Một phương pháp CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN KHÁNH TOÀN
(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

Trong quá trình chứng minh bất đẳng thức (BĐT), chúng ta gặp những BĐT mà ở đó các biến được hoán vị vòng quanh hay các biến có vai trò như nhau và đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau. Bài viết này, xin giới thiệu với bạn đọc một phương pháp khá hiệu quả để giải quyết một số bài toán thuộc dạng này thông qua các thí dụ sau.

★ Thí dụ 1. *Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x^2+xy+2y^2}+\sqrt{y^2+yz+2z^2}+\sqrt{z^2+zx+2x^2} \ge 2(x+y+z) \qquad (1)$$

Phân tích. Trong BĐT (1) các biến được hoán vị vòng quanh và đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$. Do vậy, nếu ta chọn được các số a, b để có BĐT

$$\sqrt{x^2+xy+2y^2} \ge a(x+by) \qquad (1^*)$$

thì nó là cơ sở để suy ra BĐT (1).

Với $x = y$ thì BĐT (1*) trở thành

$$\sqrt{x^2+x^2+2x^2} \ge a(x+bx) \Leftrightarrow 2 \ge a(b+1).$$

Từ đó có thể chọn $a=\dfrac{2}{b+1}$, $b\neq -1$, khi đó BĐT (1*) có dạng $\sqrt{x^2+xy+2y^2} \ge \dfrac{2}{b+1}(x+by)$

$$\Leftrightarrow (b^2+2b-3)x^2+(b^2-6b+1)xy+(-2b^2+4b+2)y^2 \ge 0.$$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}>0$, BĐT trên trở thành

$$(b^2+2b-3)t^2+(b^2-6b+1)t+(-2b^2+4b+2) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2+2b-3)(t-1)\left(t-\frac{-2b^2+4b+2}{b^2+2b-3}\right) \ge 0.$$

Để BĐT (1*) đúng, ta chọn b sao cho

$$\begin{cases} b^2+2b-3>0 \\ \dfrac{-2b^2+4b+2}{b^2+2b-3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow b=\frac{5}{3} \Rightarrow a=\frac{3}{4}.$$

Lời giải. Với $x, y > 0$, ta có

$$\sqrt{x^2+xy+2y^2} \ge \frac{3x+5y}{4} \qquad (a)$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (luôn đúng).

Tương tự, với mọi $x, y, z > 0$, ta có

$$\sqrt{y^2+yz+2z^2} \ge \frac{3y+5z}{4} \ (b); \quad \sqrt{z^2+zx+2x^2} \ge \frac{3z+5x}{4} \ (c)$$

Cộng theo vế ba BĐT (a), (b), (c) ta thu được BĐT (1). Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$. ❐

★ Thí dụ 2. *Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$.*

Chứng minh rằng $$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \ge \frac{3}{2} \qquad (2)$$

Phân tích. Trong BĐT (2) các biến có vai trò như nhau và đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. Do vậy, nếu ta chọn được các số α, β để có BĐT

$$\frac{a^2}{a+b} \ge \alpha a + \beta b \qquad (2^*)$$

thì nó là cơ sở để suy ra BĐT (2).

Với $a = b$ thì BĐT (2*) trở thành $\dfrac{a^2}{2a} \ge (\alpha+\beta)a$. Từ đây có thể chọn $\beta=\dfrac{1}{2}-\alpha$, khi đó BĐT (2*) có dạng

$$\frac{a^2}{a+b} \ge \alpha a+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)b$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)a^2-\frac{1}{2}ab+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)b^2 \ge 0.$$

Đặt $t=\dfrac{a}{b}>0$ thì BĐT trên trở thành

$$(1-\alpha)t^2-\frac{1}{2}t+\alpha-\frac{1}{2} \ge 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)(t-1)\left(t-\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{1-\alpha}\right) \ge 0.$$

Để chứng tỏ BĐT (2*) đúng, ta chọn α sao cho

$$\begin{cases} 1-\alpha>0 \\ \dfrac{\alpha-\frac{1}{2}}{1-\alpha}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\frac{3}{4} \Rightarrow \beta=\frac{1}{4}.$$

Lời giải. Với $a, b > 0$, ta có

$$\frac{a^2}{a+b} \ge \frac{3a-b}{4} \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Tương tự, với mọi $a, b, c > 0$, ta cũng có

$$\frac{b^2}{b+c} \ge \frac{3b-c}{4} \text{ và } \frac{c^2}{c+a} \ge \frac{3c-a}{4}.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên và thu gọn ta được BĐT (2). Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. ❐

★ Thí dụ 3. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3} \qquad (3)$$

Phân tích. Trong BĐT (3) các biến được hoán vị vòng quanh và đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. Như vậy, nếu ta chọn được các số α, β để có BĐT

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}\geq \alpha a+\beta b \qquad (3^*)$$

thì nó là cơ sở để suy ra BĐT (3).

Theo BĐT (3*) ta có

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}=(\alpha+\beta)(a+b+c).$$

Để có BĐT (3) chọn α, β sao cho $\alpha+\beta=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{3}-\beta$.

Như vậy cần tìm β để có BĐT

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}\geq\left(\frac{1}{3}-\beta\right)a+\beta b$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}+\beta\right)a^3-\frac{1}{3}a^2b-\frac{1}{3}ab^2-\beta b^3\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}+\beta\right)X^3-\frac{1}{3}X^2-\frac{1}{3}X-\beta\geq 0,\ \left(X=\frac{a}{b}>0\right)$$

$$\Leftrightarrow(X-1)\left(\left(\frac{2}{3}+\beta\right)X^2+\left(\frac{1}{3}+\beta\right)X+\beta\right)\geq 0.$$

Khi tam thức bậc hai $\left(\frac{2}{3}+\beta\right)X^2+\left(\frac{1}{3}+\beta\right)X+\beta$ có nghiệm $X = 1$ thì BĐT (3*) đúng.

Từ đó tìm được $\beta=-\frac{1}{3}$ và $\alpha=\frac{2}{3}$.

Lời giải. Với $a, b > 0$ ta có

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{2a-b}{3}\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Tương tự, với $a, b, c > 0$ ta có

$$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}\geq\frac{2b-c}{3}\ ;\ \frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{2c-a}{3}.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên và thu gọn ta được BĐT (3).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ☐

★ Thí dụ 4. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^4}{a^3+2b^3}+\frac{b^4}{b^3+2c^3}+\frac{c^4}{c^3+2a^3}\geq\frac{a+b+c}{3} \qquad (4)$$

Phân tích. Trong BĐT (4) các biến được hoán vị vòng quanh và đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. Do vậy, nếu ta chọn được các số α, β để có BĐT

$$\frac{a^4}{a^3+2b^3}\geq\alpha a+\beta b \qquad (4^*)$$

thì nó là cơ sở để suy ra BĐT (4).

Theo BĐT (4*) ta có

$$\frac{a^4}{a^3+2b^3}+\frac{b^4}{b^3+2c^3}+\frac{c^4}{c^3+2a^3}\geq(\alpha+\beta)(a+b+c).$$

Để có BĐT (4) chọn α, β sao cho $\alpha+\beta=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{3}-\beta$.

Như vậy cần tìm β để có BĐT sau

$$\frac{a^4}{a^3+2b^3}\geq\left(\frac{1}{3}-\beta\right)a+\beta b$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}+\beta\right)a^4-\beta a^3b+\left(2\beta-\frac{2}{3}\right)ab^3-2\beta b^4\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}+\beta\right)X^4-\beta X^3+\left(2\beta-\frac{2}{3}\right)X-2\beta\geq 0,\left(X=\frac{a}{b}>0\right)$$

$$\Leftrightarrow(X-1)\left(\left(\frac{2}{3}+\beta\right)X^3+\frac{2}{3}X^2+\frac{2}{3}X+2\beta\right)\geq 0.$$

Nhận thấy khi đa thức

$$\left(\frac{2}{3}+\beta\right)X^3+\frac{2}{3}X^2+\frac{2}{3}X+2\beta$$

có nghiệm $X = 1$ thì BĐT (4*) luôn đúng. Từ đó tìm được $\beta=-\frac{2}{3}$ và $\alpha=1$.

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$\frac{a^4}{a^3+2b^3}=a-\frac{2ab^3}{a^3+b^3+b^3}\geq a-\frac{2ab^3}{2ab^2}=a-\frac{2}{3}b \quad (d)$$

Tương tự với mọi $a, b, c > 0$ ta luôn có

$$\frac{b^4}{b^3+2c^3}\geq b-\frac{2}{3}c \quad (e);\quad \frac{c^4}{c^3+2a^3}\geq c-\frac{2}{3}a \quad (f).$$

Cộng theo vế ba BĐT (d), (e), (f) và rút gọn thu được BĐT (4).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ☐

★ Thí dụ 5. *Cho $a, b, c > 0$, $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (5)$$

Hướng dẫn. Dễ thấy BĐT (5) là hệ quả của BĐT

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Do đó, ta chứng minh BĐT

$$\frac{a}{b^2+c^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \qquad (5^*)$$

(Xem tiếp trang 10)

Hướng dẫn giải Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9
TỈNH VĨNH PHÚC - năm 2010

(Đề thi đã đăng trên THTT số 402, tháng 12 năm 2010)

Câu 1. Viết lại PT thứ hai của hệ về dạng

$$y^2-(4x+8)y+(16+16x-5x^2)=0.$$

Coi đây là PT bậc hai ẩn y, x là tham số. Có $\Delta'=9x^2$. Từ đó, tìm được $y=4-x$ và $y=5x+4$.

ĐS. $(x\,;y)\in\{(0\,;4)\,;(-2\,;6)\,;(-2\,;-6)\,;(-5\,;9)\,;(19\,;99)\}$.

Câu 2. Gọi a là số lẻ lớn nhất mà $a^2\le n$. Khi ấy $n<(a+2)^2$. Nếu $a\ge 7$ thì $a-4$, $a-2$, a là các ước lẻ của n nên $n\,\vdots\,a(a-2)(a-4)$. Suy ra

$$a(a-2)(a-4)\le n<(a+2)^2\Rightarrow a^3-7a^2+4a-4<0$$

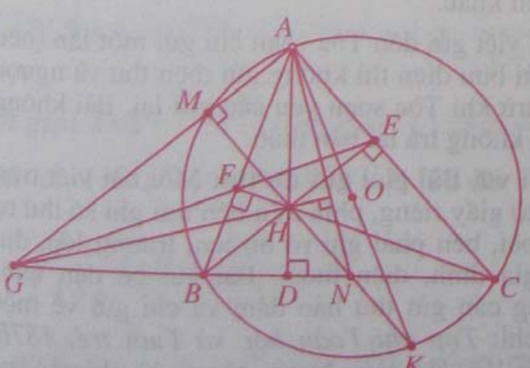
$\Rightarrow a^2(a-7)+4(a-1)<0.$ vô lí (vì $a\ge 7$).

Do đó $a=1$ hoặc $a=3$ hoặc $a=5$.

- Nếu $a=1$ thì $1^2\le n<3^2$.
- Nếu $a=3$ thì $3^2\le n<5^2$ và $n\,\vdots\,3$.
- Nếu $a=5$ thì $5^2\le n<7^2$ và $n\,\vdots\,3$, $n\,\vdots\,5$.

ĐS. $n\in\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9;\,12\,;15\,;18\,;21\,;24\,;30\,;45\}$.

Câu 3. 1) Do các tứ giác $AMBC$ và $BFEC$ nội tiếp nên $GF.GE=GM.GA$ $(=GB.GC)$, do đó tứ giác $AMFE$ nội tiếp.



2) Từ các tứ giác $AEMF$ và $AEHF$ nội tiếp suy ra điểm M nằm trên đường tròn đường kính AH, do đó $HM\perp MA$. Tia MH cắt lại đường tròn (O) tại K, do $\widehat{AMK}=90^o$ nên AK là đường kính của (O). Suy ra $KC\perp CA$, $KB\perp BA$. Dẫn đến $KC//BH$, $KB//CH$, do đó $BHCK$ là hình bình hành. Suy ra KH đi qua điểm N. Khi đó ba điểm M, H, N thẳng hàng. Trong tam giác GAN có hai đường cao AD, NM cắt nhau tại H, nên H là trực tâm. Suy ra $GH\perp AN$ (đpcm).

Câu 4. Dễ thấy $(a+b)(b+c)(c+a)$

$=c^2(a+b)+a^2(b+c)+b^2(c+a)+2abc.$

Áp dụng BĐT Cauchy - Bunyakovsky - Schwarz, ta có

$$\left(c^2(a+b)+a^2(b+c)+b^2(c+a)+2abc\right)\times\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2\sqrt[3]{abc}}\right)\ge$$

$$\ge\left(c\sqrt{a+b}.\frac{1}{\sqrt{a+b}}+a\sqrt{b+c}.\frac{1}{\sqrt{b+c}}+b\sqrt{c+a}.\frac{1}{\sqrt{c+a}}+\sqrt{2abc}.\sqrt{\frac{1}{2\sqrt[3]{abc}}}\right)^2$$

$=\left(c+a+b+\sqrt[3]{abc}\right)^2$. Suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 5. Trên mỗi hình vuông con, kích thước 2×2 chỉ có không quá 1 số chia hết cho 2 và có không quá 1 số chia hết cho 3.

Chia bảng thành 25 hình vuông kích thước 2×2, có nhiều nhất 25 số chia hết cho 2 và có nhiều nhất 25 số chia hết cho 3. Do đó, có ít nhất $100-25.2=50$ số nguyên tố cùng nhau với 2 và 3. Vì vậy chúng phải là một trong các số 1, 5, 7. Từ đó, theo nguyên lí Dirichlet, có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

TẠ MINH HIẾU
(*GV Trường THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc*) giới thiệu

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, VINH, NGHỆ AN

NĂM HỌC 2010 - 2011

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (3,5 *điểm*)

a) Giải phương trình $x^2+8x-3=2\sqrt{x(8+x)}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3=4x+2y \\ x^2-1=3(1-y^2). \end{cases}$

Câu 2. (1 *điểm*)

Tìm tất cả các số nguyên n để $n^4+n^3+n^2$ là số chính phương.

Câu 3. (2 *điểm*)

Cho tam giác ABC và AD là đường phân giác trong. Trên đoạn AD lấy hai điểm M, N (M, N khác A và D) sao cho $\widehat{ABN}=\widehat{CBM}$. Đường thẳng BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM tại điểm thứ hai E. Đường thẳng CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng ba điểm A, E, F thẳng hàng.

Câu 4. (1,5 *điểm*)

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O\,;R)$ và M là một điểm bất kì trên cung nhỏ BC (M khác B, C). Đường tròn $(O'\,;R')$ tiếp xúc trong với đường tròn $(O\,;R)$ tại điểm M (với $R'<R$). Các đoạn thẳng MA, MB, MC lần lượt cắt đường tròn $(O'\,;R')$ tại các điểm thứ hai D, E, F. Từ A, B, C kẻ các tiếp tuyến AI, BJ, CK với đường tròn $(O'\,;R')$, trong đó I, J, K là các tiếp điểm. Chứng minh rằng DE song song với AB và $AI=BJ+CK$.

Câu 5. (2 *điểm*)

a) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}-\sqrt{abc}.$$

b) Trong mặt phẳng cho 2010 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào cùng nằm trên một đường tròn. Chứng minh rằng trong 2010 điểm đã cho, có thể dựng được một đường tròn đi qua ba điểm, chứa 1000 điểm và không chứa 1007 điểm còn lại.

