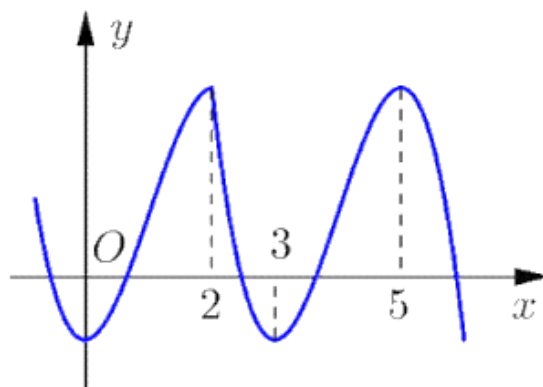


DẠNG 5**Bài tập phương trình Mũ – Logarit số 02**

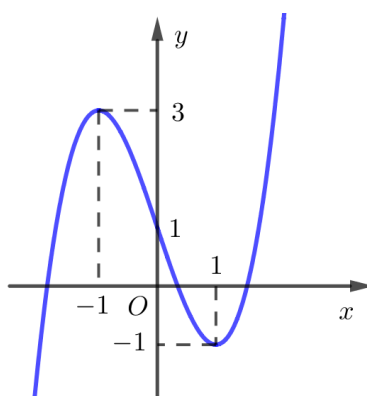
- Câu 1:** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^x \cdot 5^{x^2-2x} = 1$. Khi đó tổng $x_1 + x_2$ bằng
 A. $2 - \log_5 2$. B. $-2 + \log_5 2$. C. $2 + \log_5 2$. D. $2 - \log_2 5$.
- Câu 2:** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-2} = 5^{x+1}$ là
 A. 1. B. $2 - \log_3 5$. C. $P = -\log_3 45$. D. $P = \log_3 5$.
- Câu 3:** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-2} = 5^{x+1}$ là
 A. 1. B. $2 - \log_3 5$. C. $P = -\log_3 45$. D. $P = \log_3 5$.
- Câu 4:** Tính tích các nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-1} = 3^{2x+3}$.
 A. $-3\log_2 3$. B. $-\log_2 54$. C. -1. D. $1 - \log_2 3$.
- Câu 5:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(7-3^x) = 2-x$ bằng
 A. 2. B. 1. C. 7. D. 3.
- Câu 6:** Cho hai số thực a, b phân biệt thỏa mãn $\log_3(7-3^a) = 2-a$ và $\log_3(7-3^b) = 2-b$. Giá trị biểu thức $9^a + 9^b$ bằng
 A. 67. B. 18. C. 31. D. 82.
- Câu 7:** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(17 \cdot 2^x - 8) = 2x$ bằng
 A. 1. B. 2. C. -2. D. 3.
- Câu 8:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_5(25^x - 3 \cdot 5^x + 15) = x+1$ bằng
 A. $\frac{1 - \log_3 5}{\log_3 5}$. B. $\frac{1 + \log_3 5}{\log_3 5}$. C. 8. D. $\frac{1 + \log_5 3}{\log_5 3}$.
- Câu 9:** Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \frac{5b-a}{2}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng
 A. $\frac{a}{b} = -1 + \sqrt{6}$. B. $\frac{a}{b} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{25}$. C. $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{6}}{5}$. D. $\frac{a}{b} = 7 - 2\sqrt{6}$.
- Câu 10:** Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $\log_5(25 - 5^x) + x - 3 = 0$.
 A. $T = 1$. B. $T = 3$. C. $T = 25$. D. $T = 2$.
- Câu 11:** Số nghiệm của phương trình $2^{x^3+2x^2-3x} \cdot 3^{x-1} = 1$ là:
 A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.
- Câu 12:** Xác định m để phương trình $2\log_{(m^2+2)}(x-1) = \log_{(m^2+2)}(mx^2+1)$ có nghiệm
 A. $m < 1$. B. $-1 < m < 1$. C. $m > 1$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$.

Câu 13: Cho số thực m và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình có $f(2^x + 2^{-x}) = m$ nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



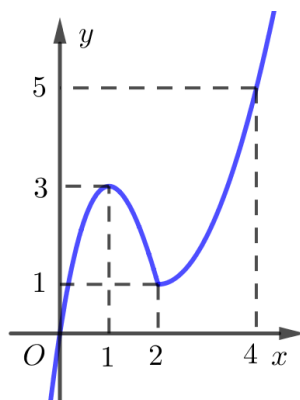
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là



- A. $[-1; 3)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-1; 3)$. D. $[-1; 1)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $f[4(\sin^6 x + \cos^6 x)] = m$ có nghiệm.



- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 16: Biết x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + 5^{x^2 - 3x + 1} = 2$ và $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a - 2b$?

