) dx = \frac{44}{15}$ và $S_1 = \int_{-1}^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx = \frac{76}{15}$. Suy ra $\frac{S_1}{S_2} = \frac{19}{11}$.

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ và đường thẳng $y = m$ là $\boxed{ax^4 + bx^2 + c' = 0}$ (1), với $c' = c - m$.

Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta có phương trình $\boxed{at^2 + bt + c' = 0}$ (2)

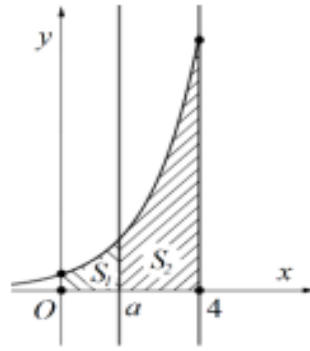
Vì (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_2 = 2x_1$ nên từ (2) ta phải có
$$\begin{cases} t_2 = 4t_1 \\ t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} \\ t_1 t_2 = \frac{c'}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -\frac{b}{5a} \\ ac' = \frac{4b^2}{25} \end{cases}$$

Khi đó $S_1 = -2 \int_0^{x_1} (ax^4 + bx^2 + c') dx = -2 \left(\frac{ax_1^5}{5} + \frac{bx_1^3}{3} + c'x_1 \right) = -\frac{19c'x_1}{15}$

Và $S_2 = 2 \int_{x_1}^{x_2} (ax^4 + bx^2 + c') dx = 2 \left[\left(\frac{ax_2^5}{5} + \frac{bx_2^3}{3} + c'x_2 \right) - \left(\frac{ax_1^5}{5} + \frac{bx_1^3}{3} + c'x_1 \right) \right] = -\frac{11c'x_1}{15}$

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{19}{11}$.

Câu 15: Cho hình thang cong (**H**) giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$. Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) chia hình (**H**) thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm a để $S_2 = 4S_1$.



- A. $a = 3$. B. $a = \log_2 13$. C. $a = 2$. D. $a = \log_2 \frac{16}{5}$.

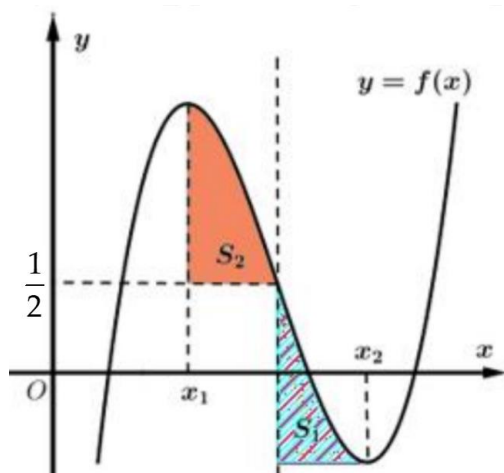
Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } S_1 = \int_0^a 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x \Big|_0^a = \frac{1}{\ln 2} (2^a - 1); \quad S_2 = \int_a^4 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x \Big|_a^4 = \frac{1}{\ln 2} (16 - 2^a).$$

$$S_2 = 4S_1 \Leftrightarrow 16 - 2^a = 4(2^a - 1) \Leftrightarrow 2^a = 4 \Leftrightarrow a = 2.$$

Câu 16: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 1$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



- A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

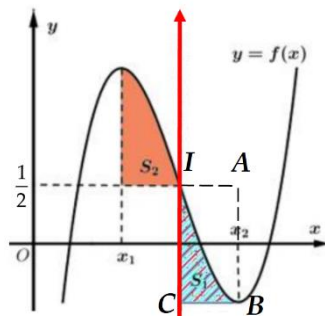
Không mất tính tổng quát, tịnh tiến đồ thị hàm bậc ba $y = f(x)$ sao cho điểm uốn của đồ thị thuộc trục tung $\Rightarrow x_1 + x_2 = 0$. Lại có $x_2 = x_1 + 2$ nên $x_1 = -1, x_2 = 1$.

Theo giả thiết, ta có $f'(x) = k(x-1)(x+1) = k(x^2 - 1)$ với $k > 0$.

$$\text{Suy ra } f(x) = k \left(\frac{x^3}{3} - x \right) + C.$$

$$\text{Do } f(-1) + f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{2k}{3} + C - \frac{2k}{3} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$

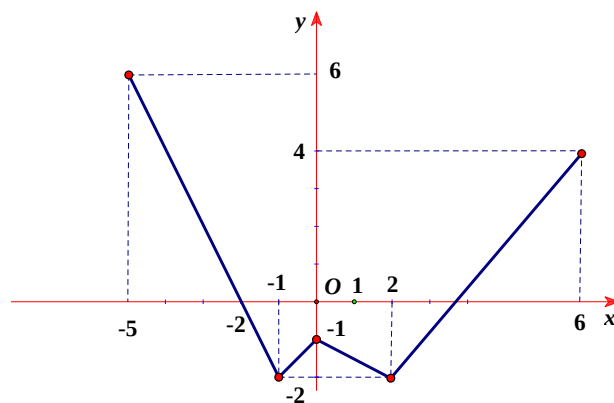
Suy ra $f(x) = k\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + \frac{1}{2}$ và $f(x_2) = f(1) = -\frac{2k}{3} + \frac{1}{2}$.



Ta có $S_2 = \int_{-1}^0 \left[f(x) - \frac{1}{2} \right] dx = \int_{-1}^0 k \left(\frac{x^3}{3} - x \right) dx = \frac{5k}{12}$.

Xét $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{IABC} - S_2}{S_2} = \frac{BC \cdot IC}{S_2} - 1 = \frac{1 \cdot \left| \frac{1}{2} - f(1) \right|}{S_2} - 1 = \frac{\frac{2k}{3}}{\frac{5k}{12}} - 1 = \frac{3}{5} - 1 = \frac{3}{5}$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5; 6]$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-5}^0 f(x) dx$ bằng.



