

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

Câu 1. Tìm một số có 8 chữ số: $\overline{a_1a_2\dots a_8}$ thỏa mãn 2 điều kiện a và b sau:

a) $\overline{a_1a_2a_3} = (\overline{a_7a_8})^2$

b) $\overline{a_4a_5a_6a_7a_8} = (\overline{a_7a_8})^3$

Câu 2. Chứng minh rằng: $(x^m + x^n + 1)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $(mn - 2) \vdots 3$

Áp dụng phân tích đa thức thành nhân tử: $x^7 + x^2 + 1$

Câu 3. Giải phương trình:

$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2005.2006.2007} \right) x = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2006.2007$$

Câu 4. Cho hình thang $ABCD$ (đáy lớn CD). Gọi O là giao điểm của AC và BD ; các đường kẻ từ A và B lần lượt song song với BC và AD cắt các đường chéo BD và AC tương ứng ở F và E . Chứng minh:

a) $EF \parallel AB$

b) $AB^2 = EF \cdot CD$

c) Gọi S_1, S_2, S_3 và S_4 theo thứ tự là diện tích của tam giác OAB, OCD, OAD và

OBC . Chứng minh $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất : $A = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

Ta có: $\overline{a_1 a_2 a_3} = (\overline{a_7 a_8})^2 \quad (1) \quad \overline{a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = (\overline{a_7 a_8})^3 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 22 \leq \overline{a_7 a_8} \leq 31$

$$\Rightarrow (\overline{a_7 a_8})^3 = \overline{a_4 a_5 a_6 00} + \overline{a_7 a_8} \Leftrightarrow (\overline{a_7 a_8})^3 - \overline{a_7 a_8} = \overline{a_4 a_5 a_6 00}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{a_7 a_8} - 1) \overline{a_7 a_8} (\overline{a_7 a_8} + 1) = 4.25. \overline{a_4 a_5 a_6}$$

Do $(\overline{a_7 a_8} - 1); \overline{a_7 a_8}; (\overline{a_7 a_8} + 1)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có 3 khả năng:

a) $\overline{a_7 a_8} = 24 \Rightarrow \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_8}$ là số 57613824

b) $\overline{a_7 a_8} - 1 = 24 \Rightarrow \overline{a_7 a_8} = 25 \Rightarrow$ số đó là 62515625

c) $\overline{a_7 a_8} = 26 \Rightarrow$ không thỏa mãn

Câu 2. Đặt $m = 3k + r$ với $0 \leq r \leq 2$; $n = 3t + s$ với $0 \leq s \leq 2$

$$\Rightarrow x^m + x^n + 1 = x^{3k+r} + x^{3t+s} + 1 = x^{3k} x^r + x^{3t} x^s + 1 = x^{3k} x^r - x^r + x^{3t} x^s - x^s + x^r + x^s + 1$$

$$= x^r (x^{3k} - 1) + x^s (x^{3t} - 1) + x^r + x^s + 1$$

Ta thấy: $(x^{3k} - 1):(x^2 + x + 1)$ và $(x^{3t} - 1):(x^2 + x + 1)$

Vậy $(x^m + x^n + 1):(x^2 + x + 1)$

$$\Leftrightarrow (x^r + x^s + 1):(x^2 + x + 1) \text{ với } 0 \leq r, s \leq 2$$

$$\Leftrightarrow r = 2 \text{ và } s = 1 \Rightarrow m = 3k + 2 \text{ và } n = 3t + 1$$

$$r = 1 \text{ và } s = 2 \Rightarrow m = 3k + 1 \text{ và } n = 3t + 2$$

$$\Leftrightarrow mn - 2 = (3k + 2)(3t + 1) - 2 = 9kt + 3k + 6t = 3(3kt + k + 2t)$$

$$mn - 2 = (3k + 1)(3t + 2) - 2 = 9kt + 6k + 3t = 3(3kt + 2k + t)$$

$$\Rightarrow (mn - 2):3, \text{ Điều phải chứng minh.}$$

Áp dụng: $m = 7, n = 2 \Rightarrow mn - 2 = 12:3$

$$\Rightarrow (x^7 + x^2 + 1):(x^2 + x + 1)$$

$$\Rightarrow (x^7 + x^2 + 1):(x^2 + x + 1) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$$

Câu 3.

