

## ĐỀ SỐ 11

### Câu I (4,0 điểm).

1. Giải phương trình :  $\sqrt{x^4 - x^2 + 4} + \sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} = 7x$
2. Tìm m để phương trình:  $-x^2 + 2x + 4\sqrt{(x+1)(3-x)} = m - 3$  có nghiệm.

### Câu II (4,0 điểm).

1. Giải phương trình  $\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} - \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$ .
2. Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{17-x^2}{y} = \sqrt{x}(3\sqrt{x}+1) + 2\sqrt{63-14x-18y} \\ x(x^2+2x+9) + 12y = 34 + 2(13-3y)\sqrt{17-6y}. \end{cases}$$

### Câu III (4,0 điểm).

1. Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + \frac{(1+2xy)^2 - 3}{2xy}.$$

2. Cho dãy số  $(u_n)$  xác định như sau  $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, (n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \end{cases}$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### Câu IV (4,0 điểm).

1. Có bao nhiêu số hạng hữu tỉ trong khai triển  $(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5})^{124}$ .
2. Một hộp đựng 100 thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên 3 thẻ trong hộp, tính xác suất để tổng 3 số trong 3 thẻ lấy ra là một số chia hết cho 3.

### Câu V (4,0 điểm).

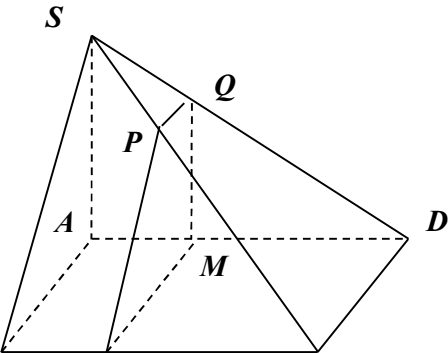
1. Cho tứ diện vuông  $SABC$  vuông tại  $S$ . Gọi  $\alpha, \beta, \gamma$  lần lượt là các góc giữa các mặt phẳng  $(SAB), (SBC), (SCA)$  với  $(ABC)$ , Chứng minh rằng  $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma} + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} \leq \frac{3}{4}$ .
2. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành với  $AB = a; AD = 2a; SAB$  là tam giác vuông cân tại  $A$ ,  $M$  là điểm trên cạnh  $AD$  ( $M$  khác  $A$  và  $D$ ). Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $M$  song song với  $(SAB)$  cắt  $BC, SC, SD$  lần lượt tại  $N, P, Q$ . Đặt  $x = AM$ . Tính diện tích của tứ giác  $MNPQ$  theo  $a$  và  $x$ .

-----Hết-----

## HƯỚNG DẪN CHẤM

| Câu | Ý  | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Điểm      |
|-----|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| I.  | 1. | $\sqrt{x^4 - x^2 + 4} + \sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} = 7x$<br>Từ phương trình đã cho $\Rightarrow x > 0$ , chia 2 vế của phương trình cho $x$ , ta được :<br>$\sqrt{x^4 - x^2 + 4} + \sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} = 7x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2} - 1} + \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2} + 20} = 7 \quad (1)$<br>$\text{Đặt } t = x^2 + \frac{4}{x^2} - 1, \text{ PT (1) trở thành: } \sqrt{t} + \sqrt{t + 21} = 7$<br>$\Leftrightarrow \sqrt{t(t + 21)} = 14 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 14 - t \geq 0 \\ t(t + 21) = (14 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4$<br>$\text{Với } t = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} - 1 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$<br>Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x = 1, x = 2$ là nghiệm | 2<br>Điểm |
|     | 2. | Tìm $m$ để phương trình: $-x^2 + 2x + 4\sqrt{(x+1)(3-x)} = m - 3$ có nghiệm.<br>+ ĐK: $-1 \leq x \leq 3$<br>$\text{Đặt } t = \sqrt{(x+1)(3-x)} = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} = \sqrt{-(x-1)^2 + 4} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq t \leq 2$<br>khi đó $-x^2 + 2x = t^2 - 3$<br>và phương trình $-x^2 + 2x + 4\sqrt{(x+1)(3-x)} = m - 3 \quad (1)$ có dạng $t^2 + 4t = m, t \in [0; 2]$ (2)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 2,0       |
|     |    | + Xét hàm số $f(t) = t^2 + 4t$ trên $[0; 2]$ , có đỉnh $I(-2; -4)$ .<br>Lập BBT $\Rightarrow$ PT (1) có nghiệm khi (2) có nghiệm $t \in [0; 2] \Rightarrow 0 \leq m \leq 12$ t/m                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,75      |
|     |    | Vậy $0 \leq m \leq 12$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,25      |
|     |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |           |
| II. | 1. | <b>Giải phương trình</b> $\cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{2} \quad (*)$<br>$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos x (\cos 2x + \cos x) + \frac{1}{2} \sin x (\cos 2x - \cos x) = \frac{1}{2}$<br>$\Leftrightarrow \cos 2x (\cos x + \sin x) = 1 - \cos^2 x + \sin x \cos x$<br>$\Leftrightarrow \cos 2x (\cos x + \sin x) = \sin^2 x + \sin x \cos x$<br>$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x) (\cos 2x - \sin x) = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                               | 1.00      |
|     |    | $\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1.00      |
|     | 2. | <b>Giải hệ phương trình</b> $\begin{cases} \frac{17-x^2}{y} = \sqrt{x} (3\sqrt{x} + 1) + 2\sqrt{63-14x-18y} & (1) \\ x(x^2 + 2x + 9) + 12y = 34 + 2(13-3y)\sqrt{17-6y} & (2) \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 2đ        |