THÁI VIẾT THẢO
(Sở GD&ĐT Nghệ An) giới thiệu

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN một số HÀM SỐ VÔ TỈ

LÊ HỒ QUÝ
(GV THPT Duy Tân, Kon Tum)

Trong bài viết này, chúng tôi xin giới thiệu cách tính một số dạng cơ bản của tích phân hàm số vô tỉ thường gặp trong các kì thi tốt nghiệp Trung học phổ thông và tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng.

1. Tính tích phân dạng

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx,$$

trong đó $m, n, \ldots, r, s$ là các số nguyên dương và a, b, c, d là các hằng số.

Cách giải. Đặt $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, với k là bội chung nhỏ nhất (BCNN) của các mẫu số $\{n,\ldots,s\}$.

★**Thí dụ 1.** *Tính tích phân* $I=\int_1^2\frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx.$

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{x-1}$ thì $x=t^2+1 \Rightarrow dx=2tdt$.

Khi $x=1\Rightarrow t=0$; $x=2\Rightarrow t=1$. Từ đó

$$I=\int_0^1\frac{t^2+1}{1+t}2tdt=2\int_0^1\frac{t^3+t}{1+t}dt$$

$$=2\int_0^1\left(t^2-t+2-\frac{2}{t+1}\right)dt=\frac{11}{3}-4\ln 2.\ \square$$

★**Thí dụ 2.** *Tính tích phân* $I=\int_{-1}^0\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx.$

Lời giải. Để ý rằng BCNN $(2, 3) = 6$. Đặt $t^6=x+1$ thì $dx=6t^5dt$.

Khi $x=-1\Rightarrow t=0$; $x=0\Rightarrow t=1$. Vậy

$$I=6\int_0^1\frac{t^5-t^8}{1+t^2}dt$$

$$=6\int_0^1\left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt$$

$$=6\left(-\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_0^1$$

$$+3\int_0^1\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}-6\int_0^1\frac{dt}{t^2+1}$$

$$=\frac{199}{70}+3\ln(t^2+1)\Big|_0^1-6\int_0^1\frac{dt}{t^2+1}$$

$$=\frac{199}{70}+3\ln 2-\frac{3\pi}{2}.\ \square$$

2. Tính tích phân dạng

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

trong đó a, b, c là các hằng số, $a\neq 0$.

Cách giải chung. Có thể tìm lời giải theo một trong hai hướng sau

• *Hướng thứ nhất*. (Lượng giác hóa). Xét tam thức bậc hai dưới dấu căn

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

Đặt $t=x+\frac{b}{2a}$ thì $dt=dx$.

Tùy theo dấu của biệt thức Δ và a mà ta có thể đưa tích phân trên về một trong ba tích phân sau

$$\int R_1\left(t,\sqrt{\alpha^2+t^2}\right)dt;\ \int R_2\left(t,\sqrt{\alpha^2-t^2}\right)dt;$$

$$\int R_3\left(t,\sqrt{t^2-\alpha^2}\right)dt.$$

Để tính các tích phân này, ta thường đặt các biến phụ tương ứng

$$t=\alpha\tan u,\ \ t=\alpha\sin u,\ \ t=\frac{\alpha}{\cos u}.$$

• *Hướng thứ hai.* (Hữu tỉ hóa). Sử dụng các *Phép biến đổi Euler*. Cụ thể là

*) Với $a>0$ thì đặt $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x$.

*) Với $c>0$ thì đặt $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$.

Nếu ax^2+bx+c có nghiệm x_1 và x_2 thì đặt

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$

hoặc $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2)$.

★ Thí dụ 3. *Tính tích phân*

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Lời giải. Đặt $t=x-1+\sqrt{(x-1)^2+4}$ thì

$$dt=\left(1+\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+4}}\right)dx=\frac{t\,dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}$$

$$\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=\frac{dt}{t}.$$

Khi $x=-1\Rightarrow t=2(\sqrt{2}-1)$; $x=1\Rightarrow t=2$.

Từ đó $I=\displaystyle\int_{2(\sqrt{2}-1)}^{2}\frac{dt}{t}=\ln(\sqrt{2}+1)$. □

Lưu ý. 1) Ta cũng có thể đặt $x-1=2\tan t$.

2) Để tính tích phân dạng $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, ta thường tách bình phương đủ trong tam thức bậc hai rồi đưa về tính các tích phân cơ bản dạng

$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$ hoặc dạng

$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\lambda}\right|+C.$

★ Thí dụ 4. *Tính tích phân*

$$I=\int_0^1\frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Lời giải. Ta có

$$I=\int_0^1\frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}+2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(x^2+4x+5)}{\sqrt{x^2+4x+5}}+2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}}$$

$$=\sqrt{10}-\sqrt{5}+2\ln\frac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}}.\ \square$$

Lưu ý. Để tính tích phân $I=\displaystyle\int\frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ta biến đổi tích phân đó về dạng

$$I=\frac{m}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

★ Thí dụ 5. *Tính tích phân*

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+5}}.$$

Lời giải. Ta có $I=\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{d(2x+3)}{(2x+3)\sqrt{(2x+3)^2-4}}$.

Đặt $2x+3=\dfrac{1}{t}$ thì $d(2x+3)=-\dfrac{dt}{t^2}$.

Khi $x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$; $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=\dfrac{1}{4}$.

Lúc đó $I=\displaystyle-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}}\frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-4}}=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-4t^2}}$.

Đặt $t=\dfrac{1}{2}\sin u$, $u\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$ thì $dt=\dfrac{1}{2}\cos u\,du$.

Khi $t=\dfrac{1}{4}\Rightarrow u=\dfrac{\pi}{6}$; $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=\dfrac{\pi}{2}$.

Từ đó $I=\displaystyle\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u\,du}{\cos u}=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}du=\frac{\pi}{12}$. □

Lưu ý. Với tích phân dạng

$$\int\frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}\quad(a(m^2+n^2)\neq 0),$$

ngoài cách giải chung bằng *phép thế lượng giác*, ta còn có thể giải bằng *phép thế đại số*:

Đặt $t=\sqrt{ax^2+bx+c}$; hoặc $\frac{1}{t}=\sqrt{ax^2+bx+c}$;

hoặc $t=mx+n$; hoặc $\frac{1}{t}=mx+n$.

★ Thí dụ 6. *Tính tích phân*

$$I=\int_0^1\sqrt{1+6x-3x^2}\,dx.$$

Lời giải. Ta có $I=\int_0^1\sqrt{4-3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

Đặt $x-1=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì

$\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\mathrm{d}t.$

Khi $x=0\Rightarrow t=-\frac{\pi}{3}$; $x=1\Rightarrow t=0$. Ta có

$$I=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2}.\square$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân sau

1) $I=\int_0^2\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}\mathrm{d}x$; 2) $I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}$

3) $I=\int_0^{\frac{63}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt{2x+1}}$; 4) $I=\int_4^5\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+3}}$;

5) $I=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4}}$; 6) $I=\int_{-3}^{-2}\frac{(7x-4)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x-3}}$;

7) $I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}$;

8) $I=\int_0^1(x+7)\sqrt{3+2x-x^2}\,\mathrm{d}x.$

(*HD*: Đặt $x=1+2\cos 2t$).

Mừng Xuân TÂN MÃO

Hội tụ thơ vui đón Tết Mèo
Mặn tình yêu toán lắm cheo leo
Đời vui giông tố không chùn bước
Nghiệp trọng chông gai vẫn cứ trèo
Lẽ sống khuôn vàng trò, bạn quý
Gương trong thước ngọc cháu con theo
Không gian hội nhập chân trời mở
Giỏi toán vươn xa chẳng chịu nghèo.

ĐÀO TAM
(GV khoa Toán, ĐH Vinh)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 4

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (*2 điểm*) Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ (1) trong đó m là tham số.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m=-1$.

2) Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm này có bán kính bằng 1.

Câu II. (*2 điểm*)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 1+xy+\sqrt{xy}=x \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x}}+y\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+3\sqrt{y}. \end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$16\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=4.\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^x x}-2\sin 4x.$$

Câu III. (*1 điểm*)

1) Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\pi} e^{2x}\sin^2 x\,dx.$

2) Tính tổng

$$1^2C_{2011}^1 2^{2010}+2^2C_{2011}^2 2^{2009}+3^3C_{2011}^3 2^{2008}+\ldots$$
$$+2011^2C_{2011}^{2011}.2^0.$$

Câu IV. (*1 điểm*) Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, đường cao SA. Gọi M là trung điểm SC; N, P lần lượt nằm trên SB và SD sao cho $\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{SP}{SD}=\dfrac{2}{3}$. Mặt phẳng (MNP) chia hình chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Câu V. (*1 điểm*) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$-\frac{\sqrt{3}}{18}\le(a-b)(b-c)(c-a)\le\frac{\sqrt{3}}{18}.$$

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (*2 điểm*) 1) Tính diện tích tam giác đều nội tiếp elip (E): $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$, nhận điểm $A(0\,;2)$ là đỉnh và trục tung làm trục đối xứng.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm ba điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng

(d_1) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-2}$;

(d_2) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$; (d_3) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

sao cho M, N, P thẳng hàng đồng thời N là trung điểm của đoạn thẳng MP.

Câu VIIa. (*1 điểm*) Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Vật lí có 50 câu trắc nghiệm, mỗi câu có bốn phương án, trả lời đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Một thí sinh đã làm được 40 câu, trong đó đúng 32 câu. Ở 10 câu còn lại anh ta chọn ngẫu nhiên một trong bốn phương án. Tính xác suất để thí sinh đó đạt 8 điểm trở lên.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VIb. (*2 điểm*) 1) Tính diện tích tam giác đều nội tiếp parabol (P): $y^2=2x$, nhận đỉnh của parabol làm một đỉnh và trục hoành Ox làm trục đối xứng.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

(d_1) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ và (d_2) $\begin{cases} x=2-t \\ y=-1+t\,; \\ z=t \end{cases}$

góc giữa đường thẳng (d_3) $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$ với mặt phẳng (α): $x+y-z+2=0$.

Câu VIIb. (*1 điểm*) Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Hóa học có 50 câu trắc nghiệm, mỗi câu có bốn phương án, trả lời đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Một thí sinh đã làm được 40 câu, trong đó đúng 32 câu. Ở 10 câu còn lại anh ta chọn ngẫu nhiên một trong bốn phương án. Tính xác suất để thí sinh đó chỉ đạt 7 điểm trở xuống.

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Q

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 3

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) PT hoành độ giao điểm có dạng

$$x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0 \qquad (1)$$

Trước hết tìm m để PT

$$t^2-2(m+1)t+(2m+1)=0\ (t=x^2)$$

có hai nghiệm $0<t_1<t_2$.

ĐK là $m>-\dfrac{1}{2}$ và $m\neq 0$ (2)

Khi đó PT (1) có bốn nghiệm

$x_1=-\sqrt{t_2},\ x_2=-\sqrt{t_1},\ x_3=\sqrt{t_1},\ x_4=\sqrt{t_2}$;

Do x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng với công sai d nên $x_4=x_1+3d$; $x_3=x_2+d$. Từ đó $t_2=9t_1$. Từ định lí Viète có $t_1+t_2=2(m+1);\ \ t_1.t_2=2m+1,\ \ t_2=9t_1$.

Tìm được $m=4$; $m=-\dfrac{4}{9}$ (thỏa mãn (2)).

Câu II. 1) Đưa PT về dạng

$$\cos 2x(\sin 3x-\cos 2x)=0$$

Đáp số. $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$; $x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2m\pi}{5}$;

$x=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ (k, m, n nguyên).

2) Đưa PT thứ nhất của hệ về dạng

$$(3x-1)(2x+1-y)=0.$$

ĐS. Hệ đã cho có bốn nghiệm $(x;y)$ là

$$\left(\frac{1}{3};\frac{2\sqrt2}{3}\right);\left(\frac{1}{3};-\frac{2\sqrt2}{3}\right);(0;1);\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right).$$

Câu III. Từ $f'(x)=A.3^x.\ln 3$ và $f'(0)=2$, suy ra $A=\dfrac{2}{\ln 3}$.

$$\int_1^2(A.3^x+B)\mathrm{d}x=12 \Rightarrow \left(A.\frac{3^x}{\ln 3}+Bx\right)\Bigg|_1^2=12,$$

dẫn đến $\dfrac{6A}{\ln 3}+B=12 \Rightarrow B=12\left(1-\dfrac{1}{\ln^2 3}\right)$.

Câu IV. Từ định lí ba đường vuông góc ta thấy các mặt bên hình chóp đều là các tam giác vuông. Vậy năm điểm S, A, B, C, D cùng nằm trên mặt cầu đường kính SC.

ĐS. $V_{\text{h.cầu}}=\pi a^3.\sqrt6$.

Câu V. Ta có

$$f'(x)=\frac{\sin\frac{3x}{2}-1}{\left(\cos x+2\sin\frac{x}{2}\right)^2}\le 0,\ \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Suy ra $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\le f(x)\le f(0)$.

ĐS. $\min f(x)=1+\dfrac{\sqrt2}{2}$; $\max f(x)=2$.

Câu VIa. 1) $B(3;0)$, $C(0;4)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC từ $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$ và $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0$, được $H(-3;-2)$.

2) Gọi H, K, M lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ P lên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz) và (Oxz). Tìm được $H(2;3;0)$; $K(0;3;-5)$; $M(2;0;-5)$. PT mặt phẳng (HKM) có dạng

$$15x+10y-6z-60=0.$$

Câu VIIa. Ta có

$$z=\left(2\cos^2\frac{5\pi}{12}+i.2\sin\frac{5\pi}{12}.\cos\frac{5\pi}{12}\right)^{24}$$

$$=2^{24}.\cos^{24}\frac{5\pi}{12}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)^{24}$$

$$=2^{24}.\cos^{24}\frac{5\pi}{12}(\cos 10\pi+i\sin 10\pi)$$

$=2^{24}\cos^{24}\dfrac{5\pi}{12}$. Nên phần ảo của z bằng 0.

Câu VIb. Đường tròn (C) có tâm I (3; 1), bán kính R = 3. Đường thẳng d có PT $x-2y+m=0$. Gọi A, B là hai giao điểm của (C) và d; H là trung điểm AB thì $AH=2$.

Ta có $IH=\sqrt{R^2-AH^2}=\sqrt5$ và

$$d(I,d)=IH=\frac{|m+1|}{\sqrt5}=\sqrt5.$$

Bài toán từ bìa báo

Cầm tờ Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tháng 12 năm 2009 có dòng chữ:

45 năm 1964 - 2009

45 NĂM (1964-2009)

Suy nghĩ bình thường là Tờ tạp chí của chúng ta đã được 2009 – 1964 = 45 năm rồi. Nhưng để ý kĩ dòng chữ trên một chút, tôi tự hỏi liệu có "1964" – "2009" = "45" không? Trong quá trình tìm tòi suy nghĩ, tôi đã phát hiện một đẳng thức đẹp sau đây

$$(1+9+6+4)-(2+0+0+9)=(4+5)$$

Sau khi tìm được đẳng thức trên, tôi đặt ra câu hỏi tiếp, vậy trong thế kỉ 21 của chúng ta có những năm nào khác kết hợp với năm 1964 để tạo thành một đẳng thức đẹp như trên hay không? Nếu có thì có bao nhiêu năm? Các câu hỏi đó đã dẫn tới những bài toán tìm số rất thú vị? Các bạn hãy tìm thử xem?