A. $\frac{25}{2}$.

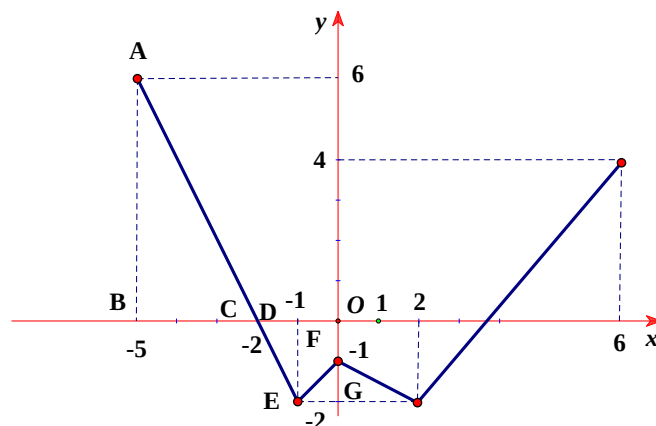
B. $\frac{19}{2}$.

C. $\frac{11}{2}$.

D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9.$$

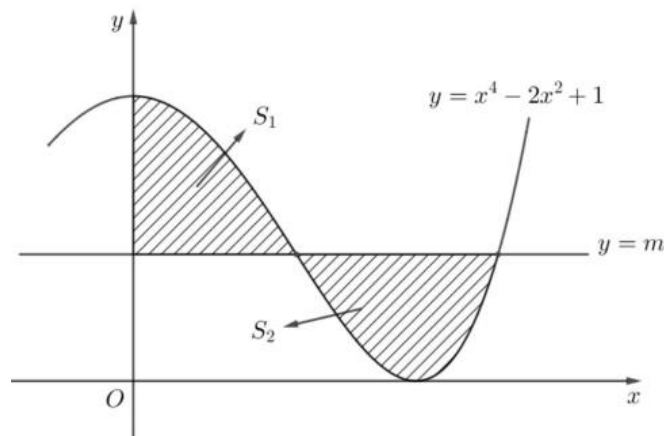
$$S_{DEE} = \frac{1}{2} DF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

$$S_{FEGO} = \frac{1}{2} (GO + EF) DO = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Khi đó

$$\int_{-5}^0 f(x) dx = \int_{-5}^{-2} f(x) dx - \int_{-2}^{-1} f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx = S_{ABC} - S_{DEE} - S_{FEGO} = 9 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{13}{2}.$$

Câu 18: Đường thẳng $y = m$ ($0 < m < 1$) cắt đường cong $y = x^4 - 2x^2 + 1$ tại hai điểm phân biệt thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy và chia thành hai hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ. Biết $S_1 = S_2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $m \in \left(0; \frac{2}{5}\right)$. B. $m \in \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$. C. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right)$. D. $m \in \left(\frac{3}{5}; 1\right)$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm đường cong và đường thẳng $y = m$ ($0 < m < 1$):

$$x^4 - 2x^2 + 1 = m \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = \sqrt{m} \\ x^2 - 1 = -\sqrt{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 + \sqrt{m} \\ x^2 = 1 - \sqrt{m} \end{cases}.$$

Hoành độ giao điểm thuộc cung phần tư thứ nhất là: $x_1 = \sqrt{1 + \sqrt{m}}$ và $x_2 = \sqrt{1 - \sqrt{m}}$.

$$\text{Ta có } S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{1-\sqrt{m}}} (x^4 - 2x^2 + 1 - m) dx = \int_{\sqrt{1-\sqrt{m}}}^{\sqrt{1+\sqrt{m}}} (m - x^4 + 2x^2 - 1) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{1-\sqrt{m}}} (x^4 - 2x^2 + 1 - m) dx = - \int_{\sqrt{1-\sqrt{m}}}^{\sqrt{1+\sqrt{m}}} (x^4 - 2x^2 + 1 - m) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{1-\sqrt{m}}} (x^4 - 2x^2 + 1 - m) dx + \int_{\sqrt{1-\sqrt{m}}}^{\sqrt{1+\sqrt{m}}} (x^4 - 2x^2 + 1 - m) dx = 0$$

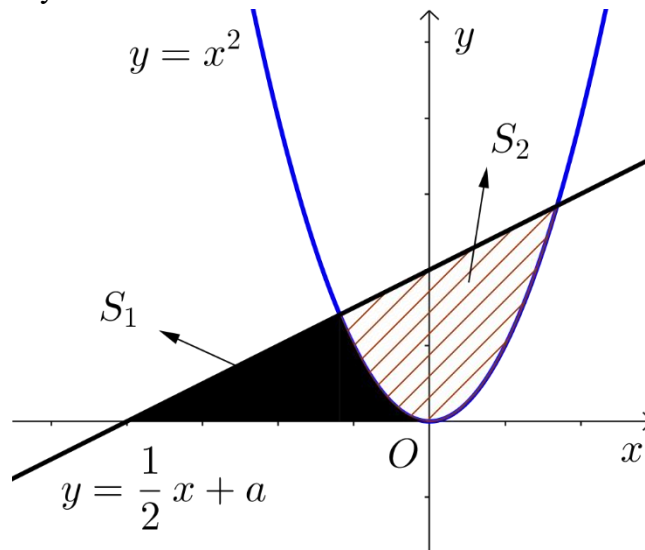
$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{1+\sqrt{m}}} (x^4 - 2x^2 + 1 - m) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x - mx \right) \Big|_0^{\sqrt{1+\sqrt{m}}} = 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{1+\sqrt{m}})^5}{5} - \frac{2(\sqrt{1+\sqrt{m}})^3}{3} + \sqrt{1+\sqrt{m}} - m\sqrt{1+\sqrt{m}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{1+\sqrt{m}})^4}{5} - \frac{2(\sqrt{1+\sqrt{m}})^2}{3} + 1 - m = 0 \Leftrightarrow \frac{(1+\sqrt{m})^2}{5} - \frac{2(1+\sqrt{m})}{3} + (1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\sqrt{m})}{5} - \frac{2}{3} + (1-\sqrt{m}) = 0 \quad (1+\sqrt{m} \neq 0) \Leftrightarrow 1+\sqrt{m} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow m = \frac{16}{81} \in \left(0; \frac{2}{5}\right)$$

Câu 19: Cho đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + a$ và parabol $y = x^2$ (a là tham số thực). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được tô đậm và gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{7}{2}; 4\right)$.

