ĐỀ 90

ĐỀ HSG TOÁN 9 _ VĨNH LONG _ 2023-2024

Câu 1. (4.0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức A = $(1-\sqrt{7})^3 + (1+\sqrt{7})^3$

b) Cho biểu thức P = $\frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}$ - $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ + $\frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$. Rút gọn biểu thức P và tìm x nguyên dương để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (4.0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[3]{3x-2y}+2\sqrt{x+2y}=6 \\ 3\sqrt[3]{3x-2y}-4\sqrt{x+2y}=-22 \end{cases}$

b) Giải phương trình $2(2x-1)-3\sqrt{5x-6}=\sqrt{3x-8}$

Câu 3. (2.0 điểm)

Cho phương trình $x^2-(m+1)x+m-4=0$, m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$(x_1^2-mx_1+m)(x_2^2-mx_2+m) = 2$

Câu 4. (2.5 điểm)

a) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì 2023k + 3 không phải là lập phương của một số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-2y(x-y)=2(x+1)$

Câu 5. (3.0 điểm)

Cho đường tròn tâm O bán kính R, dây BC khác đường kính. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O, R) tại B và tại C cắt nhau ở A . Kẻ đường kính CD , kẻ BH vuông góc với CD tại H .

a) Chứng minh AO vuông góc với BC. Cho biết R = 15 cm, BC = 24 cm. Tính AB, OA.

b) Gọi I là giao điểm của AD và BH, E là giao điểm của BD và AC. Chứng minh IH = IB.

Câu 6. (2.5 điểm)

Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB vuông góc với dây MN tại H (H nằm giữa O và B). Trên tia MN lấy điểm C nằm ngoài đường tròn (O; R), đoạn thẳng AC cắt đường tròn (O; R) tại điểm K (K khác A), hai dây MN và BK cắt nhau ở E .

a) Chứng minh CA.CK = CE.CH.

b) Qua điểm N , kẻ đường thẳng (d) vuông góc với AC , (d) cắt tia MK tại F . Chứng minh tam giác NCF cân.

Câu 7. (2.0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn a + b + c = 3. Chứng minh rằng:

a) $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2$

b) $\dfrac{a}{1+b^2} + \dfrac{b}{1+c^2} + \dfrac{c}{1+a^2} \ge \dfrac{3}{2}$

------ HẾT ----------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4.0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức A = $\left(1-\sqrt{7}\right)^3+\left(1+\sqrt{7}\right)^3$

b) Cho biểu thức P = $\frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}$ - $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$. Rút gọn biểu thức P và tìm x nguyên dương để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Ta có $\left(1-\sqrt{7}\right)^3=1^3-3.1^2.\sqrt{7}+3.1\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^3=22-10\sqrt{7}$

$\left(1+\sqrt{7}\right)^3=1^3+3.1^2.\sqrt{7}+3.1\left(\sqrt{7}\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^3=22+10\sqrt{7}$

Khi đó A = $\left(1-\sqrt{7}\right)^3+\left(1+\sqrt{7}\right)^3=44$

b) Ta có

$$P=\frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$$

$$=\frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}+\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{-\left(3x+\sqrt{9x}-3\right)-\left(1-x\right)+\left(x-4\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}=\frac{-2-3\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$P=1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Để P nguyên thì $1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}$ nguyên $\Rightarrow 2 \vdots \sqrt{x}-1 \Rightarrow x \in \{4;9\}$

Câu 2. (4.0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt[3]{3x-2y}+2\sqrt{x+2y}=6\\3\sqrt[3]{3x-2y}-4\sqrt{x+2y}=-22\end{cases}$

b) Giải phương trình $2(2x-1)-3\sqrt{5x-6}=\sqrt{3x-8}$

Lời giải

a) Đặt $\begin{cases}a=\sqrt[3]{3x-2y}\\b=\sqrt{x+2y}\end{cases}$, ta có hệ đã cho trở thành $\begin{cases}a+2b=6\\3a-4b=-22\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\b=4\end{cases}$

Ta có $\begin{cases} a=\sqrt[3]{3x-2y}=-2 \\ b=\sqrt{x+2y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=-8 \\ x+2y=16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm S = $\{(2;7)\}$

b) $2(2x-1)-3\sqrt{5x-6}=\sqrt{3x-8}$ (*)

Điều kiện: $x \geq \frac{8}{3}$

(*) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{5x-6}-3\right)^2+\left(\sqrt{3x-8}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x-6}-3=0 \\ \sqrt{3x-8}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ x = 3

Vậy tập nghiệm S = {3}.

Câu 3. (2.0 điểm)

Cho phương trình $x^2-(m+1)x+m-4=0$, m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$\left(x_1^2-mx_1+m\right)\left(x_2^2-mx_2+m\right)=2$

Lời giải

$\Delta=(m+1)^2-4(m-4)=m^2-2m+17=(m-1)^2+16>0, \forall m \in R.$

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

(Tính Δ 0,25 điểm, lập luận có hai nghiệm phân biệt 0,25 điểm).