HOÀNG GIA HÙNG

(GV THPT Bắc Duyên Hà, Hưng Hà, Thái Bình)

Tìm được $m = 4$; $m = -6$. Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn đề bài
$$x-2y+4=0;\quad x-2y-6=0.$$

2) PT mặt phẳng (P) có dạng $x+y-2z-m=0$.

Tọa độ giao điểm A của d_1 với (P):
$$A(1-2m;-1-m;-m).$$

Tọa độ giao điểm B của d_2 với (P):
$$B=(-2-m;-4-2m;-3-m).$$

Từ đó $AB=\sqrt{2m^2+17}$, AB ngắn nhất khi $m=0$. Do đó PT (P) là $x+y-2z=0$.

Câu VIIb. Đặt $u=4^{x+y-1}$, $v=3.4^{2y-1}$ thì $u.v=1$, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases}u+v=2\\u.v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\v=1.\end{cases}$$

Do đó $\begin{cases}x+y-1=0\\2y-1=-\log_4 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(1+\log_4 3)\\y=\dfrac{1}{2}(1-\log_4 3).\end{cases}$

TRẦN VĂN HẠNH

(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

MỘT PHƯƠNG PHÁP... *(Tiếp trang 2)*

Chứng minh BĐT (5*). Xét hiệu
$$H=\frac{a}{b^2+c^2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{a}{1-a^2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$
$$=\frac{a\left(\sqrt{3}a-1\right)^2\left(\sqrt{3}a+2\right)}{2\left(1-a^2\right)}.$$

Vì $a\in(0;1)$ nên $H\ge 0$, do vậy BĐT (5*) luôn đúng. Từ đó suy ra BĐT (5). □

BÀI TẬP

1. Cho $x, y, z>0$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{\sqrt{x^2+2y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{y^2+2z^2}}{yz}+\frac{\sqrt{z^2+2x^2}}{zx}\ge\sqrt{3}.$$

2. Cho $x, y, z>0$ và $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng
$$x\sqrt{2y^2+3z^2}+y\sqrt{2z^2+3x^2}+z\sqrt{2x^2+3y^2}\ge\sqrt{5}.$$

3. Cho $x, y, z>0$ và $xyz=1$. Chứng minh rằng
$$x\sqrt{y^2+2z^2}+y\sqrt{z^2+2x^2}+z\sqrt{x^2+2y^2}\ge 3\sqrt{3}.$$

4. Cho $x, y, z>0$. Chứng minh rằng
$$\frac{\sqrt{x^2+2y^2}}{z}+\frac{\sqrt{y^2+2z^2}}{x}+\frac{\sqrt{z^2+2x^2}}{y}\ge\sqrt{3}.$$

5. Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a^2-bc}{b+c}+\dfrac{b^2-ca}{c+a}+\dfrac{c^2-ab}{a+b}\ge 0.$

b) $\dfrac{a^2+b^2}{b+c}+\dfrac{b^2+c^2}{c+a}+\dfrac{c^2+a^2}{a+b}\ge a+b+c.$

6. Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a^3}{(a+b)^2}+\dfrac{b^3}{(b+c)^2}+\dfrac{c^3}{(c+a)^2}\ge\dfrac{a+b+c}{4}.$

b) $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+a^2}\ge\dfrac{a+b+c}{2}.$

7. Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng
$$\frac{a^3}{a^2+3ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+3bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+3ca+a^2}\ge\frac{a+b+c}{5}.$$

8. Cho $a, b, c\ge 1$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a^3}{a^2+1}+\dfrac{b^3}{b^2+1}+\dfrac{c^3}{c^2+1}\ge\dfrac{3}{2}.$

b) $\dfrac{a^4}{a^2+2}+\dfrac{b^4}{b^2+2}+\dfrac{c^4}{c^2+2}\ge 1.$

9. Cho $a, b, c, d>0$ và $ab+bc+cd+da=4$. Chứng minh rằng
$$\frac{a^4}{a^3+2b^3}+\frac{b^4}{b^3+2c^3}+\frac{c^4}{c^3+2d^3}+\frac{d^4}{d^3+2a^3}\ge\frac{4}{3}.$$

Đọc lại cho đúng: Trên Tạp chí TH&TT số 402 trang 1 dòng 1 và 2 từ dưới lên, bên phải, đã in "$x=3$" xin đọc lại là "$x=0$". Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

Trong hình học phẳng, tâm tỉ cự không chỉ là một khái niệm đẹp mà còn là một công cụ đầy hiệu lực trong việc giải các bài toán khó. Tuy nhiên, cho đến nay chúng ta vẫn chưa có một thuật toán tốt để có thể giải quyết nhanh chóng những bài toán liên quan tới khái niệm tâm tỉ cự. Vì lẽ đó, bài báo này xin giới thiệu với bạn đọc những thuật toán như vậy, gọi là những thuật toán biến đổi tâm tỉ cự trong hình học phẳng.

Các thuật toán biến đổi tâm tỉ cự TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ KÍ HIỆU

1. Chất điểm

Kí hiệu $\mathbb{P}$ là tập hợp các điểm trên mặt phẳng, $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực. Tích Descartes $\mathbb{P}\times\mathbb{R}$ được gọi là tập hợp các chất điểm trên mặt phẳng. Thông thường mỗi chất điểm được viết dưới dạng (A, a) và A, a theo thứ tự được gọi là toạ độ thứ nhất, toạ độ thứ hai của (A, a). Tuy nhiên, để thuận lợi cho việc làm toán, trong bài báo này, thay cho cách viết (A, a) ta viết $\frac{A}{a}$; thay cho cách gọi A là toạ độ thứ nhất của (A, a) và a là toạ độ thứ hai của (A, a), ta gọi A là phần hình của $\frac{A}{a}$ và a là phần số của $\frac{A}{a}$.

2. Hai chất điểm bằng nhau, trùng nhau

Hai chất điểm được gọi là bằng nhau nếu phần hình của chúng trùng nhau và phần số của chúng bằng nhau.

Để biểu thị các chất điểm $\frac{A}{a}$ và $\frac{B}{b}$ bằng nhau, ta viết $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$.

Hai chất điểm được gọi là trùng nhau nếu phần hình của chúng trùng nhau.

Để biểu thị các chất điểm $\frac{A}{a}$ và $\frac{B}{b}$ trùng nhau, ta viết $\frac{A}{a}\equiv\frac{B}{b}$.

Đương nhiên, nếu $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$ thì $\frac{A}{a}\equiv\frac{B}{b}$.

Để tránh nhầm lẫn, xin lưu ý rằng trong bài báo này có tới bốn quan hệ bằng nhau.

+ Quan hệ bằng nhau trong $\mathbb{R}$, kí hiệu là $=$.

+ Quan hệ bằng nhau trong $\mathbb{P}$, kí hiệu là $\equiv$.

Theo thói quen, trong $\mathbb{P}$, thuật ngữ "*bằng nhau*" được thay bằng thuật ngữ "*trùng nhau*".

+ Quan hệ bằng nhau trong $\mathbb{P}\times\mathbb{R}$, kí hiệu là $=$.

+ Quan hệ bằng nhau trong $V[\mathbb{P}]$ (tập hợp các vectơ trên $\mathbb{P}$), kí hiệu là $=$.

3. Hệ chất điểm, tâm tỉ cự của hệ chất điểm

Tập hợp các chất điểm $\left\{\frac{A_1}{a_1},\frac{A_2}{a_2},...,\frac{A_n}{a_n}\right\}$ được gọi là *hệ chất điểm* nếu $\sum_{1\le i\le n} a_i \neq 0$.

Để cho đơn giản, thay cho cách viết $\left\{\frac{A_1}{a_1}, \frac{A_2}{a_2}, ..., \frac{A_n}{a_n}\right\}$ ta viết $\left\{\frac{A_i}{a_i}\right\}_{1\le i\le n}$.

Kết quả sau đây là quen thuộc.

Nếu $\left\{\frac{A_i}{a_i}\right\}_{1\le i\le n}$ là hệ các chất điểm thì tồn tại duy nhất điểm O sao cho $\sum_{1\le i\le n} a_i.\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$.

Điểm O trong đẳng thức trên được kí hiệu là $\left[\frac{A_1}{a_1},\frac{A_2}{a_2},...,\frac{A_n}{a_n}\right]$, hay đơn giản hơn $\left[\frac{A_i}{a_i}\right]_{1\le i\le n}$.

Nhờ kết quả quan trọng trên, ta có định nghĩa sau.

Tâm tỉ cự của hệ chất điểm $\left\{\frac{A_i}{a_i}\right\}_{1\le i\le n}$ *là một chất điểm có phần hình là* $\left[\frac{A_i}{a_i}\right]_{1\le i\le n}$ *và phần số là* $\sum\limits_{1\le i\le n} a_i$.

Khi $a_1=a_2=...=a_n$, điểm $\left[\frac{A_i}{a_i}\right]_{1\le i\le n}$ được gọi là *trọng tâm* của hệ chất điểm $\left\{\frac{A_i}{a_i}\right\}_{1\le i\le n}$.

Để cho đơn giản, khi không có sự nhầm lẫn, thay cho kí hiệu $\dfrac{\left[\frac{A_i}{a_i}\right]_{1\le i\le n}}{\sum\limits_{1\le i\le n} a_i}$ ta dùng kí hiệu $\left[\frac{A_i}{a_i}\right]_{1\le i\le n}$ để chỉ tâm tỉ cự của hệ chất điểm $\left\{\frac{A_i}{a_i}\right\}_{1\le i\le n}$.

Quy ước trên rất có lợi khi giải các bài toán liên quan tới khái niệm tâm tỉ cự.

II. CÁC THUẬT TOÁN BIẾN ĐỔI TÂM TỈ CỰ

Các định lí sau đây cho ta các thuật toán biến đổi tâm tỉ cự trong hình học phẳng.

Định lí 1. Nếu $\{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n)\}$ là một hoán vị của $\{1,2,...,n\}$ thì

$$\left[\frac{A_{\sigma(i)}}{a_{\sigma(i)}}\right]_{1\le i\le n}=\left[\frac{A_i}{a_i}\right]_{1\le i\le n}.$$

Chú ý. Thuật toán trên được gọi là *thuật toán giao hoán.*

Định lí 2. Với mọi $k\neq 0$ thì

$$\left[\frac{A_i}{ka_i}\right]_{1\le i\le n}\equiv\left[\frac{A_i}{a_i}\right]_{1\le i\le n}.$$

Định lí 3. Với mọi A thì $A\equiv\left[\frac{A}{a_i}\right]_{1\le i\le n}$.

Định lí 4. $A\equiv\left[\frac{A_1}{a_1},\frac{A_2}{a_2},...,\frac{A_n}{a_n}\right]$ khi và chỉ khi

$$A\equiv\left[\frac{A_1}{a_1},\frac{A_2}{a_2},...,\frac{A_n}{a_n},\frac{A}{a}\right].$$

Định lí 5. Nếu $\left\{\frac{A_i}{a_i}\right\}_{1\le i\le n}$ là hệ chất điểm và $\left\{\frac{B}{b_i}\right\}_{1\le i\le m}$ là tập hợp chất điểm thoả mãn $\sum\limits_{1\le i\le m} b_i=0$ thì

$$\left[\frac{A_i}{a_i}\right]_{1\le i\le n}=\left[\frac{A_1}{a_1},\frac{A_2}{a_2},...,\frac{A_n}{a_n},\frac{B}{b_1},\frac{B}{b_2},...,\frac{B}{b_m}\right].$$

Định lí 6. Nếu hai hệ chất điểm $\left\{\frac{A_i}{a_i}\right\}_{1\le i\le n}$ và $\left\{\frac{B_i}{b_i}\right\}_{1\le i\le m}$ thoả mãn $\sum\limits_{1\le i\le n} a_i+\sum\limits_{1\le i\le m} b_i\neq 0$ thì

$$\left[\frac{A_1}{a_1},\frac{A_2}{a_2},...,\frac{A_n}{a_n},\frac{B_1}{b_1},\frac{B_2}{b_2},...,\frac{B_m}{b_m}\right]$$
$$=\left[\left[\frac{A_1}{a_1},\frac{A_2}{a_2},...,\frac{A_n}{a_n}\right],\left[\frac{B_1}{b_1},\frac{B_2}{b_2},...,\frac{B_m}{b_m}\right]\right].$$

Chú ý. Thuật toán trên được gọi là *thuật toán kết hợp.*

Định lí 7. Nếu $\left\{\frac{A_i}{a_i}\right\}_{1\le i\le n}$ và $\left\{\frac{B_i}{b_i}\right\}_{1\le i\le m}$ là hai hệ chất điểm và $\left\{\frac{C_i}{c_i}\right\}_{1\le i\le p}$ là tập hợp các chất điểm sao cho

$\sum\limits_{1\le i\le n} a_i+\sum\limits_{1\le i\le p} c_i=\sum\limits_{1\le i\le m} b_i+\sum\limits_{1\le i\le p} c_i\neq 0$ thì

$\left[\frac{A_1}{a_1},\frac{A_2}{a_2},...,\frac{A_n}{a_n}\right]=\left[\frac{B_1}{b_1},\frac{B_2}{b_2},...,\frac{B_m}{b_m}\right]$ khi và chỉ khi

$$\left[\frac{A_1}{a_1},\frac{A_2}{a_2},...,\frac{A_n}{a_n},\frac{C_1}{c_1},\frac{C_2}{c_2},...,\frac{C_p}{c_p}\right]$$
$$=\left[\frac{B_1}{b_1},\frac{B_2}{b_2},...,\frac{B_m}{b_m},\frac{C_1}{c_1},\frac{C_2}{c_2},...,\frac{C_p}{c_p}\right].$$

Định lí 8. Nếu $O \equiv \left[\frac{A_1}{a_1}, \frac{A_2}{a_2}, \ldots, \frac{A_n}{a_n}\right]$ và f hoặc là phép chiếu song song hoặc là phép dời hình hoặc là phép đồng dạng thì

$$f(O) \equiv \left[\frac{f(A_1)}{a_1}, \frac{f(A_2)}{a_2}, \ldots, \frac{f(A_n)}{a_n}\right].$$

Phép chứng minh các định lí trên là đơn giản, xin không trình bày ở đây.

III. CÁC KẾT QUẢ CƠ BẢN

Các định lí sau được coi là các kết quả cơ bản mà người làm toán cần biết khi giải những bài toán liên quan tới khái niệm tâm tỉ cự.

Định lí 9. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $-\frac{\beta}{\alpha}$ khi và chỉ khi $M \equiv \left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}\right]$.

Hệ quả. Điểm M là trung điểm của đoạn AB khi và chỉ khi $M \equiv \left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\alpha}\right]$.

Định lí 10. Cho tam giác ABC. Với mọi điểm M, ta có

$$M \equiv \left[\frac{A}{S[MBC]}, \frac{B}{S[MCA]}, \frac{C}{S[MAB]}\right].$$

Chú ý. Kí hiệu $S[XYZ]$ chỉ diện tích đại số của tam giác XYZ.

Hệ quả 1. Điểm M thuộc miền tam giác ABC khi và chỉ khi tồn tại các số dương α, β, γ sao cho $M \equiv \left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}\right]$.

Hệ quả 2. Điểm M là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $M \equiv \left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\alpha}, \frac{C}{\alpha}\right]$.