B. $\left(-\frac{1}{16}; \frac{5}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

D. $\left(3; \frac{7}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

* Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $\frac{1}{2}x + a = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2a = 0$

Theo giả thiết, phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1 + 16a > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{16}$

Khi đó, phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \\ P = x_1 + x_2 = -a \end{cases}$$

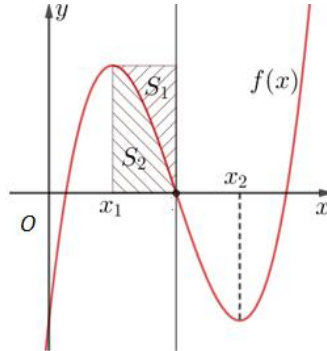
* Diện tích hình phẳng: $S_1 = \int_{-2a}^{x_1} \left(\frac{x}{2} + a\right) dx + \int_{x_1}^0 x^2 dx = \left(\frac{x^2}{4} + ax\right) \Big|_{-2a}^{x_1} + \frac{x^3}{3} \Big|_{x_1}^0$

$$= \frac{1}{4}x_1^2 + ax_1 - \frac{1}{4} \cdot 4a^2 + 2a^2 - \frac{1}{3}x_1^3 = -\frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{4}x_1^2 + ax_1 + a^2$$

$$\text{Diện tích hình phẳng } S_2 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}x + a - x^2\right) dx = \frac{(x_2 - x_1)^3}{6}$$

$$\begin{aligned}
 * \text{ Theo giả thiết, } S_1 = S_2 &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x_1^2 - 4a^2) + a(x_1 + 2a) - \frac{x_1^3}{3} = \frac{(x_2 - x_1)^3}{6} \\
 &\Leftrightarrow -\frac{1}{6}(x_1^3 + x_2^3) + \frac{1}{2}x_1 \cdot x_2(x_2 - x_1) + \frac{x_1^2}{4} + a \cdot x_1 + a^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8} + \frac{3a}{2}\right) - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + 4a} + \frac{(1 - \sqrt{1 + 16a})^2}{64} + a \cdot \frac{1 - \sqrt{1 + 16a}}{4} + a^2 = 0 \\
 &\Rightarrow a \approx 3,684.
 \end{aligned}$$

Câu 20: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ



Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai hình phẳng được gạch trong hình vẽ. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$.

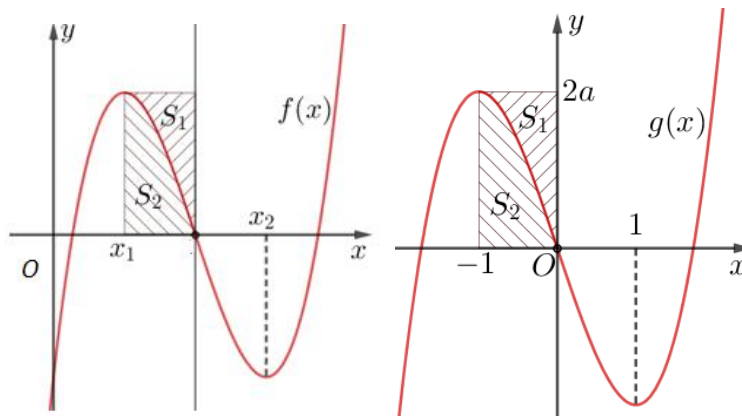
B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Tịnh tiến đồ thị sang trái sao cho đồ thị hàm số $y = g(x)$ có điểm uốn là gốc tọa độ O và hai điểm cực trị $x_3 = -1, x_4 = 1$.

Khi đó $g'(x)$ là tam thức bậc hai có hai nghiệm ± 1 nên $g'(x) = 3a(x+1)(x-1) = 3a(x^2 - 1)$ với $a \neq 0$.

Từ đó ta có $g(x) = 3a\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + b \Leftrightarrow g(x) = a(x^3 - 3x) + b$.

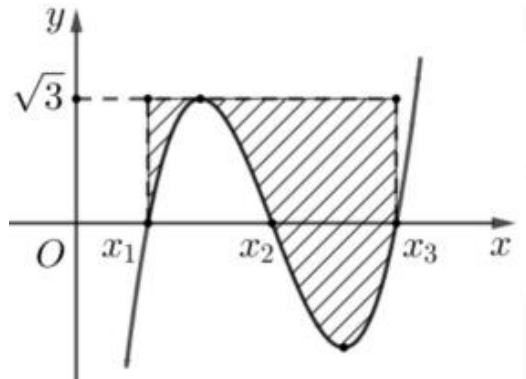
Do $g(x)$ đi qua gốc tọa độ O nên $b = 0$, suy ra $g(x) = a(x^3 - 3x)$.

$$\text{Ta có } S_2 = \int_{-1}^0 a(x^3 - 3x) dx = a \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{5a}{4}.$$

Lại có $S_1 + S_2$ bằng diện tích của hình chữ nhật có hai kích thước 1 và $g(-1) = 2a$, suy ra

$$S_1 + S_2 = 2a. \text{ Do đó } S_1 = 2a - \frac{5a}{4} = \frac{3a}{4}. \text{ Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}.$$

Câu 21: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2\sqrt{3}$ và x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ bằng



A. $6\sqrt{3}$.

B. $4\sqrt{6}$.

C. $4\sqrt{3}$.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Diện tích phần gạch sọc trên hình là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{3}, y = f(x), x = x_1, x = x_3$. Do đó,

$$S = \int_{x_1}^{x_3} (\sqrt{3} - f(x)) dx = \int_{x_1}^{x_3} \sqrt{3} dx - \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = \sqrt{3}(x_3 - x_1) - \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = 6 - \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx$$

$$\text{Xét } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d. \text{ Theo Viet có } x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