$x_1^2-(m+1)x+m-4=0 \Leftrightarrow x^2-mx_1+m=x_1+4$

Tương tự $x_2^2-mx_2+m=$ x_2+4

(Mỗi ý 0.25 điểm)

$\left(x_1^2-mx_1+m\right)\left(x_2^2-mx_2+m\right)=2$

$\Leftrightarrow (x_1+4)(x_2+4)=2 \Leftrightarrow x_1x_2+4(x_1+x_2)+16=2$ (*)

Áp dụng định lí Viet, ta có:

(*) $\Leftrightarrow (m-4)+4(m+1)+16=2 \Leftrightarrow m=\frac{-14}{5}$. Kết luận

Câu 4. (2.5 điểm)

a) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì 2023k + 3 không phải là lập phương của một số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-2y(x-y)=2(x+1)$

Lời giải

a) Giả sử 2023k + 3 = a^3 với k và a là số nguyên.

Suy ra 2023k = a^3-3

Ta chứng minh a^3-3 không chia hết cho 7.

Thật vậy: Ta biểu diễn $a=7m+r, với\, r\in\{0;1;-1;2;-2;3;-3\}$

Trong tất cả các trường hợp ta đều có a^3-3 không chia hết cho 7

Mà 2023k luôn chia hết cho 7, nên a^3-3 ≠ 2023k

(Mỗi ý 0,25 điểm).

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2-2y(x-y)=2(x+1)$

$x^2-2y(x-y)=2(x+1)$ ⇔ $x^2-2(y+1)x+2(y^2-1)=0$ (1).

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên x thì Δ′ = $4-(y-1)^2\le 4$

Δ′ chính phương nên Δ′$\in\{0;1;4\}$

+ Nếu Δ′ = 4 ⇒ $(y-1)^2=0$ ⇔ $y=1$ thay vào phương trình (1) ta có:

$$x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$

+ Nếu Δ′ = 1⇒ $(y-1)^2=¿3$ ⇒ y ∉ Z.

+ Nếu Δ′ = 0⇒ $(y-1)^2=¿4$ ⇔ $\left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-1 \end{array}\right.$

+ Với y = 3 thay vào phương trình (1) ta có: $x^2-8x+16=0$

⇔ $(x-4)^2=0$ ⇔ $x=4$

+ Với y = −1 thay vào phương trình (1) ta có: $x^2=0$ ⇔ $x=¿0$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên:

$$(x;y)\in\{(0;1);(4;1);(4;3);(0;-1)\}$$

Mỗi hai nghiệm 0,25 điểm

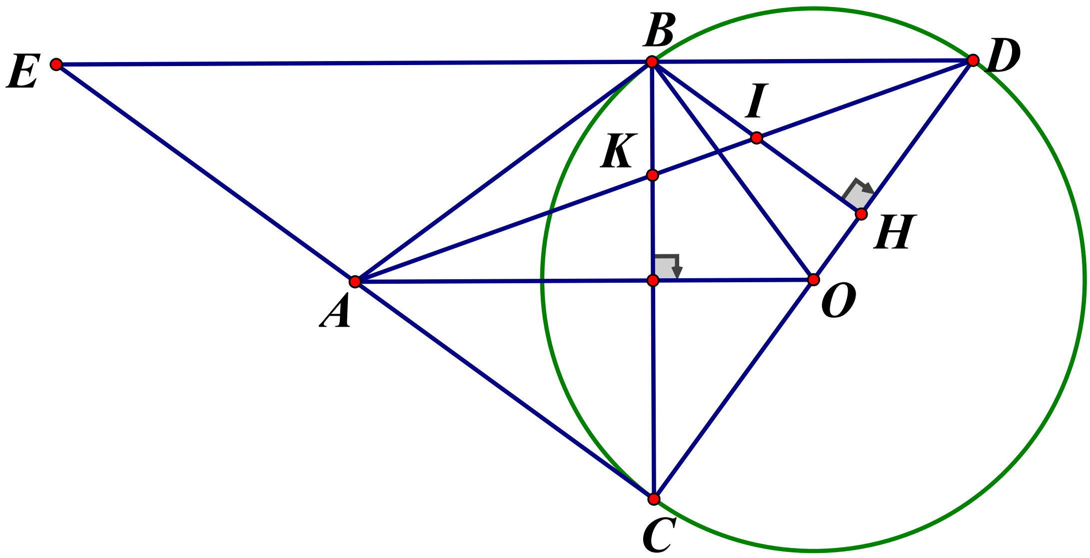
Câu 5. (3.0 điểm)

Cho đường tròn tâm O bán kính R, dây BC khác đường kính. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O, R) tại B và tại C cắt nhau ở A . Kẻ đường kính CD , kẻ BH vuông góc với CD tại H .

a) Chứng minh AO vuông góc với BC. Cho biết R = 15 cm, BC = 24 cm. Tính AB, OA.

b) Gọi I là giao điểm của AD và BH, E là giao điểm của BD và AC. Chứng minh IH = IB.

Lời giải



a) Chứng minh AO vuông góc với BC. Cho biết bán kính R bằng 15 cm, dây BC = 24 cm. Tính AB, OA

Ta có: AB = AC (tính chất của tiếp tuyến đường tròn)

OB = OC (bán kính đường tròn).