Hệ quả 3. Tứ giác $BAMC$ là hình bình hành khi và chỉ khi $M \equiv \left[\frac{A}{-\alpha}, \frac{B}{\alpha}, \frac{C}{\alpha}\right]$.

Hệ quả 4. Điểm I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC khi và chỉ khi $I \equiv \left[\frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{C}{c}\right]$.

Hệ quả 5. Điểm I_a là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện vđỉnh A của tam giác ABC khi và chỉ khi $I_a \equiv \left[\frac{A}{-a}, \frac{B}{b}, \frac{C}{c}\right]$.

Hệ quả 6. Điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC khi và chỉ khi

$$O \equiv \left[\frac{A}{\sin 2A}, \frac{B}{\sin 2B}, \frac{C}{\sin 2C}\right].$$

Hệ quả 7. Điểm H là trực tâm của tam giác không vuông ABC khi và chỉ khi

$$H \equiv \left[\frac{A}{\tan A}, \frac{B}{\tan B}, \frac{C}{\tan C}\right].$$

Định lí 11. Nếu các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB và khác A, B, C thì AM, BN, CP đồng quy tại điểm $\left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}\right]$ khi và chỉ khi $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ và

$$M \equiv \left[\frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}\right]; N \equiv \left[\frac{C}{\gamma}, \frac{A}{\alpha}\right]; P \equiv \left[\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}\right].$$

Chú ý. Định lí trên được gọi là *định lí Ceva dạng vectơ*.

Phép chứng minh các định lí trên là đơn giản, xin không trình bày ở đây.

(Kì sau đăng tiếp)

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

Về bài toán giải phương trình (PT) lượng giác có điều kiện, trong Tạp chí Toán học và Tuổi Trẻ số 389 đã đưa ra 5 phương pháp cơ bản để đối chiếu điều kiện. Với một cách nhìn khác, trong bài viết này tôi xin giới thiệu thêm đến bạn đọc hai phương pháp đối chiếu điều kiện, có sự hỗ trợ của máy tính cầm tay, để kết luận nghiệm của PT lượng giác có điều kiện.

SUY NGHĨ THÊM VỀ KĨ THUẬT TÌM NGHIỆM của phương trình lượng giác có điều kiện

LÊ XUÂN KHANG
(GV THPT An Nhơn 1, Bình Định)

I. PHƯƠNG PHÁP THỬ TRỰC TIẾP

Cơ sở của phương pháp

Giả sử rằng:

+ Điều kiện (ĐK) xác định là $f(x)\neq 0$ (hoặc $f(x)\geq 0$, hoặc $f(x)\leq 0$) trong đó $f(x)$ là hàm số lượng giác có chu kì T.

+ PT hệ quả có nghiệm là $x=\alpha+k.\dfrac{2\pi}{n}$, trong đó $k\in\mathbb{Z}$ và n là một số nguyên dương xác định.

Khi đó cách đối chiếu điều kiện như sau:

Nếu $T\leq 2\pi$ thì ta chỉ cần thử trực tiếp cung x ứng với n giá trị tự nhiên đầu tiên của k là $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Nếu $(l-1).2\pi < T \leq l.2\pi$ ($l\in\mathbb{N}$, $l\geq 2$) thì ta cần thử trực tiếp cung x ứng với ln giá trị tự nhiên đầu tiên của k là $0, 1, 2, 3, \ldots, ln-1$.

★ **Thí dụ 1.** *Giải phương trình*

$$\tan 2x\tan 3x\tan 5x=\tan 2x-\tan 3x-\tan 5x \quad (1)$$

Lời giải. ĐK $\cos 2x\neq 0, \cos 3x\neq 0, \cos 5x\neq 0$.

(1) $\Leftrightarrow \tan 5x(1+\tan 2x\tan 3x)=\tan 2x-\tan 3x$.

Nếu $1+\tan 2x\tan 3x=0$, thì

(1) $\Leftrightarrow \tan 2x=\tan 3x$. Khi đó $1+\tan^2 2x=0$ (vô lí). Do đó $1+\tan 2x\tan 3x\neq 0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \tan 5x=\dfrac{\tan 2x-\tan 3x}{1+\tan 2x\tan 3x}$

$\Leftrightarrow \tan 5x=\tan(-x)\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{6}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Đối chiếu ĐK: Vì các hàm $y=\cos 2x, y=\cos 3x$ và $y=\cos 5x$ đều có chu kì $T\leq 2\pi$ nên ta chỉ cần thử trực tiếp với k là 0, 1, 2, 3, 4, 5 và thấy $k=0, 2, 4$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm của PT (1) là

$$x=k2\pi;\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).\ \square$$

★ **Thí dụ 2.** *Giải phương trình*

$$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x} \quad (2)$$

Lời giải. ĐK $\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geq 0$.

PT (2) $\Leftrightarrow 4\sin^2\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1+8\sin 2x\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow 2\left(1-\cos\left(6x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=1+4\sin 4x\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2+2\sin 6x=1+2(\sin 6x+\sin 2x)$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\ (a)\\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\ (b)\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Đối chiếu ĐK:

Vì hàm $y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ có chu kì $T\leq 2\pi$ nên cần thử trực tiếp với $k=0$; 1 và thấy $k=0$ thì (a) thỏa mãn; $k=1$ thì (b) thỏa mãn.

Vậy nghiệm của PT (2) là

$$x=\frac{\pi}{12}+k2\pi;\ x=\frac{17\pi}{12}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).\ \square$$

Nhận xét. Ưu điểm của phương pháp thử trực tiếp là đơn giản, dễ hiểu, rất phù hợp với việc dạy đại trà, nhất là với đối tượng học sinh có lực học trung bình hoặc yếu. Tuy nhiên với n càng lớn thì việc đối chiếu sẽ mất không ít thời gian.

II. PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ

Cơ sở của phương pháp

1. Giả sử rằng:

+ ĐK là $x\neq x_0+m.\frac{2\pi}{p}$, trong đó $m\in\mathbb{Z}$ và p là một số nguyên dương đã biết.

+ PT hệ quả có nghiệm là $x=\alpha+k.\frac{2\pi}{n}$, trong đó $k\in\mathbb{Z}$ và n là một số nguyên dương xác định. Đặt $x_k=\alpha+k.\frac{2\pi}{n}$.

Từ đó, ta đối chiếu điều kiện như sau:

a) Nghiệm x_k bị loại khi và chỉ khi có $m\in\mathbb{Z}$ sao cho $\alpha+k.\frac{2\pi}{n}=x_0+m.\frac{2\pi}{p}$.

b) Nghiệm x_k nhận được khi và chỉ khi $\forall m\in\mathbb{Z}$, đều có $\alpha+k.\frac{2\pi}{n}\neq x_0+m.\frac{2\pi}{p}$.

2. Để việc đối chiếu điều kiện trên được thực hiện dễ dàng, ta cần lưu ý đến hai định lí sau:

Cho phương trình $ax+by=c\,(a,b,c\in\mathbb{Z})$ (*)

Định lí 1. Phương trình (*) có nghiệm nguyên nếu và chỉ nếu $D=(a,b)$ là ước của c.

Định lí 2. Nếu phương trình (*) có một nghiệm nguyên $(x_0;y_0)$ thì (*) có vô số nghiệm nguyên. Họ tất cả các nghiệm nguyên của phương trình (*) là

$$(x_t;y_t)=\left(x_0+\frac{b}{D}t;\ y_0-\frac{a}{D}t\right)\ \text{với } t\in\mathbb{Z}.$$

★Thí dụ 3. *Giải phương trình*

$$\frac{\sin x\cot 5x}{\cos 9x}=1 \quad (3)$$

Lời giải. ĐK $\sin 5x\neq 0$, $\cos 9x\neq 0$, tức là

$$x\neq\frac{m\pi}{5}\ \text{và}\ x\neq\frac{(2m+1)\pi}{18}\ (m\in\mathbb{Z}).$$

$$\text{PT}(3)\Leftrightarrow \sin x\cos 5x=\sin 5x\cos 9x$$
$$\Leftrightarrow \sin 6x-\sin 4x=\sin 14x-\sin 4x$$
$$\Leftrightarrow \sin 14x=\sin 6x$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x=\frac{k\pi}{4} & (a)\\ x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10} & (b)\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Đối chiếu ĐK:

* Nghiệm (a) bị loại khi và chỉ khi $k,m\in\mathbb{Z}$ sao cho

$$\left[\begin{array}{l}\frac{k\pi}{4}=\frac{m\pi}{5}\\ \frac{k\pi}{4}=\frac{(2m+1)\pi}{18}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}5k-4m=0 & (a')\\ 9k-4m=2 & (b')\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=4t\\ k=2-4t\end{array}\right.$$ $(t\in\mathbb{Z})$. Vậy với k lẻ, tức là $x=\frac{\pi}{4}+\frac{t\pi}{2}$ $(t\in\mathbb{Z})$ là nghiệm của PT (3).

* Nghiệm (b) bị loại khi và chỉ khi $k,m\in\mathbb{Z}$ sao cho

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}=\frac{m\pi}{5}\\ \frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}=\frac{(2m+1)\pi}{18}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2k-4m=-1\\ 18k-20m=1\end{array}\right.$$

cả hai PT này đều không có nghiệm nguyên. Suy ra, nghiệm (b) thỏa mãn ĐK.

Vậy nghiệm của PT (3) là

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};\ x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}\ (k\in\mathbb{Z}).\ \square$$

★Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$\frac{\cos x}{\cos 3x}-\frac{\cos 5x}{\cos x}+8\sin^2 2\left(x+\frac{17\pi}{4}\right)=4(\cos 2x+1) \quad (4)$$

Lời giải. ĐK $\cos 3x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{6}+m.\frac{\pi}{3}\ (m\in\mathbb{Z})$.

(Xem tiếp trang 27)

CÁC LỚP THPT

CÁC LỚP THCS

Bài T1/403 (Lớp 6). Xét tổng

$$S=\frac{5}{1.2.3}+\frac{8}{2.3.4}+\frac{11}{3.4.5}+...+\frac{6026}{2008.2009.2010}.$$

Hãy so sánh S với 2.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

Bài T2/403 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=50^\circ$, $\widehat{ABC}=72^\circ$. Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác BDC sao cho $\widehat{CBD}=28^\circ$, $\widehat{BCD}=22^\circ$. Tính số đo góc ADB.

ĐÀO HUY TRƯỜNG
(GV THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T3/403. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện

$$x^2+y^2=(x-y)(xy+2)+9.$$

TRẦN VĂN HẠNH
(GVĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Bài T4/403. Cho các số $a,b,c,d\in[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$$a+b+c+d=x+y+z+t=1.$$

Chứng minh rằng

$$ax+by+cz+dt\geq 54abcd.$$

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T5/403. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=45^\circ$. Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng đường thẳng HI đi qua trọng tâm của tam giác ABC.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T6/403. Giải phương trình

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+4\sqrt{17-x}+8\sqrt[4]{17-x}=34.$$

TRẦN NGUYÊN HẠNH
(GV THPT Vạn Xuân, Hoài Đức, Hà Nội)

Bài T7/403. Một số được gọi là *số thú vị* nếu số này có 10 chữ số đôi một khác nhau và nó là bội của 11111. Hỏi có tất cả bao nhiêu *số thú vị* như thế?

TRẦN BÁ DUY LINH
(SV lớp 30, K34 ĐH Kinh tế TP. Hồ Chí Minh)

Bài T8/403. Cho đa giác lồi $A_1A_2A_3...A_n$ $(n\geq 3)$ nằm trong mặt phẳng (P). S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (P). Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n lần lượt tại $B_1, B_2, ...B_n$ sao cho $\frac{SA_1}{SB_1}+\frac{SA_2}{SB_2}+...+\frac{SA_n}{SB_n}=a$ với a là số thực dương cho trước.

Chứng minh rằng mặt phẳng (α) luôn đi qua một điểm cố định.

ĐẬU THANH KỲ
(GV THPT Diễn Châu IV, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/403. Hai đường tròn ω_1, ω_2 cắt nhau tại A, B. CD là tiếp tuyến chung của ω_1, ω_2 $(C\in\omega_1, D\in\omega_2)$ và điểm B gần CD hơn điểm A. CB cắt AD tại E, DB cắt CA tại F, EF cắt AB tại N. K là hình chiếu vuông góc của N trên CD.

a) Chứng minh rằng $\widehat{CAB}=\widehat{DAK}$.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và H là trực tâm tam giác KEF. Chứng minh rằng ba điểm O, B, H thẳng hàng.

NGUYỄN VĂN NHIỆM
(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T10/403. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1=5$ và $x_{n+1}=\frac{x_n^{2010}+3x_n+16}{x_n^{2009}-x_n+11}$, với mọi $n=1,2,...$ Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^{2009}+7}$. Tìm $\lim y_n$.

NGUYỄN HOÀNG NAM
(GV THPT Tây Sơn, Bình Định)

Bài T11/403. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đẳng thức
$$f(f(x-y))=f(x).f(y)+f(x)-f(y)-xy,$$
với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T12/403. Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$, kí hiệu a_n là số tất cả các song ánh f: $\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ thỏa mãn điều kiện với mọi $k\in\{1,2,...,n\}$ thì $f\big(f(k)\big)=k$.

1) Chứng minh rằng a_n là số chẵn với mọi $n\geq 2$.

2) Chứng minh rằng với $n\geq 10$ và n chia hết cho 3 thì a_n-a_{n-9} chia hết cho 3.

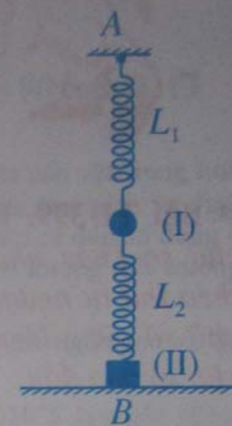
NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/403. Một tàu điện chuyển động đều trên đoạn đường thẳng nằm ngang với vận tốc v và cường độ dòng điện đi qua động cơ của tàu là $I_1=100$A và hiệu suất của động cơ là $H_1=90\%$. Cho tàu điện leo dốc với vận tốc không đổi v thì cường độ dòng điện qua động cơ của tàu là I_2; nếu tắt máy tàu điện và cho tàu xuống chính dốc đó thì nó chuyển động thẳng đều. Hãy xác định I_2, biết rằng phần năng lượng điện hao phí trong động cơ của tàu điện là do tỏa nhiệt ở cuộn dây của động cơ.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/403. Hai lò xo nhẹ L_1 và L_2 cùng độ cứng k = 20N/m và độ dài tự nhiên l_0 = 40cm. Hai vật nhỏ I và II có cùng khối lượng m = 100g. Ta bố trí cơ hệ như hình vẽ: Trục các lò xo luôn thẳng đứng, một đầu lò xo L_1 nối cố định vào điểm A, một đầu lò xo L_2 nối với vật II được đặt trên mặt sàn nằm ngang tại điểm B. Đặt khoảng cách $AB = L$, lấy g = 10m/s^2. Lúc đầu hệ cân bằng và tại một thời điểm ta truyền cho vật I một vận tốc có độ lớn v_0 = 40cm/s theo phương thẳng đứng. Tìm điều kiện của L để trong quá trình vật I chuyển động thì vật II vẫn đứng yên (không bị nhấc lên khỏi sàn) và hai lò xo luôn giãn.



NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/403 (For 6th grade). Given the sum
$$S=\frac{5}{1.2.3}+\frac{8}{2.3.4}+\frac{11}{3.4.5}+...+\frac{6026}{2008.2009.2010}.$$
Compare S with 2.

T2/403 (For 7th grade). Let ABC be a triangle with $\widehat{BAC}=50^\circ$, $\widehat{ABC}=72^\circ$. Outside of the triangle ABC, draw a triangle BDC such that $\widehat{CBD}=28^\circ$; $\widehat{BCD}=22^\circ$. Find the measure of the angle ADB.

T3/403. Find all possible pair of integers x, y satisfying the following condition
$$x^2+y^2=(x-y)(xy+2)+9.$$

T4/403. Given $a,b,c,d\in[0\,;1]$ satisfies the following condition
$$a+b+c+d=x+y+z+t=1.$$
Prove the inequality
$$ax+by+cz+dt\geq 54abcd.$$

T5/403. Let ABC be a triangle with $\widehat{BAC}=45^\circ$. The attitudes BD and CE intersect at H. Let I be a midpoint of DE. Prove that the line HI goes through the centroid of the triangle ABC.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/403. Solve the equation
$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+4\sqrt{17-x}+8\sqrt[4]{17-x}=34.$$

T7/403. A number is said to be an *interesting number* if it has 10 digits, all are distinct, and is a multiple of 11111. How many *interesting numbers* are there?

(Xem tiếp trang 27)

★Bài T1/399. *Tìm số chính phương có bốn chữ số khác nhau, biết rằng khi viết số đó theo thứ tự ngược lại thì được số mới có bốn chữ số cũng là số chính phương và chia hết cho số ban đầu.*

Lời giải. Gọi số cần tìm là $\overline{abcd} = x^2$. Theo giả thiết ta có $\overline{dcba} = y^2$ và $y^2 = kx^2$ (1) trong đó a, b, c, d là các chữ số khác nhau, a và d đều khác 0, k khác 1.

Vì a, d là chữ số tận cùng của số chính phương nên a, d chỉ có thể là số thuộc tập

$$\{1, 4, 5, 6, 9\} \qquad (2)$$

Mặt khác $k \geq 2$ và y^2 có bốn chữ số, nên a chỉ có thể là số thuộc tập $\{1 ; 4\}$.

• Nếu $a = 4$ thì từ $\overline{dcb4} = k.\overline{4bcd}$ suy ra chữ số tận cùng d không thỏa mãn điều kiện (2).

• Nếu $a = 1$ thì từ $\overline{dcb1} = k.\overline{1bcd}$ suy ra d, k đều là số lẻ. Từ đó và (2) suy ra $d = 9$ và $k = 9$.

Từ $\overline{9cb1} = 9.\overline{1bc9}$ suy ra $c = 89b + 8$, do đó $b = 0, c = 8$.

Số phải tìm là $\overline{abcd} = 1089 = 33^2$,
còn $\overline{dcba} = 9801 = 99^2$ và $9801 = 9 \times 1089$. ❑

➢**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn không thử lại để xem các số tìm được có thỏa mãn đầy đủ các điều kiện của đề bài không.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thanh Thủy*, 6A, THCS Yên Lạc, *Ngô Thị Phương Anh, Nguyễn Thị Quỳnh Chi, Lê Huyền Trâm*, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, TT. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh:** *Phan Thị Quỳnh Trang*, 6A, *Ngô Thục Mây, Lê Thị Phương Tâm, Võ Thị Hương Trà*, 6B, *Phan Thị Mỹ Thành, Nguyễn Thị Hiền, Lê Quang Anh*, 6C, THCS Xuân Diệu, *Nguyễn Thị Linh Chi*, 6A, THCS Thượng Lộc, *Trần Thị Bảo Vân*, 6B, THCS Trung Đồng, Can Lộc; **Bình Định:** *Nguyễn Trọng Khiêm*, 6A1, THCS Võ Hán, Tây Sơn.

VIỆT HẢI

★Bài T2/399. *Tìm các số nguyên x, y, z sao cho*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 < xy + 3y + 2z \qquad (1)$$

Lời giải. Do x, y, z là các số nguyên nên

$$(1) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+3+1 \leq xy+3y+2z$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4-xy-3y-2z \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)+\left(\frac{3y^2}{4}-3y+3\right)+(z^2-2z+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2 \leq 0 \qquad (2)$$

Vì $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2 \geq 0; 3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2 \geq 0; (z-1)^2 \geq 0$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{y}{2}=0 \\ \frac{y}{2}-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1. \end{cases}$$

Vậy các số nguyên cần tìm là $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$. ❑

➢Nhận xét. Bài toán khá đơn giản, chỉ có thủ thuật nhỏ cần lưu ý là việc chuyển từ dấu "<" sang dấu "≤". Các bạn có lời giải tốt là:

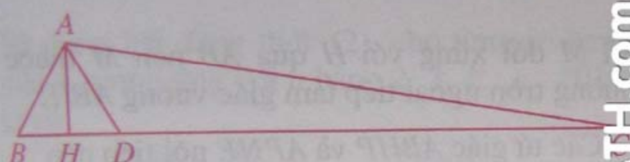
Hà Nội: *Nguyễn Chí Tùng*, 7A10, THCS Giảng Võ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đình Hậu*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Hoan*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Thị Huyền*, 7A2, THCS Thuận Trung, Đô Lương, *Cao Minh Trang*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Văn Thịnh, Đỗ Đăng Thịnh, Nguyễn Minh Ý, Võ Linh Đức*, 8A, THCS Đức Thắng, Mộ Đức, *Nguyễn Thúy Phượng*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Quảng Nam:** *Phan Thị Hoa Lài*, 6/3, THCS Phan Chu Trinh, Phú Ninh.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T3/399. *Tính diện tích tam giác ABC, biết độ dài đường cao AH = 6 cm, BH = 3 cm và số đo góc CAH bằng ba lần số đo góc BAH.*

Lời giải. Có hai trường hợp xảy ra

Trường hợp 1. Điểm H nằm giữa B và C (h.1).



Hình 1

Trên tia HC lấy điểm D sao cho $\widehat{DAH}=\widehat{BAH}$.

Suy ra AD là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{DB}{AB}$ và $DB=2.BH=6$ cm.

Áp dụng định lí Pythagore trong tam giác vuông ABH, ta có $AB^2=AH^2+BH^2=6^2+3^2=45\Rightarrow AB=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ (cm). Đặt $DC=x\ (x>0)$.

Ta có $\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{6}{3\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow AC=\dfrac{DC\sqrt{5}}{2}=\dfrac{x\sqrt{5}}{2}$,

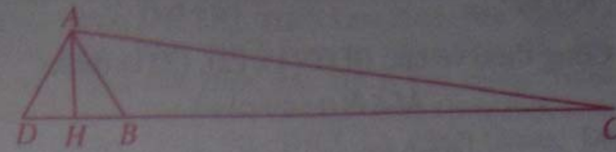
Lại có $AH^2+HC^2=AC^2$, suy ra

$6^2+(3+x)^2=\dfrac{5x^2}{4}\Leftrightarrow x^2-24x-180=0$

$\Leftrightarrow x_1=30;\ x_2=-6$ (loại).

Vậy $S_{ABC}=AH.\dfrac{BC}{2}=3(6+30)=108(\text{cm}^2)$.

Trường hợp 2. Điểm B nằm giữa H và C (h.2). Lấy điểm D đối xứng với B qua H. Khi đó AD là phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$. Tương tự như trường hợp 1 ta tìm được $BC=30$ cm (bằng DC trong trường hợp 1).



Hình 2

Vậy $S_{ABC}=AH.\dfrac{BC}{2}=3.30=90\ (\text{cm}^2)$. ❑

➢Nhận xét. 1) Đây là bài toán yêu cầu vận dụng linh hoạt tính chất đường phân giác của tam giác và định lí Pythagore. Tất cả các bạn đều tìm ra đáp số đúng ở trường hợp 1. Nhiều bạn bỏ quên không xét trường hợp 2.

2) Các bạn sau đây có lời giải đầy đủ, ngắn gọn và lập luận chặt chẽ:

Nam Định: *Lâm Vũ Tuấn*, 7A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực; **Hà Nam:** *Nguyễn Mạnh Hải*, 9A2, THCS Trần Phú, TP. Phủ Lý; **Bắc Ninh:** *Đỗ Quang Long*, 9A, THCS Yên Phong; **Nghệ An:** *Lê Thành Đông*, 7C, *Hồ Thị Thúy, Hoàng Thảo Hiền, Trương Như Uyên, Đào Mỹ Linh, Nguyễn Anh Tuấn, Hoàng Văn Bằng, Lê Văn Quang*, 7A, *Nguyễn Vũ Duy Linh, Hồ Hữu Hải, Lê Hồ Minh Tuấn, Trần Ngọc Linh, Lê Hương Ly, Đặng Mỹ Linh, Trương Cẩm Tú*, 8A, *Đinh Thị Hồng Ngọc*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T4/399. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$M=\frac{232y^3-x^3}{2xy+24y^2}+\frac{783z^3-8y^3}{6yz+54z^2}+\frac{29x^3-27z^3}{3xz+6x^2}$$

trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $x+2y+3z=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải. Đặt $x=a$, $2y=b$, $3z=c$. Từ giả thiết suy ra a, b, c là các số dương và $a+b+c=\dfrac{1}{4}$.

Biểu thức M có dạng

$$M=\frac{29b^3-a^3}{ab+6b^2}+\frac{29c^3-b^3}{bc+6c^2}+\frac{29a^3-c^3}{ca+6a^2}.$$

Ta có $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$, mà $a^2+b^2\geq 2ab$ nên $a^3+b^3\geq ab(a+b)$.

Do đó $29b^3-a^3=30b^3-(a^3+b^3)$
$\leq 30b^3-ab(a+b)=(ab+6b^2)(5b-a)$.

Vì $a>0$, $b>0$ nên $\dfrac{29b^3-a^3}{ab+6b^2}\leq 5b-a$ (1)

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{29c^3-b^3}{bc+6c^2}\le 5c-b \quad (2) \qquad \frac{29a^3-c^3}{ca+6a^2}\le 5a-c \ (3)$$

Cộng theo vế các BĐT (1), (2), (3) ta được

$$M\le 4(a+b+c)=1.$$

$$M=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{12}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1, đạt được khi và chỉ khi $x=\frac{1}{12}; y=\frac{1}{24}; z=\frac{1}{36}$. ❒

➤**Nhận xét.** 1) Đa số các bạn đều giải theo cách trên. Một số bạn đã nhận xét và đưa ra bài toán tổng quát sau:

"Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$N=\frac{(k^2-k-1)b^3-a^3}{ab+kb^2}+\frac{(k^2-k-1)c^3-b^3}{bc+kc^2}+\frac{(k^2-k-1)a^3-c^3}{ca+ka^2}$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=m$; k và m là các số dương cho trước.

ĐS. Max$M=(k-2)m$, đạt được khi $a=b=c=\frac{m}{3}$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Thành Công*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Nam Định:** *Vũ Phương Thảo*, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Hải Dương:** *Trần Xuân Thắng*, 9/1 THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương; **Bắc Ninh:** *Lê Thị Hải Linh*, 8A, *Đỗ Quang Long*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nam:** *Hà Thị Hoàng Nam*, 7A, THCS Nam Cao, Lý Nhân; **Bắc Giang:** *Nguyễn Thị Huế*, 8A, THCS Tân Dĩnh, Lạng Giang; **Thái Bình:** *Ngô Minh Quyên*, 9A1, THCS Thanh Nê, Kiến Xương; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Đức*, 9C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Phú Thọ:** *Vũ Thị Mai*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Quân*, 9A1, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Thị Lan Hương*, 9C, THCS Vĩnh Tường, *Phạm Liên Hương*, 9A, THCS Lập Thạch; **Nghệ An:** *Đậu Hồng Quân*, 9D, THCS Cao Xuân Huy, *Nguyễn Thị Diệu Anh*, 9B, THCS Diễn Châu, *Lê Hồng Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Trần Bảo Trung*, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương; **Hậu Giang:** *Trần Ngọc Khánh Quỳnh*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vị Thanh.

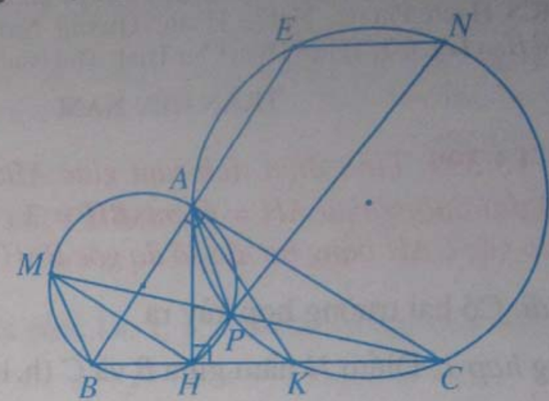
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★**Bài T5/399.** *Cho tam giác ABC vuông tại A và AB < AC. Gọi H là hình chiếu của A trên BC và M là điểm đối xứng của H qua AB. Tia MC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH tại điểm P (P ≠ M). Tia HP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác APC tại điểm N (N ≠ P). Gọi E và K tương ứng là giao điểm của AB và BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác APC (E ≠ A, K ≠ C). Chứng minh rằng*

a) EN song song với BC.

b) H là trung điểm của BK.

Lời giải. (Theo bạn *Lê Hồng Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**)



Vì M đối xứng với H qua AB nên M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABH.

a) Các tứ giác $ABHP$ và $APNE$ nội tiếp nên $\widehat{PHC}=\widehat{PAB}=\widehat{ENP}$, do đó $EN//BC$ (vì có hai góc so le trong bằng nhau).

b) Từ tính chất của các góc nội tiếp cùng chắn một cung và M là điểm đối xứng với H qua AB, ta có

- $\widehat{APC}=\widehat{AKC}$ nên $\widehat{APM}=\widehat{AKH}$.
- $\widehat{ABH}=\widehat{ABM}=\widehat{APM}$.

Suy ra $\widehat{ABH}=\widehat{AKH}$, do đó tam giác ABK cân tại A, mà AH là đường cao nên H là trung điểm của BK. ❒

➤**Nhận xét.** Bài toán này có nhiều cách giải khác nhau. Ngoài bạn *Đức*, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Vũ Thị Mai*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: *Kim Đình Quân, Bùi Thị Ngọc Mai, Nguyễn Thị Thơm*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nam**: *Nguyễn Mạnh Hải, Lại Hồng Hạnh*, 9A2, THCS Trần Phú, TP. Phủ Lý; **Nghệ An**: *Nguyễn Tất Khánh, Trương Công Phú*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Trần Bảo Trung*, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương; *Nguyễn Thị Huyền*, 7A2, THCS Thuận Trung, Trung Sơn, Đô Lương; *Đậu Hồng Quân*, 9D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ Bài T6/399. *Tìm phần nguyên của A, biết rằng*

$$A=\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+...+\sqrt[2010]{\frac{2010}{2009}}.$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh

$$\sqrt[n]{1+na}<1+a\ \left(n\in\mathbb{N},n>1;\ a\in\mathbb{R},a>0\right)\quad(1)$$

Thật vậy, ta có

$$(1+a)^n=1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+...+a^n$$

$\Rightarrow (1+a)^n>1+na$ và từ đó suy ra (1).