Mặt khác x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên

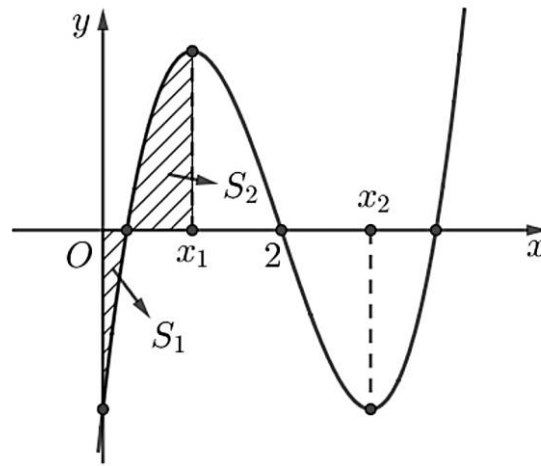
$$x_1 + x_2 + x_3 = (x_1 + x_3) + x_2 = 2x_2 + x_2 = 3x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{3a} \Rightarrow U(x_2; 0) \text{ là điểm uốn của đồ}$$

thị hàm số đã cho. Vì vậy, trục hoành cùng với đồ thị hàm số $f(x)$ tạo thành hai hình có diện

$$\text{tích bằng nhau tức } \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = -\int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = 0.$$

Vậy $S = 6$.

Câu 22: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 sao cho $x_2 - x_1 = 2$ và $f''(2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:



A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a > 0$) $\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{3a}$. Vì $f''(2) = 0$ nên $\frac{-b}{3a} = 2 \Leftrightarrow b = -6a$.

Mặt khác, theo định lý Viet thì $x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} = 4$, kết hợp với $x_2 - x_1 = 2$ ta suy ra $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

Do đó, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} = 3 \Leftrightarrow c = 9a$. Từ đó ta có $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 9ax + d$.

Từ đồ thị hàm số ta suy ra $f(2) = 0 \Leftrightarrow 8a - 24a + 18a + d = 0 \Leftrightarrow d = -2a$.

Suy ra $f(x) = a(x^3 - 6x^2 + 9x - 2)$.

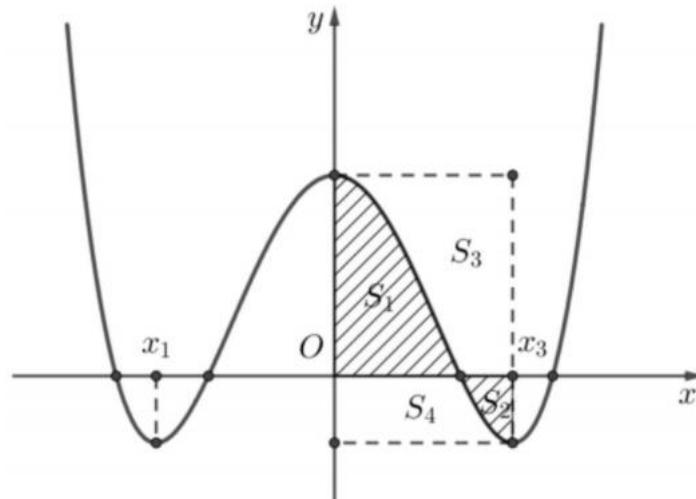
Xét phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 - \sqrt{3} < 2 \\ x = 2 + \sqrt{3} > 2 \end{cases}$

Từ đây ta tính được $S_1 = -a \int_0^{2-\sqrt{3}} (x^3 - 6x^2 + 9x - 2) dx = \frac{a}{4}$,

$S_2 = a \int_{2-\sqrt{3}}^1 (x^3 - 6x^2 + 9x - 2) dx = a$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm x_1 ; x_2 ; x_3 thỏa mãn $x_3 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0$. Gọi S_1 , S_2 , S_3 , S_4 là diện tích các hình phẳng trong hình vẽ bên. Tỉ số $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4}$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. 0,65.

B. 0,7.

C. 0,55.

D. 0,6.

Lời giải**Chọn D**Hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}} \end{cases} \quad (ab < 0)$$

Do đó hàm số có ba điểm cực trị x_1 ; $x_2 = 0$; $x_3 = -x_1$ vậy $x_3 = x_1 + 2 \Leftrightarrow -x_1 = x_1 + 2 \Leftrightarrow x_1 = -1 \Rightarrow x_3 = 1$.

$$\text{Suy ra } f'(x) = 4a(x+1)x(x-1) = 4a(x^3 - x)$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = a(x^4 - 2x^2) + c$$

$$\text{Do } f(x_1) + f(x_3) + \frac{2}{3}f(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(-1) + f(1) + \frac{2}{3}f(0) = 0 \Leftrightarrow (c-a) + (c-a) + \frac{2}{3}c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{3}{4}a.$$

$$\text{Vậy } f(x) = a\left(x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4}\right)$$

$$\text{Xét } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x) dx = a \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4}\right) dx = \frac{7\sqrt{2}}{30}a ;$$

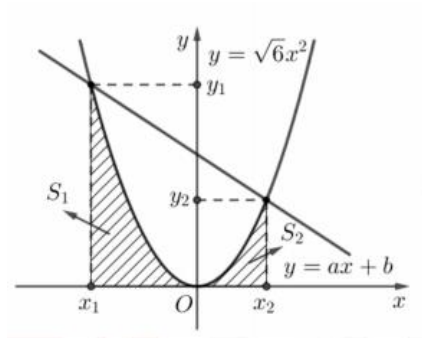
$$S_2 = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 f(x) dx = -a \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4}\right) dx = \frac{14\sqrt{2} - 17}{60}a.$$

$$\text{Suy ra } S_1 + S_2 = \frac{28\sqrt{2} - 17}{60}a.$$

Ta có $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ là diện tích hình chữ nhật có kích thước 1; $f(x_2) - f(x_3) = a$.

