

Câu 1(2 điểm).

1. Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 4x + 4$ (C)

Chứng minh hàm số có 3 điểm cực trị. Viết phương trình của một Parabol (có trục đối xứng song song với Oy) đi qua 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số (C).

2. Biện luận số nghiệm của phương trình: $m = \frac{\cos x}{\sin^2 x (2 \cos x - \sin x)}$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và m là tham số.

Câu 2(2 điểm):

1. Giải phương trình $\left(\frac{1}{27}\right)^{\sin x} - \left(\frac{1}{81}\right)^{\sin^2 x} = \sin 3x$.

2. Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 8} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} > 4m - m^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

Câu 3(3 điểm):

1. Cho hình chóp OABCD có ABCD là hình bình hành, AC cắt BD tại I, P là trung điểm của OI. Xét các mặt phẳng chứa AP, mặt phẳng đó cắt OB, OC, OD lần lượt tại M, K, N. Gọi V_1 và V lần lượt là thể tích các khối chóp O.AMKN và O.ABCD. tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

2. Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính R. Xét các tứ diện ABCD có các đỉnh nằm trên mặt cầu (S). Tìm giá trị lớn nhất của: $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$.

Câu 4(2 điểm):

1. Cho 4 số a, b, c, d lớn hơn 1 thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16$. Chứng minh rằng

$$\frac{\log_a b}{a+b} + \frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c d}{c+d} + \frac{\log_d a}{d+a} \geq 1.$$

2. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{u_n^2}} - \frac{1}{u_n} \end{cases}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{n-1} \cdot u_n}.$$

Câu 5(1 điểm):

Giả sử hàm số f(x) có đạo hàm đến cấp n-1 trên D ($n \in \mathbb{N}, n > 1$), kí hiệu là $f^{(n-1)}(x)$. Quy ước

$f^0(x) = f(x), f^1(x) = f'(x)$. Hãy tính

$f^n(x)$ biết $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$.