$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2005.2006.2007} \right) x = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2006.2007$$

Nhân cả 2 vế với 6 ta được:

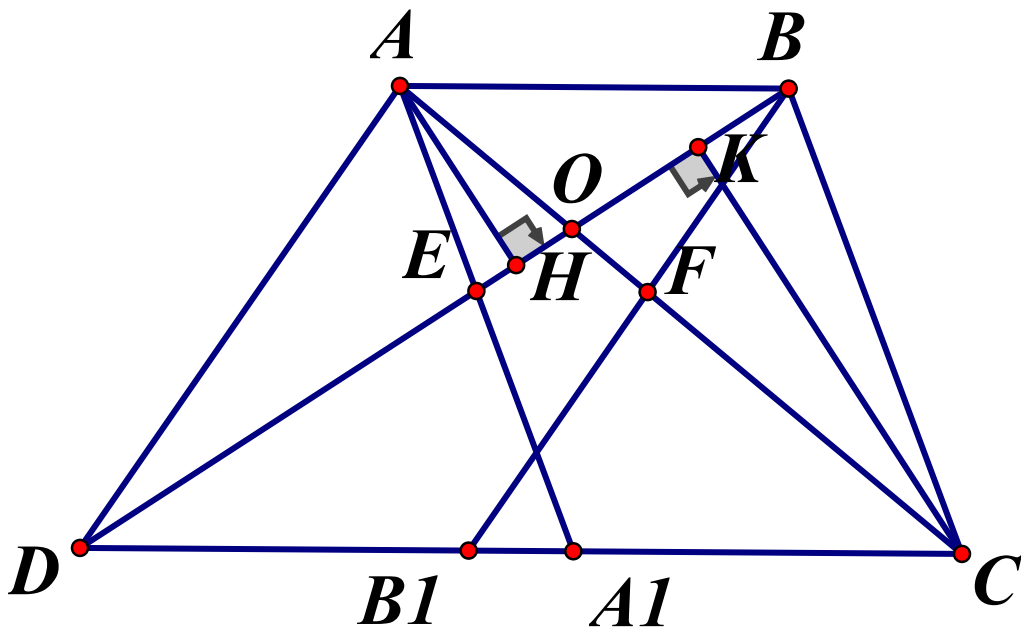
$$3. \left(\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{2005.2006.2007} \right) x = 2[1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + \dots + 2006.2007.(2008-2005)]$$

$$3. \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots - \frac{1}{2006.2007} \right) x$$

$$= 2.(1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + \dots + 2006.2007.2008 - 2005.2006.2007)$$

$$\Leftrightarrow 3. \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2006.2007} \right) x = 2.2006.2007.2008 \Leftrightarrow x = \frac{1003.1004.669}{5.100.651}$$

Câu 4.



$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC} \\ \frac{OF}{OA} = \frac{OB}{OD} \end{cases}$$

a) Do $AE \parallel BC$ và $BF \parallel AD$

Mặt khác $AB \parallel CD$ ta lại có: $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ nên $\frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OA} \Rightarrow EF \parallel AB$

b) $ABCA_1$ và ABB_1D là hình bình hành $\Rightarrow A_1C = DB_1 = AB$

$$\text{Vì } EF // AB // CD \text{ nên } \frac{EF}{AB} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow AB^2 = EF \cdot CD$$

$$\text{c) Ta có: } S_1 = \frac{1}{2} AH \cdot OB; S_2 = \frac{1}{2} CK \cdot OD; S_3 = \frac{1}{2} AH \cdot OD; S_4 = \frac{1}{2} OK \cdot OD$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_4} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot OB}{\frac{1}{2} \cdot CK \cdot OB} = \frac{AH}{CK}; \frac{S_3}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot OD}{\frac{1}{2} \cdot CK \cdot OD} = \frac{AH}{CK}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_4} = \frac{S_3}{S_2} \Rightarrow S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$$

Câu 5.

$$A = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$$

$$= x^2 + y^2 + 36 - 2xy - 12x + 12y + 5y^2 - 10y + 5 + 4$$

$$= (x - y - 6)^2 + 5(y - 1)^2 + 4 \geq 4$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất } A = 4 \text{ khi } \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$$