Áp dụng bất đẳng thức (1), ta được

$$\sqrt[n]{\frac{n}{n-1}}=\sqrt[n]{1+\frac{n}{n(n-1)}}<1+\frac{1}{n(n-1)},$$

hay $$\sqrt[n]{\frac{n}{n-1}}<1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\quad(2)$$

Sử dụng bất đẳng thức (2), cho từng số hạng của A tương ứng với n bằng 2, 3, 4, … , 2010, ta có

$$A=\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+...+\sqrt[2010]{\frac{2010}{2009}}$$

$$<2009+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}.$$

Từ đó $A<2010-\frac{1}{2010}<2010$.

Mặt khác A là tổng của 2009 số hạng, mà mỗi số hạng đều lớn hơn 1, nên $A>2009$.

Vậy $2009<A<2010$, suy ra $[A]=2009$. □

➤**Nhận xét.** 1) Có thể chứng minh BĐT (1) bằng phương pháp quy nạp toán học. Có thể chứng minh (2) bằng cách sử dụng BĐT Cauchy cho n số, gồm $(n-1)$ số 1 và số $\frac{n}{n-1}$ như sau:

$$\frac{1+1+...+1+\frac{n}{n-1}}{n}>\sqrt[n]{\frac{n}{n-1}}\Rightarrow 1+\frac{1}{n(n-1)}>\sqrt[n]{\frac{n}{n-1}}.$$

Từ đó suy ra (2).

Một số bạn đưa ra kết quả tổng quát: *Phần nguyên của số* $A=\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}+...+\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}$ *bằng n.*

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Phạm Lan Hương*, 9A, THCS Lập Thạch; *Nguyễn Thị Lan Hương*, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Phú Thọ:** *Vũ Thị Mai*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Lê Bích Ngọc*, 9A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh, *Phạm Đức Hiển*, 9A, THCS Yên Phong; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Quỳnh Loan, Trương Công Phú, Thái Thị Hương Thảo*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Thị Diệu Anh*, 9B, THCS Diễn Lâm, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Đức*, 9C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T7/399. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$A=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+x^2}+\frac{z}{1+t^2}+\frac{t}{1+z^2}$$

trong đó x, y, z, t là bốn số không âm thỏa mãn $x+y+z+t=k$ *(k là số dương cho trước).*

Lời giải. • Nếu $x=0$ thì có

$$\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+x^2}=y\geq\frac{4(x+y)}{4+k^2}\quad(1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=0$.

• Nếu $y=0$ thì

$$\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+x^2}=x\geq\frac{4(x+y)}{4+k^2}\quad(2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=0$.

• Nếu $x>0$, $y>0$, sử dụng BĐT Schwarz ta có

$$\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+x^2}=\frac{x^2}{x+xy^2}+\frac{y^2}{y+x^2y}\geq\frac{x+y}{1+xy}$$

$$\geq\frac{4(x+y)}{4+k^2}\ \left(\text{vì } xy\leq\frac{1}{4}(x+y)^2\leq\frac{k^2}{4}\right)\quad(3)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{k}{2}$ và $z=t=0$.

Tương tự ta có $$\frac{z}{1+t^2}+\frac{t}{1+z^2}\geq\frac{4(z+t)}{4+k^2}\quad(4)$$

Đẳng thức xảy ra khi $z=t=0$ hoặc $z=t=\frac{k}{2}$ và $x=y=0$.

Kết hợp (1), (2), (3) và (4) ta có

$$A\geq\frac{4(x+y+z+t)}{4+k^2}=\frac{4k}{4+k^2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{4k}{4+k^2}$, đạt được khi và chỉ khi $x=y=0$, $z=t=\frac{k}{2}$ hoặc $x=y=\frac{k}{2}$, $z=t=0$. ❐

➤ ***Nhận xét.*** Có khá đông bạn tham gia giải bài toán này. Tuy nhiên rất nhiều bạn khi sử dụng BĐT Schwarz để đưa đến đánh giá (3) đều không xét trường hợp $x=0$ hoặc $y=0$, dẫn đến suy luận không chính xác. Cũng có thể nhận được đánh giá (3) bằng cách biến đổi tương đương. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Phan Xuân Trường*, 11A, THPT Nguyễn Viết Xuân, Vĩnh Tường; **Phú Thọ:** *Đào Văn Lập*, 10A1, THPT Thanh Thủy; **Hưng Yên:** *Đào Việt Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mạnh Toàn*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Võ Hồng Quân*, 10A1, *Vũ Thành Long*, 10A2, *Nguyễn Huy Hoàng*, 11A1, khối THPT chuyên, ĐH Vinh; *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I; *Hồ Diên Phúc*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III; **Bình Định:** *Trần Đoàn Tấn*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Kiên Giang:** *Nguyễn Ngọc Hà*, *Trương Hữu Vạn Lộc*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá; **Phú Yên:** *Võ Văn Huy*, 12A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Bến Tre:** *Trần Hoàng Ân*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre;

NGUYỄN THANH HỒNG

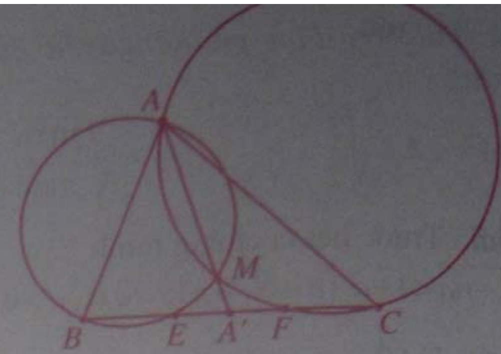
★ **Bài T8/399.** *Cho tam giác ABC. Điểm M không nằm trên các cạnh và không nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó. Chứng minh rằng $\mathcal{P}_{A/(MCB)}=\mathcal{P}_{B/(MCA)}=\mathcal{P}_{C/(MAB)}$ khi và chỉ khi M là trọng tâm tam giác ABC. (Kí hiệu $\mathcal{P}_{T/(XYZ)}$ là phương tích của điểm T đối với đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z).*

Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC. Điểm M không thuộc các đường thẳng AB, AC và không thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. A' là trung điểm của BC. Khi đó $\mathcal{P}_{B/(MAC)}=\mathcal{P}_{C/(MAB)}$ khi và chỉ khi M thuộc AA'.

Chứng minh bổ đề. Giả sử các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MAC theo thứ tự cắt BC tại E, F ($E \neq B$; $F \neq C$).

Vì M không thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $E \neq C$; $F \neq B$ (hình vẽ).



Chú ý rằng $\overline{BC}=-\overline{CB}$; $\overline{BA'}=-\overline{CA'}$ và AM là trục đẳng phương của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MAC, ta có

$$\mathcal{P}_{B/(MAC)}=\mathcal{P}_{C/(MAB)}$$
$$\Leftrightarrow \overline{BF}.\overline{BC}=\overline{CE}.\overline{CB} \Leftrightarrow \overline{BF}=-\overline{CE}$$
$$\Leftrightarrow \overline{BA'}+\overline{A'F}=-\overline{CA'}-\overline{A'E} \Leftrightarrow \overline{A'F}=-\overline{A'E}$$
$$\Leftrightarrow \overline{A'F}.\overline{A'C}=\overline{A'E}.\overline{A'B} \Leftrightarrow \mathcal{P}_{A'/(MAC)}=\mathcal{P}_{A'/(MAB)}$$
$$\Leftrightarrow A'\in AM \Leftrightarrow M\in AA'.$$

Trở lại việc giải bài toán **T8/399.**

Gọi A', B' theo thứ tự là trung điểm của BC, CA. Theo bổ đề trên, ta có

$$\mathcal{P}_{A/(MBC)}=\mathcal{P}_{B/(MCA)}=\mathcal{P}_{C/(MAB)}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{P}_{B/(MAC)}=\mathcal{P}_{C/(MAB)};\ \mathcal{P}_{C/(MBA)}=\mathcal{P}_{A/(MBC)}.$$
$$\Leftrightarrow M\in AA';\ M\in BB' \Leftrightarrow M=AA'\cap BB'$$

$\Leftrightarrow$ M là trọng tâm của tam giác ABC. ❐

➤ ***Nhận xét.*** 1) Đề toán này có hai lỗi:

+ In sai $\mathcal{P}_{A/(MAB)}$; cần sửa đúng $\mathcal{P}_{C/(MAB)}$.

+ Thiếu giả thiết "*M không thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC*".

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

2) Khá nhiều bạn tham gia và cho lời giải đúng, tuy nhiên, nhiều lời giải quá dài. Số bạn biết sử dụng độ dài đại số để cho một lời giải hoàn chỉnh không nhiều.

3) Từ bài toán trên, dễ dàng suy ra kết luận thú vị sau: *Tập hợp các điểm M sao cho $\mathcal{P}_{A/(MBC)}=\mathcal{P}_{B/(MCA)}=\mathcal{P}_{C/(MAB)}$ chính là hình gồm trọng tâm tam giác ABC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (không kể các điểm A, B, C).*

4) Sử dụng công thức Lezbnitz, các bạn *Lê Văn Phú*, *Nguyễn Tiến Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An** cũng cho lời giải khá tốt.

5) Ngoài hai bạn *Phú* và *Hoàng*, xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt:

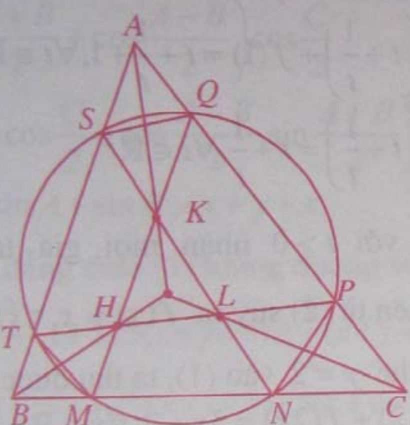
Nam Định: *Trần Thu Hiền*, 10T, *Phùng Minh Phương*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:**

Nguyễn Anh Tuyến, 12T, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hoá:** *Lê Văn Tuấn, Trịnh Văn Tam*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Quảng Nam:** *Nguyễn Phước Toàn*, THPT Trần Văn Dư, *Phạm Tuấn Anh, Võ Văn Quang*, 11/T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Cần Thơ:** *Hoàng Công Đức*, 10A1, THPT chuyên Lí Tự Trọng; **Bình Định:** *Lê Anh Tú*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T9/399. *Cho tam giác ABC. Một đường tròn cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các cặp điểm (M, N); (P, Q); (S, T), biết rằng M nằm giữa B và N; P nằm giữa C và Q; S nằm giữa A và T. Gọi K, H, L lần lượt là giao điểm của SN và QM; QM và TP; TP và SN. Chứng minh rằng các đường thẳng AK, BH, CL đồng quy.*

Lời giải. (Theo đa số các bạn).



Sử dụng *định lí Ceva dạng lượng giác* cho tam giác ASQ với ba đường AS, AK, AQ đồng quy, ta có

$$\frac{\sin\widehat{KAS}}{\sin\widehat{KAQ}}\cdot\frac{\sin\widehat{KSQ}}{\sin\widehat{KSA}}\cdot\frac{\sin\widehat{KQA}}{\sin\widehat{KQS}}=1 \quad (1)$$

Tương tự đối với các tam giác BTM và tam giác CPN, ta cũng có

$$\frac{\sin\widehat{HBM}}{\sin\widehat{HBT}}\cdot\frac{\sin\widehat{HMT}}{\sin\widehat{HMB}}\cdot\frac{\sin\widehat{HTB}}{\sin\widehat{HTM}}=1 \quad (2)$$

$$\frac{\sin\widehat{LCP}}{\sin\widehat{LCN}}\cdot\frac{\sin\widehat{LNC}}{\sin\widehat{LNP}}\cdot\frac{\sin\widehat{LPN}}{\sin\widehat{LPC}}=1 \quad (3)$$

Chú ý rằng

$$\sin\widehat{KSA}=\sin\widehat{LPN};\ \sin\widehat{KSQ}=\sin\widehat{BMH};$$
$$\sin\widehat{KQA}=\sin\widehat{HTM};\ \sin\widehat{KQS}=\sin\widehat{LNC};$$
$$\sin\widehat{HMT}=\sin\widehat{LPC};\ \sin\widehat{HTB}=\sin\widehat{LNP} \quad (4)$$

Nhân theo vế các hệ thức (1), (2), (3), kết hợp với (4) ta được

$$\frac{\sin\widehat{KAS}}{\sin\widehat{KAQ}}\cdot\frac{\sin\widehat{HBM}}{\sin\widehat{HBT}}\cdot\frac{\sin\widehat{LCA}}{\sin\widehat{LCN}}=1.$$

Áp dụng *định lí đảo Ceva dạng lượng giác* cho tam giác ABC với ba đường thẳng AK, BH và CL (lưu ý rằng AK, BH, CL không thể đôi một song song) ta nhận thấy ba đường này đồng quy (đpcm). ❒

➤**Nhận xét.** 1) Hầu hết các lời giải gửi về Tòa soạn đều trình bày theo cách trên. Một số bạn sử dụng *định lí Desargues* và *định lí Pascal* cũng đi đến kết luận bài toán (sau khi đã chứng minh hai định lí vừa nêu).

2) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn hơn cả:

Hà Nội: *Phạm Huy Hoàng*, 10A1 Toán, THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, *Vũ Quang Thanh*, 10T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Phú Thọ:** *Đinh Anh Hoàng*, 10A1, THPT TTr. Lâm Thao; **Hải Phòng:** *Phan Đức Minh*, 12A15, THPT Thái Phiên; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Xuân Việt*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Quảng Ninh:** *Bùi Hoàng Tùng*, 11A3, THPT Uông Bí; **Hải Dương:** *Mạc Lưu Phong, Phạm Tuấn Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Cao, Vũ Xuân Trường, Trần Thu Hiền, Nguyễn Thùy Linh B, Đặng Thị Quỳnh Nga*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Lan Anh*, 10T, *Lê Quang Lâm, Trịnh Văn Tam*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Trần Bảo Trung*, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương, *Nguyễn Thế Tiến, Bùi Quang Đông*, 10A1, *Trần Võ Hùng, Phan Trương Bảo*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Tiến Hoàng, Trần Mạnh Cường, Nguyễn Hiền Trang*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I, *Hồ Diên Phúc*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III; **Hà Tĩnh:** *Trần Võ Hoàng*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Trường Sinh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** *Hà Văn Huỳnh Anh*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, *Nguyễn Phước Toàn*, 11/5, THPT Trần Văn Dư; **Phú Yên:** *Võ Văn Huy*, 12A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Đồng Nai:** *Ong Thế Phương*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa; **Hậu Giang:** *Đường Ngọc Lan*, 11H, THPT chuyên Vị Thanh; **Long An:** *Võ Tiến Đạt*, 10T, THPT chuyên Long An.

HỒ QUANG VINH

★Bài T10/399. *Cho dãy số (a_n) thỏa mãn*

$$\begin{cases} a_0=10 \\ (6-a_n)(16+a_{n-1})=96, \quad n=0,\ 1,\ 2,\dots \end{cases}$$

Hãy tính tổng $S=\dfrac{1}{a_0}+\dfrac{1}{a_1}+\dots+\dfrac{1}{a_{2010}}$.

Lời giải. (Theo bạn *Phùng Minh Hoàng*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**).