- A. 5. B. -1. C. 1. D. 9.

Câu 17: Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1}$ có hai nghiệm thực phân biệt là $(a; \sqrt{b})$. Tính $S = 2a + 3b$

- A. $S = 29$. B. $S = 28$. C. $S = 32$. D. $S = 36$.

Câu 18: Phương trình $\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 8} = x^2 - 4x + 3$ có nghiệm các nghiệm $x_1; x_2$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

- A. 31 B. -31. C. 1 D. -1.

Câu 19: Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong khoảng $(-20; 20)$ để phương trình có nghiệm.

- A. 15. B. 14. C. 19. D. 17.

Câu 20: Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2 \left(\frac{2x^2 + 1}{2x} \right) + 2^{\left(x + \frac{1}{2x} \right)} = 5$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

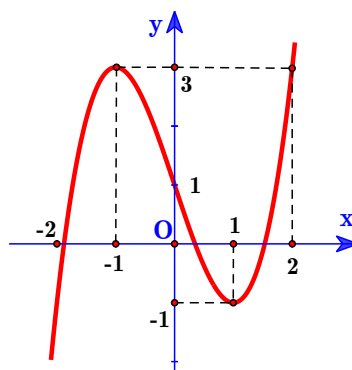
Câu 21: Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1; 8]$.

- A. $6 \leq m \leq 9$. B. $2 \leq m \leq 3$. C. $2 \leq m \leq 6$. D. $3 \leq m \leq 6$.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{\sqrt{4x-x^2}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{4x-x^2}} + 2m - 1 = 0$ có nghiệm?

- A. 27. B. 25. C. 23. D. 24.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số các giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 5 để phương trình $f(\pi^x) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

- A. 5. B. 4. C. 7. D. 6.

Câu 24: Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 20. B. 21. C. 9. D. 19.

- Câu 25:** Cho $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?
A. 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 4.
- Câu 26:** Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x.5^x = 5^{x+1} + 27x + 23$ là
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.
- Câu 27:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x+3=me^x$ có 2 nghiệm phân biệt?
A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** Vô số.
- Câu 28:** Phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$ có hai nghiệm là a và $\frac{a}{b}$. Giá trị của b là
A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 29:** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x+3=me^x$ có 2 nghiệm phân biệt?
A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** Vô số.
- Câu 30:** Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-200; 200)$ để phương trình $e^x + e^{x+a} = \ln(1+x) - \ln(x+a+1)$ có nghiệm thực duy nhất.
A. 399. **B.** 199. **C.** 200. **D.** 398.
- Câu 31:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình $2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0$. Có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.
A. 4038. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 4039.
- Câu 32:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1-2x-2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$.
A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.
- Câu 33:** Nghiệm dương của phương trình $\log_2(\sqrt{2x^2-3x+1}) + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x^2+3x} = 2$ có dạng $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$). Giá trị của $a+b+c$ bằng:
A. 20. **B.** 23. **C.** 24. **D.** 42.
- Câu 34:** Cho a, b là các số dương lớn hơn 1, thay đổi thỏa mãn $a+b=2019$ để phương trình $5\log_a x \cdot \log_b x - 4\log_a x - 3\log_b x - 2019 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Biết giá trị lớn nhất của $\ln(x_1 x_2)$ bằng $\frac{3}{5}\ln\left(\frac{m}{7}\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\frac{n}{7}\right)$, với m, n là các số nguyên dương. Tính $S = m + 2n$.
A. 22209. **B.** 20190. **C.** 2019. **D.** 14133.
- Câu 35:** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2019^{\frac{2x+y}{(x+1)^2}} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = 2y - x$ bằng
A. $P_{\min} = \frac{1}{4}$. **B.** $P_{\min} = \frac{1}{2}$. **C.** $P_{\min} = \frac{7}{8}$. **D.** $P_{\min} = \frac{15}{8}$.

Câu 36: Tìm số nghiệm của phương trình $(|x|-1)^2 e^{(|x|-1)} - \log 2 = 0$.

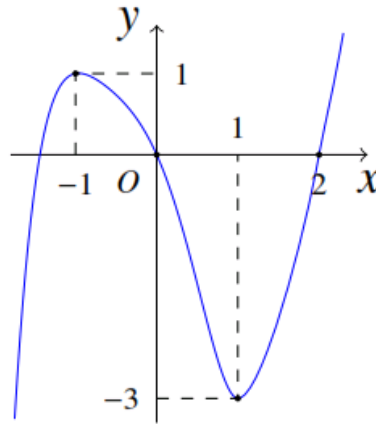
A. 3.