|      |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |      |
|------|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|      |    | <p>ĐKXĐ: <math>0 \leq y \leq \frac{17}{6}; x \geq 0; 63 - 14x - 18y \geq 0</math></p> <p>(2) <math>\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 9x = (17 - 6y)\sqrt{17 - 6y} + 2(17 - 6y) + 9\sqrt{17 - 6y}</math></p> <p><math>\Leftrightarrow x = \sqrt{17 - 6y} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 17 - 6y \\ x \geq 0 \end{cases}</math></p> <p>Từ đó</p> <p>(1) <math>\Leftrightarrow \frac{6y}{y} = 3x + \sqrt{x} + 2\sqrt{62 - 14x + 3(x^2 - 17)}</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 3(2 - x) - \sqrt{x} = 2\sqrt{3(x^2 - 4x + 4)} - 2x</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 3(2 - x) - \sqrt{x} = 2\sqrt{3(2 - x)^2 - 2x} \quad (3)</math></p> <p>Đặt <math>u = 2 - x; v = \sqrt{x}</math></p> <p>(3) <math>\Leftrightarrow 3u - v = 2\sqrt{3u^2 - 2v^2}</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \begin{cases} 3u - v \geq 0 \\ u = v \\ u = -3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - v \geq 0 \\ u = v \\ 3u - v \geq 0 \\ u = -3v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{8}{3} \\ v \leq 0 \\ u = -3v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} (VN)</math></p> <p>Vậy hệ có nghiệm duy nhất <math>\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{8}{3} \end{cases}</math></p> | 0.50 |
|      |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.50 |
|      |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.50 |
|      |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.50 |
| III. | 1. | <p>Cho <math>x, y &gt; 0</math> thỏa mãn <math>x^2y + xy^2 = x + y + 3xy</math>.</p> <p>Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức</p> $P = x^2 + y^2 + \frac{(1 + 2xy)^2 - 3}{2xy}.$ <p>Ta có</p> $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy \Leftrightarrow xy(x + y) = x + y + 3xy \Leftrightarrow x + y = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + 3$ <p>Lại có <math>x + y = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + 3 \geq \frac{4}{x + y} + 3 \Rightarrow (x + y)^2 - 3(x + y) - 4 \geq 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow x + y \geq 4 (*)</math></p> $xy(x + y) = x + y + 3xy \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{xy} + \frac{3}{x + y} \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{x + y} = \frac{1}{xy}$ <p>Nên <math>P = (x + y)^2 + 2 - \frac{1}{xy} = (x + y)^2 + 1 + \frac{3}{x + y}</math></p> <p>Đặt <math>f(t) = t^2 + \frac{3}{t} + 1; (t \geq 4)</math></p> $P = f(t) = \frac{125}{128}t^2 + \left(\frac{3}{128}t^2 + \frac{3}{2t} + \frac{3}{2t}\right) + 1 \geq \frac{225}{8} + 3\sqrt[3]{\frac{27}{8^3}} + 1 = \frac{71}{4}$                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 2đ   |
|      |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.50 |
|      |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.50 |
|      |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.50 |