Ta có $(6-a_n)(16+a_{n-1})=96 \Leftrightarrow a_{n-1}(6-a_n)=16a_n$

$\Leftrightarrow \dfrac{6-a_n}{16a_n}=\dfrac{1}{a_{n-1}}$ ($a_i \neq 0$, với $i=0, 1, 2, ..., n$)

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{8}.\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{a_{n-1}} \Leftrightarrow \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{10}\right)=\dfrac{1}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{10}.$

Đặt $x_i=\dfrac{1}{a_i}+\dfrac{1}{10}$ $(i=0, 1, 2, ..., n)$ thì (x_i) lập thành cấp số nhân với công bội $\dfrac{8}{3}$.

Thành thử $A=\sum_{i=0}^{n}x_i=\dfrac{x_0\left(1-\left(\dfrac{8}{3}\right)^{n+1}\right)}{1-\dfrac{8}{3}}.$

Mặt khác $A=\sum_{i=0}^{n}\left(\dfrac{1}{a_i}+\dfrac{1}{10}\right)=S+\dfrac{n+1}{10}.$

Do đó $S=A-\dfrac{n+1}{10}=\dfrac{x_0\left(1-\left(\dfrac{8}{3}\right)^{n+1}\right)}{1-\dfrac{8}{3}}-\dfrac{(n+1)}{10}.$

Với $a_0=10$ thì $x_0=\dfrac{1}{5}$. Thay $n=2010$ ta được

$S=\dfrac{3}{25}.\left(\left(\dfrac{8}{3}\right)^{2011}-1\right)-\dfrac{2011}{10}$

$=\dfrac{3}{25}.\left(\dfrac{8}{3}\right)^{2011}-201\dfrac{11}{50}.$ ❐

➢**Nhận xét.** Bài toán này được rất nhiều bạn tham gia giải. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nam Định: *Phùng Minh Phương*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Phòng:** *Phan Đức Minh*, 12A1, THPT Thái Phiên; **Hà Tĩnh:** *Phạm Tiến Dũng*, 11T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bến Tre:** *Phạm Phước Nguyên, Cao Thành Chương*, 12T, THPT chuyên Bến Tre; **Bình Định:** *Nguyễn Quang Hải*, 11TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Phú Yên:** *Võ Văn Huy*, 12A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Kiên Giang:** *Nguyễn Bích Y Linh*, 10T1, THPT chuyên Kiên Giang; **Đồng Nai:** *Dương Công Hưng*, 12T, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★**Bài T11/399.** *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn đẳng thức*

$$f(x+y)+f(xy)=x+y+xy;\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+ \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Thay $x=2, y=2$ vào (1), ta được $f(4)=4$.

Lần lượt thay $x=1$, $y=1$; $x=2$, $y=1$; $x=3$, $y=1$ vào (1), ta thu được

$$\begin{cases} f(2)+f(1)=3 \\ f(3)+f(2)=5 \\ f(4)+f(3)=7. \end{cases}$$

Do $f(4)=4$, nên $f(3)=3$, $f(2)=2$ và $f(1)=1$.

Thế $x=t$, $y=\dfrac{1}{t}$ vào (1) và sử dụng đẳng thức $f(1)=1$, ta thu được

$$f\left(t+\frac{1}{t}\right)+f(1)=t+\frac{1}{t}+1, \forall t\in\mathbb{R}^+.$$

hay $$f\left(t+\frac{1}{t}\right)=t+\frac{1}{t}, \forall t\in\mathbb{R}^+ \quad (2)$$

Do $t+\dfrac{1}{t}$ với $t>0$ nhận mọi giá trị trong $[2;+\infty)$ nên từ (2) suy ra $f(x)=x, \forall x\geq 2$ (3)

Tiếp tục thế $y=2$ vào (1), ta thu được

$$f(x+2)+f(2x)=3x+2, \forall x\in\mathbb{R}^+ \quad (4)$$

Sử dụng hệ thức (3) có $f(x+2)=x+2, \forall x\in\mathbb{R}^+$, từ (4), ta thu được $f(2x)=2x, \forall x\in\mathbb{R}^+$, hay $f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}^+$,

Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn điều kiện (1).

Kết luận. Hàm duy nhất thỏa mãn bài toán là $f(x)=x$, với $x\in\mathbb{R}^+$. ❐

➢**Nhận xét.** Có rất nhiều lời giải gửi đến Tòa soạn, đa số các bạn giải đúng, một số khác tuy có đáp số đúng nhưng đã sử dụng giá trị $x=0$ không thuộc tập xác định của hàm số cần tìm.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài T12/399.** *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\cos A\cos B\cos C+8\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\geq 24\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}-1.$$

Lời giải. Đặt $x=\sin A,\ \ y=\sin B,\ \ z=\sin C$, $0<x,y,z<1$. Ta có

- $\cos A\cos B\cos C$

$$=\frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B))\cos C$$

$$=\frac{1}{2}(-\cos C+\cos(A-B))\cos C$$

$$=\frac{1}{2}(-\cos^2 C-\cos(A-B)\cos(A+B))$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin^2 C-1-\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)-1=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}-1.$$

- $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$=2\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\left(\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A-B}{2}.\sin\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=\sin C+\sin A+\sin B=x+y+z.$$

Do đó bất đẳng thức (1) tương đương với

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}-1+2\sqrt{3}(x+y+z)\ge\frac{3}{2}(x+y+z)^2-1$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+y^2+z^2+4\sqrt{3}(x+y+z)\ge 3(x+y+z)^2\quad (2)$$

Chú ý

- $3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2$

$$=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0,$$

- $x+y+z+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin A+\sin B+\sin C+\sin\frac{\pi}{3}$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{C-\frac{\pi}{3}}{2}$$

$$\le 2\left(\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4}\cos\frac{A+B-C-\frac{\pi}{3}}{4}$$

$$\le 4\sin\frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4}=4\sin\frac{\pi}{3}=4.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$$

Suy ra $x+y+z\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng hai bất đẳng thức trên ta có

$$x^2+y^2+z^2+4\sqrt{3}(x+y+z)$$

$$\ge\frac{1}{3}(x+y+z)^2+\frac{8}{3}(x+y+z)^2=3(x+y+z)^2.$$

Tức là bất đẳng thức (2) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ hay tam giác ABC đều.

➤**Nhận xét.** Đây là bài toán bất đẳng thức lượng giác dạng cơ bản, không quá khó. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

Nam Định: *Trịnh Thị Việt Hà, Trần Thu Hiền*, 10 Toán 2; *Nguyễn Thùy Linh, Đặng Thị Quỳnh Nga, Vũ Xuân Trường*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Lê Hoàng Hiệp*, 10 A1, K48, THPT Thái Hòa; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mậu Thành*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Ngãi:** *Phạm Đình Thuyên*, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** *Huỳnh Văn Thắng*, 10T2, THPT Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Bình Phước:** *Cao Văn Tiên*, 10A, THPT chuyên Quang Trung.

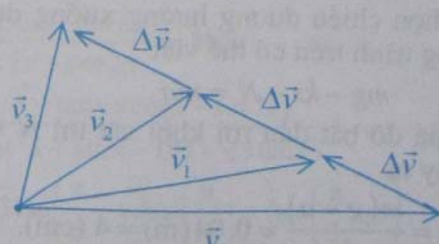
NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài L1/399.** *Một vật chuyển động với gia tốc không đổi. Sau khoảng thời gian $\Delta t=\tau$, kể từ khi vật có vận tốc v_0 đến khi vận tốc của vật là $\frac{v_0}{2}$. Sau khoảng thời gian 2τ vận tốc của vật là $\frac{v_0}{4}$. Xác định gia tốc của vật và vận tốc của nó sau khoảng thời gian 3τ.*

Lời giải. Kí hiệu $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ lần lượt là vận tốc của vật ở các thời điểm $\tau, 2\tau, 3\tau$, ta có gia tốc của vật là

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}_1-\vec{v}_0}{\tau}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{\tau}=\frac{\vec{v}_3-\vec{v}_2}{\tau}=\frac{\Delta\vec{v}}{\tau}.$$

Các vectơ vận tốc được biểu diễn như hình vẽ sau.



Từ hình vẽ ta có

$$v_1^2 = \frac{v_0^2}{4} = v_0^2 + (\Delta v)^2 + 2\vec{v}_0.\Delta\vec{v};$$

$$v_2^2 = \frac{v_0^2}{16} = v_0^2 + (2\Delta v)^2 + 2\vec{v}_0.2\Delta\vec{v};$$

$$v_3^2 = v_0^2 + (3\Delta v)^2 + 2\vec{v}_0.3\Delta\vec{v}.$$

Từ ba phương trình trên ta tìm được

$$\Delta v = \frac{3v_0}{4\sqrt{2}};\ v_3 = \frac{v_0\sqrt{7}}{4}.$$

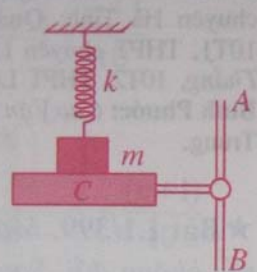
Gia tốc của vật bằng $a = \frac{\Delta v}{\tau} = \frac{3v_0}{4\sqrt{2}.\tau}$. ❐

➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Hà Giang: *Đỗ Văn Hà*, 11 Lý THPT chuyên Hà Giang; **Nghệ An:** *Bùi Hữu Vinh, Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Văn Mạnh*, 12A1, THPT Hậu Lộc; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Thanh Dư*, 10L, THPT TP. Cao Lãnh.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/399. *Cho một cơ hệ như hình vẽ. Giá đỡ C có thể trượt dọc theo trục thẳng đứng AB. Trên giá đỡ đặt một vật có khối lượng m = 0,1kg. Vật này được gắn vào một đầu của lò xo có khối lượng không đáng kể, có độ cứng k = 20N/m. Lúc đầu, lò xo ở trạng thái tự nhiên. Sau đó cho giá đỡ bắt đầu trượt xuống với gia tốc a = 2m/s². Lấy g = 10m/s².*



a) Hỏi sau bao lâu thì giá đỡ rời khỏi vật?

b) Tính biên độ dao động của vật sau đó.

Lời giải. *a) Thời gian giá đỡ rời khỏi vật*

Tác dụng lên vật có ba lực: trọng lực $m\vec{g}$, phản lực $\vec{N}$ của giá đỡ, lực đàn hồi $\vec{F}_{dh}$ của lò xo. Áp dụng *định luật II Newton*, ta có

$$m\vec{g} + \vec{F}_{dh} + \vec{N} = m\vec{a} \quad (1)$$

Nếu chọn chiều dương hướng xuống dưới thì phương trình trên có thể viết

$$mg - kx - N = ma \quad (2)$$

Khi giá đỡ bắt đầu rời khỏi vật thì $N = 0$, từ (2) suy ra

$$x = \frac{m(g-a)}{k} = 0{,}04\,(\text{m}) = 4\ (\text{cm}).$$

Ở đây x là quãng đường vật đi được kể từ lúc giá đỡ bắt đầu trượt đến lúc nó rời khỏi vật. Chuyển động của vật trong trường hợp này là chuyển động nhanh dần đều, không có vận tốc ban đầu. Vì vậy

$$x = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = 0{,}2\ (\text{s}).$$

b) Biên độ dao động A

Vận tốc của vật lúc bắt đầu rời khỏi giá đỡ là

$$v = at = 0{,}4\ (\text{m/s}).$$

Khi giá đỡ rời khỏi vật thì tác dụng lên vật lúc này chỉ còn trọng lực của vật và lực đàn hồi của lò xo. Vì vậy, vật sẽ dao động điều hòa. Ở vị trí cân bằng thì

$$k\Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} = 5\ (\text{cm}).$$

Lúc rời khỏi giá đỡ, lò xo đã dãn 4 cm. Gọi X là tọa độ của vật đối với vị trí cân bằng, ta có

$$X = x - \Delta l = 4\text{ cm} - 5\text{ cm} = -1\text{ cm}.$$

Hệ thức liên hệ giữa X, A, ω và v cho bởi biểu thức

$$v^2 = \omega^2\left(A^2 - X^2\right) = \frac{k}{m}\left(A^2 - X^2\right)\left(\omega^2 = \frac{k}{m}\right).$$

Từ đây ta tìm được $A = 3$ cm. ❐

➤**Nhận xét.** Các bạn có lời giải tốt là:

Hưng Yên: *Nguyễn Thị Mĩ Hằng*, 12TN7, THPT Văn Giang; **Bắc Ninh:** *Lê Văn Mạnh*, 12 Hóa, THPT chuyên Bắc Ninh; **Thái Bình:** *Vũ Việt Anh*, 12A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Hữu Hoàng*, 12 Hóa, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nam Định:** *Trần Quốc Đạt*, 12C3, THPT A Hải Hậu; **Quảng Trị:** *Nguyễn Đức Lâm*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Nguyễn Long Phước Đường*, 12A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Mạnh, Vũ Hoàng Nguyên, Mai Văn Tùng*, 12A1, THPT Hậu Lộc 4; **Quảng Ngãi:** *Phạm Quốc Việt*, 11B1, THPT Bình Sơn; *Phạm Quốc Đô*, 12C1, THPT chuyên Lê Khiết; **Nghệ An:** Nguyễn *Văn Hoàng, Bùi Hữu Vinh*, 11T7, THPT Đô Lương I.

NGUYỄN VĂN THUẬN

<u>Nhắn tin</u>: Các bạn đoạt giải trong Cuộc thi giải Toán – Vật lí trên Tạp chí THTT năm học 2009 – 2010 hãy gửi địa chỉ mới về tòa soạn để nhận Giải thưởng và Bằng Chứng nhận.

THTT

... (Tiếp trang 17)

T8/403. Let $A_1A_2A_3...A_n$ be a convex polygon ($n \geq 3$) on the plane (P) and let S be a point outside (P). Another plane (α) intersects the sides $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ at $B_1, B_2, ..., B_n$ respectively such that

$$\frac{SA_1}{SB_1}+\frac{SA_2}{SB_2}+...+\frac{SA_n}{SB_n}=a$$

where a is a given positive number.
Prove that such a plane (α) always contains a fixed point.

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/403. Two circles ω_1, ω_2 intersect at points A, B. CD is a common tangent line of ω_1, ω_2 $(C \in \omega_1, D \in \omega_2)$ where point B is closer to CD than point A. CB cuts AD at E, DB cuts CA at F and EF cuts AB at N. K is the orthogonal projection of N onto CD.

a) Prove that $\widehat{CAB}=\widehat{DAK}$.

b) Let O be the circumcenter of the triangle ACD and H is the orthocenter of the triangle KEF. Prove that O, B, H are collinear .

T10/403. Let (x_n) be the sequence where $x_1=5$ and $x_{n+1}=\dfrac{x_n^{2010}+3x_n+16}{x_n^{2009}-x_n+11}$, for all $n=1, 2, ...$

For each positive number n, put

$y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^{2009}+7}$. Determine $\lim y_n$.

T11/403. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfy the following equation

$f(f(x-y))=f(x).f(y)+f(x)-f(y)-xy$,

for every $x, y \in \mathbb{R}$.

T12/403. For each $n \in \mathbb{N}^*$, let a_n be a number of bijections f: $\{1,2,...,n\} \to \{1,2,..., n\}$ such that $f(f(k))=k$ for all $k \in \{1,2,...,n\}$.

1) Prove that a_n is an even number for every $n \geq 2$.

2) Prove that for every $n \geq 10$ and n is divisible by 3 then $a_n - a_{n-9}$ is divisible by 3.

Translated by LE MINH HA

SUY NGHĨ THÊM...