$$\text{Do đó } S_3 + S_4 = a - (S_1 + S_2) = a - \frac{28\sqrt{2} - 17}{60}a = \frac{7(11 - 4\sqrt{2})}{60}a \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{28\sqrt{2} - 17}{7(11 - 4\sqrt{2})} \approx 0,6$$

Câu 24: Biết rằng đường thẳng $d: ax + b$ cắt parabol $y = \sqrt{6}x^2$ tại hai điểm $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ sao cho $y_1 + y_2 = 20\sqrt{6}$ và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (P) bằng $36\sqrt{6}$ gọi $S_1; S_2$ là diện tích hình phẳng được giới hạn trong hình. Tổng $S_1 + S_2$



A. $30\sqrt{6}$.

B. $27\sqrt{6}$.

C. $18\sqrt{6}$.

D. $24\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{6}.x^2 = ax + b \Leftrightarrow \sqrt{6}.x^2 - ax - b = 0$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = \frac{a}{\sqrt{6}}; x_1 \cdot x_2 = \frac{-b}{\sqrt{6}}$.

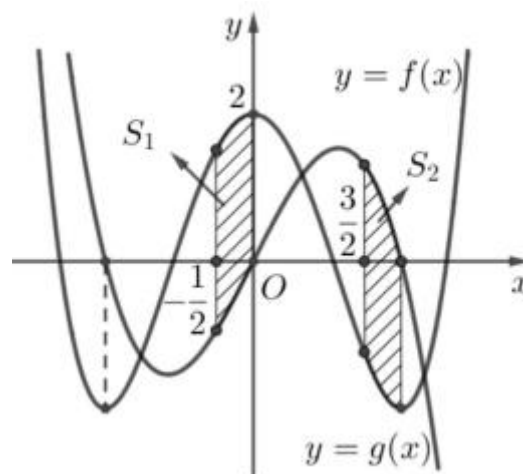
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol và đường thẳng là:

$$S = \frac{\Delta^3}{36a_0^4} = \frac{(a^2 + 4\sqrt{6}b)^3}{36(\sqrt{6})^4} = \frac{(6(x_1 + x_2)^2 - 24x_1 \cdot x_2)^3}{36^2} = \frac{(x_1 - x_2)^6}{6} = (36\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 6.$$

Mặt khác $S_1 + S_2 + S$ là diện tích hình thang vuông có chiều cao là $x_2 - x_1 = 6$, tổng hai đáy bằng

$$20\sqrt{6} \Rightarrow S_1 + S_2 + S = \frac{20\sqrt{6}}{2} \cdot 6 \Rightarrow S_1 + S_2 = 60\sqrt{6} - 36\sqrt{6} = 24\sqrt{6}.$$

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = ax^4 - 2x^2 + 2; g(x) = bx^3 + cx^2 + 2x$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Gọi S_1, S_2 là diện tích các hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ, khi $S_1 = \frac{557}{480}$ thì S_2 bằng

- A. $\frac{299}{240}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{557}{480}$. D. $\frac{301}{240}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 4ax^3 - 4x$

Do hàm $f(x)$ bậc bốn, hàm $g(x)$ bậc ba và hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại các điểm là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$ nên

$$g(x) = k \cdot f'(x) \Leftrightarrow bx^3 + cx^2 + 2x = k(4ax^3 - 4x) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4ka \\ c = 0 \\ 2 = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = 0 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó $f(x) = ax^4 - 2x^2 + 2$; $g(x) = -2ax^3 + 2x$

Diện tích hình phẳng S_1 là

$$S_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (ax^4 - 2x^2 + 2 + 2ax^3 - 2x) dx$$

$$= \left(\frac{1}{5} ax^5 - \frac{2}{3} x^3 + 2x + \frac{1}{2} ax^4 - x^2 \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{7}{6} - \frac{1}{40} a$$

$$\text{Ta có } S_1 = \frac{557}{480} \Leftrightarrow \frac{7}{6} - \frac{1}{40} a = \frac{557}{480} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

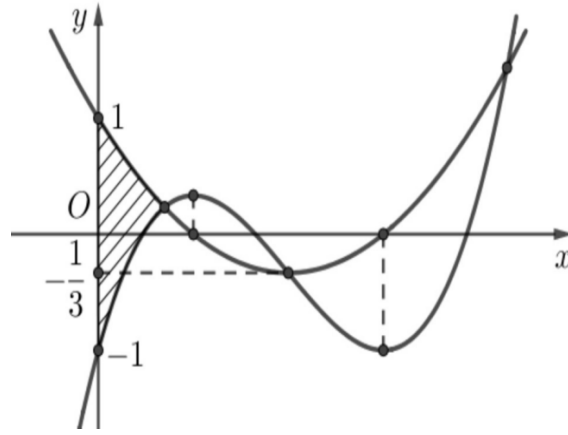
$$\text{Với } a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} x^4 - 2x^2 + 2; \quad g(x) = -\frac{1}{2} x^3 + 2x$$

$$\text{Khi đó } g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Vì vậy, diện tích hình phẳng S_2 là

$$S_2 = \int_{\frac{3}{2}}^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_{\frac{3}{2}}^2 \left[\left(-\frac{1}{2} x^3 + 2x \right) - \left(\frac{1}{4} x^4 - 2x^2 + 2 \right) \right] dx = \frac{299}{240}.$$

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$; $g(x) = mx^2 + nx + 1$ có đồ thị như hình vẽ bên



Biết rằng $f''(2) = 0$ và hai đồ thị hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 7$. Diện tích của hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(0; \frac{2}{5}\right)$. B. $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right)$. D. $\left(\frac{3}{5}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(2) = 0 \Leftrightarrow 12a + 2b = 0 \Leftrightarrow b = -2a$

Vậy $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + cx - 1$.