|     |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |           |
|-----|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|     |    | Vậy $P_{\min} = \frac{71}{4}$ khi $x = y = 2$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0.50      |
|     | 2. | <p>Chứng minh dãy số <math>(u_n)</math> là dãy số tăng bằng quy nạp</p> <p><math>\forall n \geq 3, u_n = \sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_{n-2}} &lt; 2\sqrt{u_n} \Rightarrow u_n^2 &lt; 4u_n \Rightarrow u_n &lt; 4</math> (vì <math>u_n &gt; 0</math>)</p> <p>Suy ra <math>(u_n)</math> là dãy số tăng và bị chặn trên nên dãy số <math>(u_n)</math> có giới hạn.</p> <p>Đặt <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \Rightarrow a = 4</math></p>                                                                                                                                                                                                            | 1         |
|     |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 1         |
|     |    | <b>Có bao nhiêu số hạng hữu tỉ trong khai triển <math>(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5})^{124}</math>.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>2đ</b> |
|     |    | Số hạng tổng quát thứ là                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0.50      |
|     |    | $T_{k+1} = C_{124}^k \cdot 3^{\frac{124-k}{2}} \cdot 5^{\frac{k}{4}}; (0 \leq k \leq 124; k \in \mathbb{N})$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |           |
|     | 1. | $T_{k+1} = C_{124}^k \cdot 3^{\frac{124-k}{2}} \cdot 5^{\frac{k}{4}}$ là số hữu tỉ khi $\begin{cases} 124-k:2 \\ k:4 \\ 0 \leq k \leq 124 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k:4 \\ 0 \leq k \leq 124 \Leftrightarrow k = 0; 4; 8; \dots; 124 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.50      |
|     |    | Đây là CSC có $u_1 = 0; d = 4; u_n = 124 \Rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow n = 32$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |           |
|     |    | Vậy có 32 số hạng là số hữu tỉ trong khai triển $(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5})^{124}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |           |
| IV. |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 1.00      |
|     | 2. | <p>Một hộp đựng 100 thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên 3 thẻ trong hộp, tính xác suất để tổng 3 số trong 3 thẻ lấy ra là một số chia hết cho 3.</p> <p><math> \Omega  = C_{100}^3</math></p> <p>Biến cố A = “tổng 3 số trong 3 thẻ lấy ra là một số chia hết cho 3”</p> <p>Có 33 số chia hết cho 3</p> <p>Có 34 số chia cho 3 dư 1</p> <p>Có 33 số chia cho 3 dư 2</p> <p><math>\Rightarrow  \Omega_A  = C_{33}^3 + C_{34}^3 + C_{33}^3 + C_{33}^1 C_{34}^1 C_{33}^1</math></p> <p><math>\Rightarrow P(A) = \frac{C_{33}^3 + C_{34}^3 + C_{33}^3 + C_{33}^1 C_{34}^1 C_{33}^1}{C_{100}^3}</math></p>                                           | 2đ        |
|     | 1. |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>2đ</b> |
|     |    | $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma} + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} = \frac{\cos^2 \alpha}{2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \beta}{2 - \sin^2 \beta} + \frac{\cos^2 \gamma}{2 - \sin^2 \gamma} \leq \frac{3}{4}$ $= \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \beta}{1 + \cos^2 \beta} + \frac{\cos^2 \gamma}{1 + \cos^2 \gamma} = 3 - \left( \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cos^2 \beta} + \frac{1}{1 + \cos^2 \gamma} \right) \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$ <p>Đẳng thức xảy ra khi <math>\alpha = \beta = \gamma</math></p> |           |
|     | 2  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2 đ       |
| V.  |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |           |
|     |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |           |

|  |  |                                                                                                                                                |  |
|--|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  |  | <p>Thiết diện là hình thang vuông</p> $AS = AB = a; MQ = \frac{2a - x}{2}; PQ = \frac{x}{2}; MN = AB = a \Rightarrow S = \frac{4a^2 - x^2}{8}$ |  |
|--|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

*Mọi cách giải đúng khác đáp án vẫn cho điểm tương ứng như hướng dẫn chấm*