(Tiếp trang 15)

Ta có $-8\sin^2 2\left(x+\dfrac{17\pi}{4}\right)+4(\cos 2x+1)$

$=-8\cos^2 2x+4\cos 2x+4$

$=4\cos 2x-4\cos 4x=8\sin x\sin 3x.$

Do đó PT (4) $\Leftrightarrow \cos^2 x-\cos 5x\cos 3x$
$=8\sin x\cos x\sin 3x\cos 3x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+\cos 2x}{2}-\dfrac{\cos 8x+\cos 2x}{2}=2\sin 2x\sin 6x$

$\Leftrightarrow 1-\cos 8x=4\sin 6x\sin 2x$

$\Leftrightarrow 1-\cos 8x=2(\cos 4x-\cos 8x)$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x(\cos 4x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\ \cos 4x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4} & (a)\\ x=\dfrac{k\pi}{2} & (b)\end{array}\right.$$

Đối chiếu ĐK:

* Nhận thấy $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{m\pi}{3} \Leftrightarrow 6k-8m=1$ không có nghiệm nguyên.

Suy ra, nghiệm (a) thỏa mãn ĐK.

*Nghiệm (b) bị loại với $k,m\in\mathbb{Z}$ sao cho

$\dfrac{k\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{m\pi}{3} \Leftrightarrow 3k-2m=1 \Leftrightarrow \begin{cases}k=1-2t\\ m=1-3t\end{cases} (t\in\mathbb{Z}).$

Suy ra với k chẵn, tức là $x=l\pi\ (l\in\mathbb{Z})$ nghiệm của PT (4) là $x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4};\ x=l\pi\ (k, l\in\mathbb{Z})$. ❐

Để kết thúc bài viết, xin mời các bạn hãy giải các phương trình sau:

1. $\tan^2 2x\tan^2 3x\tan 5x=\tan^2 2x-\tan^2 3x+\tan 5x.$
2. $|\cos x+2\cos 2x-\cos 3x|=1+2\sin x-\cos 2x.$
3. $\tan 4x+\tan x=2\tan 3x.$
4. $2\sin 3x-\dfrac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\dfrac{1}{\cos x}.$
5. $\sqrt{\cos 2x+\sqrt{1-\sin 2x}}=2\sqrt{\sin x-\cos x}.$
6. $\dfrac{3(\cos 2x+\cot 2x)}{\cot 2x-\cos 2x}=2(\sin x+\cos x)^2.$
7. $\dfrac{(\sqrt{3}-\tan x)(\cos x-\sin 2x)}{(2\cos^2 x+\sin x-1)(1+\sqrt{3}\tan x)}$
$=\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right).$

TOÁN HỌC VÀ THƠ ĐƯỜNG LUẬT

LÝ VĂN TOÁN
(Hà Nội)

Thơ Đường luật, gọi tắt là thơ Đường, xuất hiện từ thời nhà Đường (Trung Quốc). Thơ Đường có dạng "*thất ngôn bát cú*", tức là thơ có 8 câu, mỗi câu có 7 chữ (hay 7 tiếng), gọi là dạng *chuẩn*. Ngoài ra thơ Đường còn có những dạng khác như "*thất ngôn tứ tuyệt*" (bốn câu, mỗi câu có 7 chữ), "*ngũ ngôn tứ tuyệt*" (bốn câu, mỗi câu có 5 chữ), ...

A. Các quy tắc trong thơ Đường luật chuẩn

Thơ Đường có kết cấu vô cùng chặt chẽ. Toàn bộ nội dung bài thơ gói gọn trong 56 chữ chia thành 8 câu thơ: hai câu đầu gọi là *đề*, tiếp theo là hai câu *thực*, rồi đến hai câu *luận*, cuối cùng là hai câu *kết*. Tám câu thơ đó còn phải đáp ứng được những quy tắc nghiêm khắc về *niêm luật* và *vần*.

1. Luật

a) Luật bằng - trắc

Các chữ không có dấu thanh, hoặc có dấu huyền gọi là các chữ có thanh *bằng*. Các chữ có một trong các dấu: sắc, hỏi, ngã, nặng gọi là các chữ có thanh *trắc*.

Luật *bằng* - *trắc* của thơ Đường quy định về thanh cho các chữ thứ 2, 4 và 6 trong mỗi câu theo quy tắc sau:

- Nếu chữ thứ 2 dùng thanh *bằng* thì chữ thứ 4 phải là thanh *trắc*, chữ thứ 6 phải là thanh *bằng*. Ví dụ (trích trong Bài thơ "*Thu điếu*" của Nguyễn Khuyến):

	Ao	*thu*	*lạnh*	*lẽo*	*nước*	*trong*	*veo*
Chữ thứ	1	2 (bằng)	3	4 (trắc)	5	6 (bằng)	7

- Nếu chữ thứ 2 dùng thanh *trắc* thì chữ thứ 4 phải là thanh *bằng*, chữ thứ 6 phải là thanh *trắc*. Ví dụ (trích trong Bài thơ "*Thu điếu*" của Nguyễn Khuyến):

	Một	*chiếc*	*thuyền*	*câu*	*bé*	*tẻo*	*teo*
Chữ thứ	1	2 (trắc)	3	4 (bằng)	5	6 (trắc)	7

Các chữ thứ 1, 3 và 5 không bị ràng buộc gì.

Câu thơ Đường viết không đúng luật *bằng* - *trắc* thì gọi là "*thất luật*".

b) Luật đối

Trong thơ Đường, hai câu *thực* phải là hai vế của một đôi câu đối; hai câu *luận* cũng lập thành một đôi câu đối nữa. Một đôi câu đối hoàn chỉnh phải đáp ứng được những yêu cầu sau:

- Đối ý: tức là sự tương phản hoặc sự cân xứng về nghĩa của hai vế đối.

- Đối chữ: tức là sự tương đương trong cách dùng từ, bao gồm hai phương diện:

+ Về thanh: thanh *bằng* đối với thanh *trắc* và ngược lại, đặc biệt nghiêm ngặt đối với các chữ thứ 2, 4, 6, 7 trong câu thơ;

+ Về từ và ngữ: từ đơn đối với từ đơn, từ kép đối với từ kép, từ láy đối với từ láy, ...; thực từ đối với thực từ, hư từ đối với hư từ; chủ ngữ đối với chủ ngữ, vị ngữ đối với vị ngữ; .... (đôi khi người ta đề cao yêu cầu này mà xem nhẹ yêu cầu kia để nêu bật dụng ý của câu đối).

Ví dụ (trích trong Bài thơ "*Thu điếu*" của Nguyễn Khuyến):

Sóng biếc đưa làn hơi gợn tí
Lá vàng trước gió khẽ đưa vèo.

Bài thơ Đường viết không đúng luật *đối* thì gọi là "*thất đối*".

2. Niêm

Các câu thơ trong một bài thơ Đường phải liên kết với nhau theo quy tắc sau gọi là *niêm* (*niêm* có nghĩa là dính vào): chữ thứ 2 trong các câu thơ thứ 1, 4, 5 và 8 phải cùng thanh (cùng *bằng* hoặc cùng *trắc*) và khác thanh so với chữ thứ 2 trong các câu còn lại.

Như vậy, chữ thứ 2 trong câu thơ đầu tiên sẽ quyết định thanh của chữ thứ 2 trong các câu thơ còn lại và do đó nó cũng quyết định thanh của các chữ thứ 4, 6 trong mọi câu thơ (theo luật *bằng - trắc*). Vì vậy, dễ thấy rằng có và chỉ có hai dạng thơ Đường luật sau đây:

1) *Dạng luật bằng* (tức là chữ thứ 2 trong câu thơ đầu tiên có thanh *bằng*)

2) *Dạng luật trắc* (tức là chữ thứ 2 trong câu thơ đầu tiên có thanh *trắc*).

Bài thơ Đường viết không đúng quy tắc trên thì gọi là "*thất niêm*".

3. Vần

Trong một bài thơ Đường chuẩn, chữ cuối cùng trong các câu thơ thứ 1, 2, 4, 6 và 8 phải có cùng *vần*, tức là có cách phát âm giống nhau hoặc gần giống nhau. Thông thường, người ta còn yêu cầu các chữ ấy phải khác nhau (riêng chữ thứ 1 và chữ thứ 8 là có thể như nhau). Hầu hết các bài thơ Đường đều dùng vần có thanh *bằng*.

Bài thơ Đường viết không đúng về *vần* thì gọi là "*thất vần*".

B. Một số dạng khác của thơ Đường

1. *Thất ngôn tứ tuyệt*. Giống như 4 câu đầu hoặc 4 câu cuối của một bài thất ngôn bát cú, giữ nguyên luật *bằng - trắc* (bỏ qua luật đối), *niêm* và *vần*.

2. *Ngũ ngôn tứ tuyệt*. Có được từ bài thất ngôn tứ tuyệt đem bỏ đi hai chữ đầu trong mỗi câu (giữ nguyên luật *bằng - trắc*, *niêm* và *vần* đối với các chữ còn lại).

3. *Ngũ ngôn bát cú*. Có được từ bài thất ngôn bát cú đem bỏ đi hai chữ đầu trong mỗi câu (giữ nguyên luật *bằng - trắc*, *niêm* và *vần* đối với các chữ còn lại, bỏ qua luật *đối*).

C. Một thú chơi thơ Đường có tư duy toán học

Một bài thơ Đường hay là bài thơ mà trong khuôn khổ chật hẹp của 56 chữ với những niêm luật khắt khe ấy, lời thơ vẫn thanh thoát, ý thơ vẫn dồi dào, tứ thơ vẫn đậm đà sáng tạo. Làm một bài thơ Đường thật là khó, nhưng cũng giống như giải một bài toán khó, người ta sẽ ấm ức khi không giải được, còn khi đã giải được rồi thì một cảm giác thích thú sẽ dâng trào, nó làm cho người ta muốn nhâm nhi, muốn thưởng thức, muốn chia sẻ cái thú vị ấy với bạn bè tri kỉ.

Người chơi thơ Đường thường thách (mời) nhau họa thơ, tức là làm bài (gọi là bài họa) đáp lại một bài thơ cho trước (gọi là bài xướng) sao cho các chữ cuối của các câu 1, 2, 4, 6, 8 của hai bài là hoàn toàn như nhau. Trong khuôn khổ của bài báo này, tôi xin không đi sâu vào vấn đề đó mà giới thiệu một cách chơi thơ Đường khác, khá độc đáo và mang đậm màu sắc của tư duy toán học.

Cho một bài thơ Đường, nếu tại vị trí của mỗi chữ thứ 2, 4, 6, 7 của mỗi câu, ta viết B khi chữ đó là thanh *bằng*, viết T khi chữ đó là thanh *trắc*, và viết X tại vị trí của các chữ còn lại thì ta thu được một bảng gồm 8 dòng, 7 cột gọi là ma trận của bài thơ đó. Rõ ràng chỉ có hai dạng ma trận sau đây ứng với hai dạng thơ Đường đã nêu trên:

Dạng luật bằng	*Dạng luật trắc*
X B X T X B B	X T X B X T B
X T X B X T B	X B X T X B B
X T X B X T T	X B X T X B T
X B X T X B B	X T X B X T B
X B X T X B T	X T X B X T T
X T X B X T B	X B X T X B B
X T X B X T T	X B X T X B T
X B X T X B B	X T X B X T B

Ta có nhận xét rằng:

1) Nếu thay thế cột đầu của một trong hai ma trận trên bởi cột cuối viết theo thứ tự ngược lại thì ta được một ma trận có tính chất đối xứng tâm (chẳng hạn từ ma trận dạng luật bằng, ta được ma trận 1 dưới đây). Do không có quy định gì về thanh của các chữ đầu trong mỗi câu thơ nên nhà thơ có thể viết sao cho ma trận 1 của bài thơ đó có tính chất đối xứng tâm. Điều đó có nghĩa là: Nếu đọc bài thơ từng câu, từ dưới lên trên, từ phải qua trái mà từng câu thơ và cả bài thơ vẫn có nghĩa thì ta có thể thu được một bài thơ Đường mới, hoàn toàn đúng niêm luật. Bài thơ có tính chất như thế được gọi là thơ "*thuận nghịch độc*" (đọc xuôi và đọc ngược đều có nghĩa) (*).

Ma trận 1
B B X T X B B
T T X B X T B
B T X B X T T
T B X T X B B
B B X T X B T
T T X B X T B
B T X B X T T
B B X T X B B

Một bài thơ *thuận nghịch độc* rất nổi tiếng là bài "*Cảnh xuân*" (đáng tiếc, chưa rõ tác giả là ai):

Ta mến cảnh xuân ánh sáng ngời,
Thú vui thơ rượu chén đầy vơi.
Hoa cài dậu trúc cành xanh biếc
Lá quyện hương xuân sắc thắm tươi.
Qua lại khách chờ sông lặng sóng
Ngược xuôi thuyền đợi bến đông người.
Xa ngân tiếng hát đàn trầm bổng
Tha thướt bóng ai mắt mỉm cười.

Đọc ngược từ dưới lên trên, từ phải qua trái là

Cười mỉm mắt ai bóng thướt tha,
Bổng trầm đàn hát tiếng ngân xa,
Người đông bến đợi thuyền xuôi ngược.
Sóng lặng sông chờ khách lại qua,
Biếc xanh cành trúc dậu cài
Vơi đầy chén rượu thơ vui thú.
Ngời sáng ánh xuân cảnh mến ta.

2) Theo cách cấu tạo một bài thơ ngũ ngôn bát cú, từ hai bài thơ trên, nếu bỏ đi hai chữ đầu trong mỗi câu, ta sẽ được hai bài thơ *ngũ ngôn bát cú*. Bạn thử xem (**).

3) Nếu thay thế cột đầu của một trong hai ma trận trên bởi cột cuối viết theo đúng thứ tự đó thì ta được một ma trận có tính chất đối xứng trục. Khi đó nếu viết lại bài thơ theo thứ tự từ trên xuống dưới, nhưng từ phải qua trái thì ta cũng được một bài thơ Đường (nếu có nghĩa) với niêm luật nghiêm chỉnh. Đáng tiếc là tác giả bài này chưa tìm thấy bài thơ nào có tính chất đó.

Chú thích

(*) Đến nay người ta mới tìm được khoảng 20 bài thơ thuận nghịch độc, trong đó có các bài "*Xuân hứng*" của Vua *Tự Đức* và "*Cửa sổ đêm khuya*" *Hàn Mặc Tử*. Sau đây xin giới thiệu một bài thơ khác, bài "*Phong cảnh Tây Hồ*" của *Nguyễn Huy Lượng*

Đầy vơi thực lạ cảnh Tây Hồ,
Trước tự Trời kia khéo vẻ đồ.
Mây lẫn nước xanh màu đúc ngọc,
Nguyệt lồng hoa thắm vẻ in châu.
Cây là tán rợp tầng cao thấp,
Sóng gợn cầm tâu nhịp nhỏ to.
Bầy sẵn thú vui non nước đủ,
Tây Hồ giá ấy dễ đâu so !

(**) Bằng cách tương tự, từ bài thơ này, người ta còn có thể tạo ra được 8 bài thơ nữa. Ngoài ra, nếu lấy chất liệu là 56 chữ của bài thơ này (viết theo một chỉnh hợp nào đó) người ta còn viết được hàng trăm bài thơ với các thể loại khác nhau.

XUẤT BẢN TỪ 19..
Số 403(1.20..
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà ...
ĐT Biên tập: 04.35121...
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121...
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐI...