Do $f(x)$ là hàm số bậc ba và $g(x)$ là hàm số bậc hai và quan sát đồ thị đã cho tại các điểm cực trị x_0 của $f(x)$ thì $g(x_0) = 0$

Do

đó:

$$g(x) = k \cdot f'(x) \Leftrightarrow mx^2 + nx + 1 = k(3ax^2 - 12ax + c) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3ka \\ n = -12ka \\ 1 = kc \end{cases} \Rightarrow g(x) = 3ka(x^2 - 4x) + 1$$

$$\min_{\mathbb{R}} g(x) = g(2) = 1 - 12ka = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow ka = \frac{1}{9} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3).$$

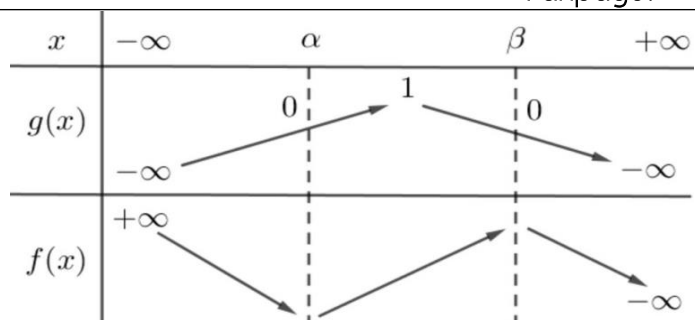
Phương trình hoành độ giao điểm:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3) \Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}; x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}.$$

Vậy diện tích cần tính cần tính là:

$$S = - \int_0^{\frac{5 - \sqrt{13}}{2}} (f(x) - g(x)) dx = - \int_0^{\frac{5 - \sqrt{13}}{2}} \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1 - \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3) \right) dx = \frac{89 - 13\sqrt{13}}{72} \approx 0,5851.$$

Câu 27: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1$; $g(x) = cx^2 + 4x + d$ có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = g(x); x = 1; x = 2$ bằng

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tại các điểm cực trị α, β của thì $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ đó đó $g(x) = c(x - \alpha)(x - \beta); f'(x) = 3ax^2 + 4x + b = 3a(x - \alpha)(x - \beta)$

$$\text{Do đó: } g(x) = k \cdot f'(x) \Leftrightarrow cx^2 + 4x + d = k(3ax^2 + 4x + b) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3ka \\ 4 = 4k \\ d = kb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ c = 3a \\ d = b \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } f(x) = ax^3 + 2x^2 + bx + 1; g(x) = 3ax^2 + 4x + b.$$

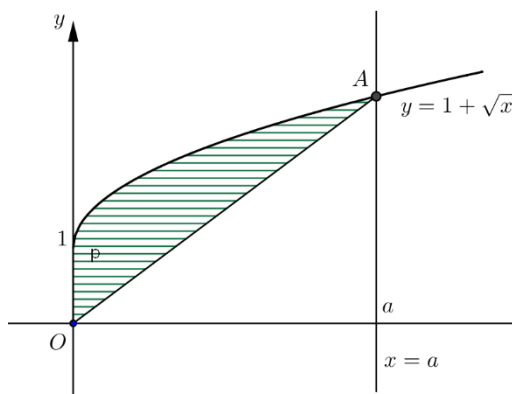
$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 3ax^2 + 4x + b \Leftrightarrow ax^3 + (2 - 3a)x^2 + (b - 4)x + 1 - b = 0$$

$$\text{Viết: } x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3a - 2}{a} = 9 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow g(x) = -x^2 + 4x + b \text{ đạt giá trị lớn nhất tại } x_0 = 2$$

$$\text{và giá trị lớn nhất đó bằng } g(2) = 1 \Leftrightarrow b + 4 = 1 \Leftrightarrow b = -3 \Rightarrow c = -1; d = -3.$$

$$\text{Vậy } S = \int_1^2 \left| -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 4 \right| dx = \frac{3}{4}.$$

Câu 28: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét đồ thị (P): $y = 1 + \sqrt{x}$ và đường thẳng $d: x = a$ cắt nhau tại điểm A.



Kí hiệu S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường Oy , (P) và đường thẳng OA ; S' là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường Oy , (P) , Ox và d . Giả sử rằng $S = \frac{1}{3}S'$, hỏi giá trị a thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(0;4)$. B. $(4;8)$. C. $(8;16)$. D. $(16;+\infty)$.

Lời giải

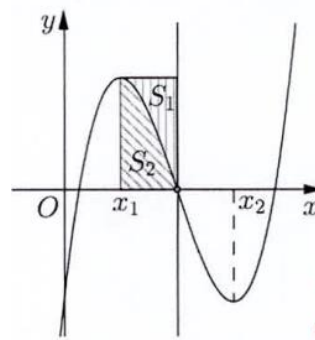
Chọn C

$$\text{Ta có } S' = \int_0^a (1 + \sqrt{x}) dx = \left(x + \frac{2x\sqrt{x}}{3} \right) \Big|_0^a = a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}.$$

Mặt khác $S = \frac{1}{3}S'$ nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng OA , Ox và d là $S_1 = \frac{2}{3}S'$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \frac{1}{2} \cdot a \cdot (1 + \sqrt{a}) &= \frac{2}{3} \left(a + \frac{2a\sqrt{a}}{3} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a + \frac{4}{9}a\sqrt{a} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a} &= \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\sqrt{a} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{18}\sqrt{a} &= \frac{1}{6} \Leftrightarrow \sqrt{a} = 3 \Leftrightarrow a = 9. \text{ Vậy } a \in (8;16). \end{aligned}$$

Câu 29: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

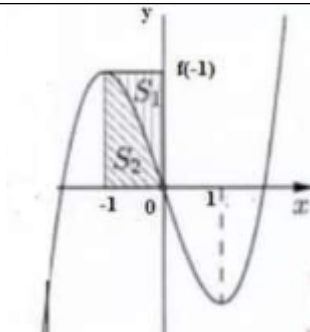


- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{5}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Rõ ràng kết quả bài toán không đổi nếu ta tịnh tiến đồ thị hàm số sang trái theo trục Ox một đoạn x_1 , ta sẽ được đồ thị mới như sau



Gọi $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là hàm số mới, khi đó dễ thấy $g(x)$ lẻ nên có ngay $b = d = 0$ và $g(x) = ax^3 + cx$ có hai điểm cực trị tương ứng là $-1, 1$, cũng là nghiệm của $3ax^2 + c = 0$. Từ đó dễ dàng có $g(x) = k(x^3 - 3x)$ với $k > 0$.