B. 4

C. 0

D. 2

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $f(2 + f(e^x)) = 1$ là

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Câu 38: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a \neq 1, \log_3 a + b = 0, \log_a b = \frac{1}{c}, \ln \frac{b}{c} = c - b$. Tổng $S = a + b + c$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.B. $\left(\frac{6}{5}; \frac{3}{2}\right)$.C. $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.D. $\left(3; \frac{7}{2}\right)$.

Câu 39: Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m| + 5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}(|m| + 5)$ có nghiệm.

A. $\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$.B. $-5 \leq m \leq 5$.C. $5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6}$.D. $-\sqrt{6} \leq m \leq 5$.

Câu 40: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2 + y^2 + xy + 2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\frac{43+3\sqrt{249}}{94}$.B. $\frac{37-\sqrt{249}}{94}$.C. $\frac{69-\sqrt{249}}{94}$.D. $\frac{69+\sqrt{249}}{94}$.

Câu 41: Tìm tham số m để tổng các nghiệm của phương trình sau đạt giá trị nhỏ nhất:
 $1 + [2x^2 - m(m+1)x - 2] \cdot 2^{1+mx-x^2} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{mx(1-m)} + x^2 - m^2x$.

A. 0.

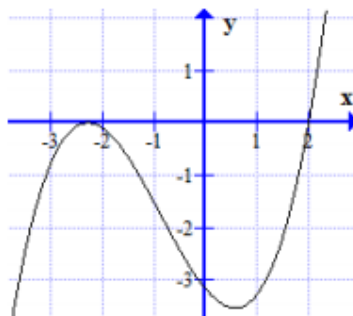
B. 2.

C. $-\frac{1}{2}$.D. $\frac{1}{2}$.

Câu 42: Cho phương trình $m \ln^2(x+1) - (x+2-m) \ln(x+1) - x - 2 = 0$ (1). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng

A. $(3, 8; 3, 9)$.B. $(3, 6; 3, 7)$.C. $(3, 7; 3, 8)$.D. $(3, 5; 3, 6)$.

- Câu 43:** Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$ có ba nghiệm phân biệt bằng
- A. 45. B. 38. C. 34. D. 27.
- Câu 44:** Cho phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.
- A. 4036. B. 4034. C. 4038. D. 4040.
- Câu 45:** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.
- A. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$. B. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{3}$. C. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{9}$. D. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{9}$.
- Câu 46:** Phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$ có hai nghiệm là a và $\frac{a}{b}$. Giá trị của b là
- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.
- Câu 47:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $\log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} \geq 2x^2 + 4x + 5 - 2m$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng
- A. 20. B. 10. C. 15. D. 5.
- Câu 48:** Cho hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + e^x - e^{-x}$. Hỏi phương trình $f(3^x) + f(2x-1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?
- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.
- Câu 49:** Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-2019; 2019)$ để phương trình $\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} = x + a$ có hai nghiệm phân biệt?
- A. 0. B. 2022. C. 2014. D. 2015.
- Câu 50:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left[x(m - 2^{f(\sin x)}) + 2 \cdot 2^{f(\sin x)} + m^2 - 3 \right] \cdot (2^{f(x)} - 1) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số tập con của tập hợp S là



- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 51: Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-2019; 2019)$ để phương trình $\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} = x + a$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. 0. B. 2022. C. 2014. D. 2015.

Câu 52: Số nghiệm của phương trình $50^x + 2^{x+5} = 3 \cdot 7^x$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 53: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ của tham số m để bất phương trình $f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} - f(m) \leq 0$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng

- A. 9. B. 10. C. 12. D. 11.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
y'		-	0	+	0	-
y	$+\infty$		$\frac{15}{13}$		$\frac{15}{13}$	
			1			$-\infty$

Giá trị lớn nhất của m để phương trình: $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}} = m$ có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$.

- A. e^5 . B. $e^{\frac{15}{13}}$. C. e^3 . D. e^4 .

Câu 55: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$

- A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 56: Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm là

- A. 1. B. 0. C. -2. D. 4.

Câu 57: Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{1}{2}\log_2 \frac{2x^2-4x+6}{|x-m|+1} + x^2 = 2(x+|x-m|)$

có đúng ba nghiệm phân biệt là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 58: Tìm số giá trị nguyên của m thuộc $[-20; 20]$ để phương trình $\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m-9)x - 1 + (1-2m)\sqrt{x^2 + 4}$ có nghiệm?

- A. 12. B. 23. C. 25. D. 10.

Câu 59: Cho hai số dương $x; y$ thỏa $\log_2(4x+y+2xy+2)^{y+2} = 8 - (2x-2)(y+2)$. Giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + y$ là số có dạng $M = a\sqrt{b} + c$ với $a, b \in \mathbb{N}, a > 2$. Tính $S = a + b + c$.