Suy ra OA là trung trực của BC $\Rightarrow OA \perp BC$ tại K

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO đường cao BK, ta có:

$\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{BK^2}-\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{12^2}-\frac{1}{15^2} \Rightarrow$ AB = 20 (cm).

(Công thức 0.25 điểm, tính đúng kết quả 0.25 điểm)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABO, ta có:

$OA=\sqrt{AB^2+OB^2}=\sqrt{20^2+15^2}=\sqrt{25^2}=25$(cm)

(Công thức 0.25 điểm, tính đúng kết quả 0.25 điểm)

b) $\triangle$DCE có OA // ED (Cùng vuông góc với BC);

OC = OD = R. Suy ra EA = AC (1).

Ta lại có: BH //AC (Cùng vuông góc với DC)

Áp dụng hệ quả của định lý Ta - let, ta có $\frac{BI}{AE}=\frac{ID}{DA}=\frac{IH}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra BI - IH

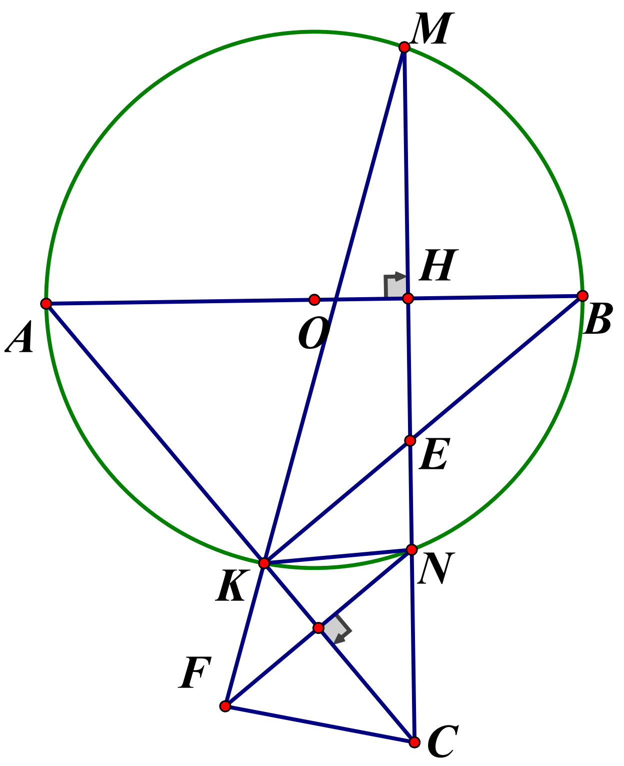
Câu 6. (2.5 điểm)

Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB vuông góc với dây MN tại H (H nằm giữa O và B). Trên tia MN lấy điểm C nằm ngoài đường tròn (O; R), đoạn thẳng AC cắt đường tròn (O; R) tại điểm K (K khác A), hai dây MN và BK cắt nhau ở E .

a) Chứng minh CA.CK = CE.CH.

b) Qua điểm N , kẻ đường thẳng (d) vuông góc với AC , (d) cắt tia MK tại F . Chứng minh tam giác NCF cân.

Lời giải



a)$\triangle$CKE và $\triangle$CHA có $\widehat{CKE} = \widehat{CHA} = 90°$ và $\widehat{KCE}$ chung

Suy ra $\triangle$CKE $\triangle$CHA

Nên $\frac{CK}{CH} = \frac{CE}{CA} \Leftrightarrow$ CK.CA = CH.CE

b) Do KB//FN nên $\widehat{EKN} = \widehat{KNF}$, $\widehat{MKB} = \widehat{KFN}$ (1)

Mặt khác AB $\perp$ MN tại H nên H là trung điểm của MN suy ra tam giác MNB cân tại B $\Rightarrow$ MB = NB $\Rightarrow$ $\widehat{MKB} = \widehat{EKN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung bằng nhau). (2)

Từ (1) và (2) ⇒ $\widehat{KNF} = \widehat{KFN}$ nên tam giác KFN cân tại K suy ra KC là đường trung trực của NF ⇒ △CNF cân tại C.

Câu 7. (2.0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn a + b + c = 3. Chứng minh rằng:

a) $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2$

b) $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}$

Lời giải

a) Thực hiện xét hiệu ta được:

$(a+b+c)^2 - ¿\, 3(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$

$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \ge 0$

⇒ $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$

b) Ta thấy điểm rơi đạt tại a = b = c = 1

Ta có: $\frac{a}{1+b^2}$ = a. $\frac{1}{1+b^2}$ = a.$\left(1-\frac{b^2}{1+b^2}\right)$ ≥ a$\left(1-\frac{b}{2}\right)$ = a$\frac{-ab}{2}$.

Tương tự ta được $\frac{b}{1+c^2} \ge b-\frac{bc}{2}$, $\frac{c}{1+a^2} \ge c-\frac{ca}{2}$.

Cộng về với về, ta có: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \ge (a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{2} \ge \frac{3}{2}$

Vì ab + bc + ca ≤ $\frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 3$

⇒ $(a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{2} \ge 3-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

------HẾT-----