Ta có diện tích hình chữ nhật là $S_1 + S_2 = |(-1) \cdot g(-1)| = 2k$. Ngoài ra, $S_2 = k \int_{-1}^0 |x^3 - 3x| dx = \frac{5k}{4}$.

Vì thế $S_1 = 2k - S_2 = 2k - \frac{5k}{4} = \frac{3k}{4}$, Suy ra $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$.

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \frac{\ln \sin x + \cos x}{\sin^2 x}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$

là $S = \frac{\pi}{a} + b \ln \sqrt{c}$ với $a \in \mathbb{Z}$ và b, c là các số nguyên tố. Khi đó $a + b + c$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x + \cos x}{\sin^2 x} dx$

$$\begin{cases} u = \ln \sin x + \cos x \Rightarrow du = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \Rightarrow v = -\cot x - 1 = \frac{-\cos x + \sin x}{\sin x} \end{cases}$$

$$S = \frac{-\cos x + \sin x}{\sin x} \cdot \ln \sin x + \cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} dx$$

$$S = 2 \ln \sqrt{2} + \ln |\sin x| - x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-\pi}{4} + 3 \ln \sqrt{2}$$

Suy ra $a + b + c = -4 + 3 + 2 = 1$.

Câu 31: Trong mặt phẳng Oxy, xét tứ giác có diện tích bằng $\ln \frac{91}{90}$; các đỉnh có hoành độ là các số nguyên liên tiếp và nằm trên đồ thị của hàm số $y = \ln x$. Hãy tính tổng các chữ số của hoành độ đỉnh xa gốc tọa độ nhất:

A. 6.

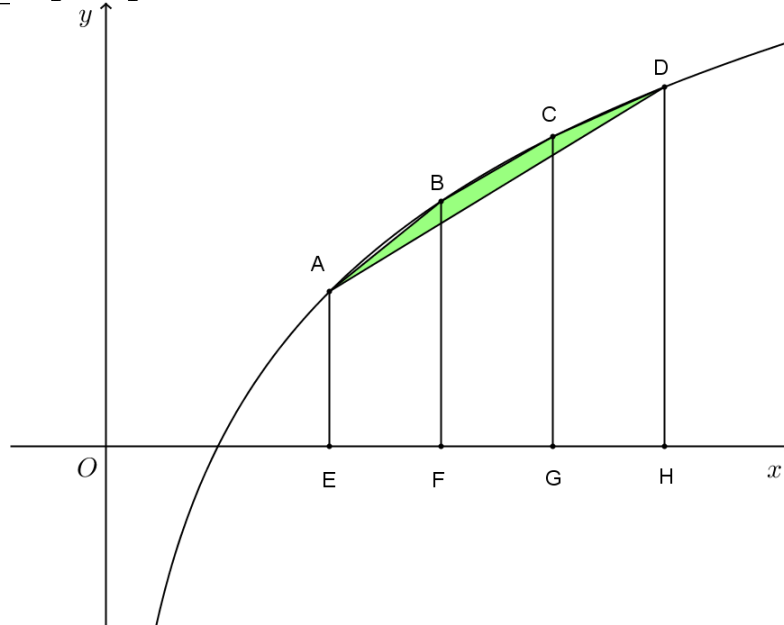
B. 5.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn A



Giả sử các điểm $A; B; C; D$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \ln x$ có hoành độ lần lượt là $a; a+1; a+2; a+3$ và các điểm $E; F; G; H$ thuộc trục Ox có hoành độ lần lượt là $a; a+1; a+2; a+3$, trong đó $a \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $S_{ABCD} = S_{ABFE} + S_{BCGF} + S_{CDHG} - S_{ADHE}$

$$= \frac{1}{2} [\ln a + \ln(a+1)] + \frac{1}{2} [\ln(a+1) + \ln(a+2)] + \frac{1}{2} [\ln(a+2) + \ln(a+3)] - \frac{3}{2} [\ln a + \ln(a+3)]$$

$$\Rightarrow \ln \frac{91}{90} = \ln \frac{(a+1)(a+2)}{a(a+3)} \Leftrightarrow a^2 + 3a - 180 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \\ a = -15 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Khi đó hoành độ đỉnh xa gốc tọa độ nhất là $x_D = 15$.

Vậy tổng các chữ số của hoành độ đỉnh xa gốc tọa độ nhất là $1+5=6$.

Câu 32: Cho hàm số $y = \sqrt{x}$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ dương. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành và đường thẳng đi qua M và vuông góc với trục hoành; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và đường thẳng OM . Biết $\frac{S_2}{S_1} = \frac{a}{b}$ (với

$a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản), giá trị của $a+b$ bằng

A. 6.

B. 5.

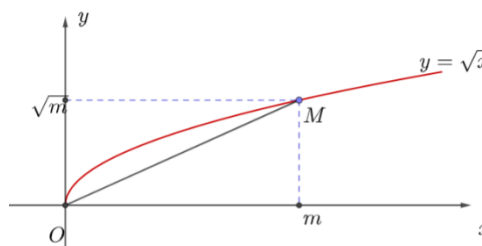
C. 19.

D. 21.

Lời giải

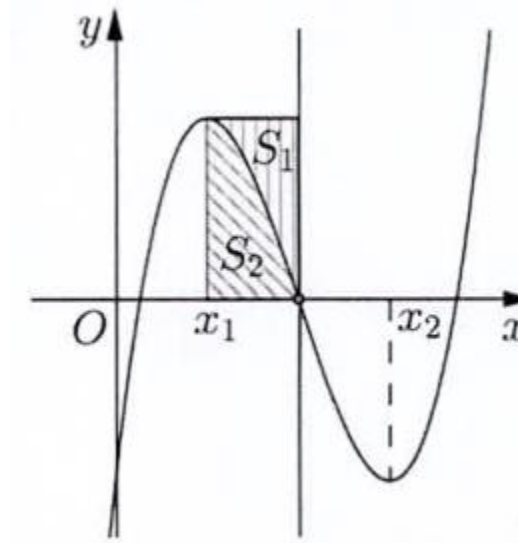
Chọn B

Gọi $M(m; \sqrt{m}) \in (C)$ với $m > 0$. Khi đó, $OM: y = \frac{1}{\sqrt{m}}x$.



Ta có $S_1 = \int_0^m \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{m^3}$ và $S_2 = \int_0^m \left[\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{m}} x \right] dx = \frac{1}{6} \sqrt{m^3}$. Do đó $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{4}$. Vậy $a + b = 5$.

Câu 33: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a > 0 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo giả thiết ta có $f'(x_1) = f'(x_2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3a(x - x_1)(x - x_2) = 3a(x - x_1)(x - x_1 - 2)$.

$$\Rightarrow f'(x) = 3a(x - x_1)^2 - 6a(x - x_1).$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + C.$$

$$\text{Ta có } f(x_1) + f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) + f(x_1 + 2) = 0 \Rightarrow C + 8a - 12a + C = 0 \Rightarrow C = 2a.$$

$$\text{Do đó } f(x) = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 2a = a[(x - x_1)^3 - 3(x - x_1)^2 + 2].$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow a[(x - x_1)^3 - 3(x - x_1)^2 + 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + 1 - \sqrt{3} \\ x = x_1 + 1 \\ x = x_1 + 1 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } S_2 = \int_{x_1}^{x_1+1} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_1+1} a[(x - x_1)^3 - 3(x - x_1)^2 + 2] dx$$

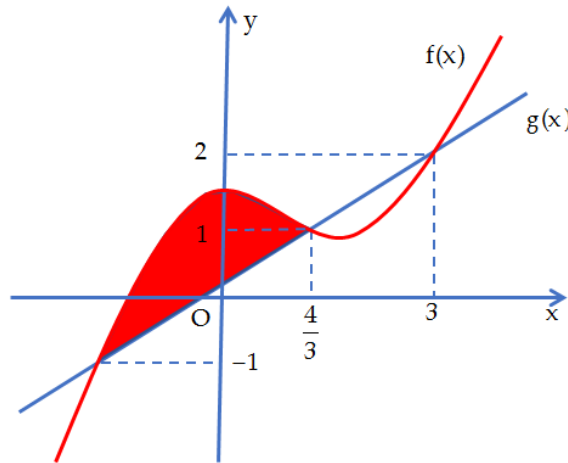
$$= \int_{x_1}^{x_1+1} a[(x - x_1)^3 - 3(x - x_1)^2 + 2] d(x - x_1)$$

$$= a \left[\frac{(x - x_1)^4}{4} - (x - x_1)^3 + 2(x - x_1) \right] \Big|_{x_1}^{x_1+1} = \frac{5a}{4}.$$

$$\text{Mặt khác ta có } S_1 + S_2 = \int_{x_1}^{x_1+1} f(x_1) dx = f(x_1) \int_{x_1}^{x_1+1} dx = f(x_1) = 2a \Rightarrow S_1 = 2a - S_2 = \frac{3a}{4}.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}.$$

Câu 34: Cho $f(x), g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ. Biết diện tích hình S (được tô màu) bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.



A. $\frac{61}{48}$.

B. $\frac{34}{27}$.

C. $\frac{17}{15}$.

D. $\frac{43}{35}$.

Lời giải

Chọn A

♦ Giả sử $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; g(x) = ex + f$

Do đồ thị hàm số $g(x) = ex + f$ đi qua $(\frac{4}{3}; 1); (3; 2)$ nên suy ra $g(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$

Và có $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5} = -1 \Leftrightarrow x = -2$

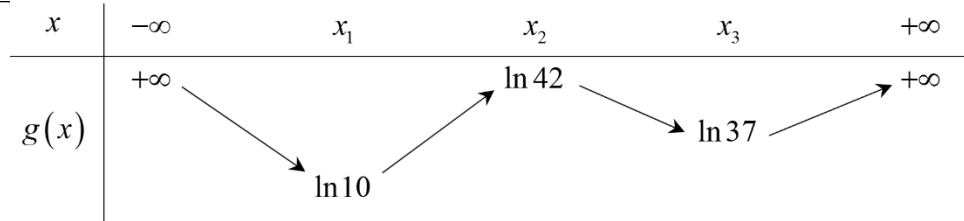
♦ Có ptđ giao điểm $ax^3 + bx^2 + cx + d - \frac{3}{5}x - \frac{1}{5} = a(x+2)(x-\frac{4}{3})(x-3) (*)$

Và $S = \int_{-2}^{\frac{4}{3}} a(x+2)(x-\frac{4}{3})(x-3)dx = a \cdot \frac{5000}{243} = \frac{250}{81} \Leftrightarrow a = \frac{3}{20}$

♦ Từ (*) đồng nhất các hệ số tìm được $b = -\frac{7}{20}; c = -\frac{1}{10}; d = \frac{7}{5}$

♦ Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (\frac{3}{20}x^3 - \frac{7}{20}x^2 - \frac{1}{10}x + \frac{7}{5})dx = \frac{61}{48}$.

Câu 35. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x) = \ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. (38;39).

B. (25;26).

C. (28;29).

D. (35;36).

Lời giải

Chọn D

+ Ta có: $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

+ Từ bảng biến thiên ta thấy $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f(x) = e^{g(x)} > 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

+ Phương trình $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow g'(x) \cdot f(x) = g'(x) \Leftrightarrow g'(x) \cdot [f(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases}$$

+ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_3} |f'(x) - g'(x)| dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left[f'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)} \right] dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} \left[f'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)} \right] dx \right| \\ &= \left| \int_{10}^{42} \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt \right| + \left| \int_{42}^{37} \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt \right| \approx 35,438 \in (35;36). \end{aligned}$$