- A. $S = 17$. B. $S = 7$. C. $S = 19$. D. $S = 3$.

- Câu 60:** Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $(m+1).16^x - 2(2m-3).4^x + 6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu là
A. 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 61:** Biết rằng phương trình $\log_2(|2x-1|+m) = 1 + \log_3(m+4x-4x^2-1)$ có nghiệm thực duy nhất. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $m \in (0;1)$. **B.** $m \in (1;3)$. **C.** $m \in (3;6)$. **D.** $m \in (6;9)$.
- Câu 62:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x \log_3(x+1) = \log_9[9(x+1)^{2m}]$ có hai nghiệm thực phân biệt.
A. $m \in (-1;0)$. **B.** $m \in (-2;0)$. **C.** $m \in (-1;+\infty)$. **D.** $m \in [-1;0)$.
- Câu 63:** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để phương trình $2^{\cos x - 2 + \sqrt{m-3\cos x}} + (\cos^3 x + 6\sin^2 x + 9\cos x + m - 6)2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1$ có nghiệm thực. Khi đó tổng của hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của tập S bằng
A. 28. **B.** 21. **C.** 24. **D.** 4.
- Câu 64:** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2\log_2 x^4 + \sqrt{2\log_2 x^8 - 2m} + 2018 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$. Số phần tử của S là
A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 6.
- Câu 65:** Cho hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1).2^{7-x} - 6x + 3$. Giả sử $m_0 = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản) là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $f(7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) + 2m - 1 = 0$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b^2$.
A. $P = 11$. **B.** $P = 7$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = 9$.
- Câu 66:** Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2]$ để phương trình $(x-1)[\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1)] = 2x - m$ có đúng hai nghiệm thực là
A. 2. **B.** 2022. **C.** 1. **D.** 2021.
- Câu 67:** Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2+2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2+2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là
A. 3. **B.** -2. **C.** -3. **D.** 2.
- Câu 68:** Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log\left(\frac{x+3y}{xy}\right) = xy - x - 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{1+3y} + \frac{9y^2}{1+x}$?
A. 10. **B.** $\frac{71}{7}$. **C.** $\frac{72}{7}$. **D.** $\frac{73}{7}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.AA	2.C	3.C	4.B	5.A	6.C	7.D	8.B	9.D	10.B
11.D	12.B	13.B	14.D	15.D	16.B	17.D	18.C	19.C	20.D
21.C	22.B	23.A	24.D	25.D	26.B	27.A	28.D	29.A	30.B
31.C	32.B	33.C	34.A	35.D	36.B	37.B	38.B	39.C	40.D
41.C	42.C	43.D	44.C	45.A	46.D	47.B	48.D	49.D	50.C
51.D	52.D	53.D	54.D	55.C	56.B	57.B	58.B	59.D	60.D
61.D	62.C	63.A	64.A	65.D	66.B	67.C	68.C		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn A**

$$2^x \cdot 5^{x^2-2x} = 1 \Leftrightarrow \log_5 (2^x \cdot 5^{x^2-2x}) = 0 \Leftrightarrow x \log_5 2 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(\log_5 2 + x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 - \log_5 2 \end{cases}$$

Câu 2: Chọn C

$$3^{x^2-2} = 5^{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 2 = (x+1) \log_3 5 \Leftrightarrow x^2 - x \log_3 5 - 2 - \log_3 5 = 0.$$

Ta có $\Delta = \log_3^2 5 + 4 \log_3 5 + 8 = (\log_3 5 + 2)^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-ét, ta có $x_1 x_2 = -2 - \log_3 5 = -\log_3 3^2 - \log_3 5 = -\log_3 45$.

Câu 3: Chọn C

$$3^{x^2-2} = 5^{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 2 = (x+1) \log_3 5 \Leftrightarrow x^2 - x \log_3 5 - 2 - \log_3 5 = 0.$$

Ta có $\Delta = \log_3^2 5 + 4 \log_3 5 + 8 = (\log_3 5 + 2)^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-ét, ta có $x_1 x_2 = -2 - \log_3 5 = -\log_3 3^2 - \log_3 5 = -\log_3 45$.

Câu 4: Chọn B

Ta có: $2^{x^2-1} = 3^{2x+3}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = \log_2 3^{2x+3} \Leftrightarrow x^2 - 1 = (2x+3) \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x \log_2 3 + 3 \log_2 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x \log_2 3 - 1 - 3 \log_2 3 = 0 (*)$$

Phương trình có hệ số $a = 1, c = -(1 + 3 \log_2 3) < 0 \Rightarrow a.c < 0$, do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo vi-et: $x_1 x_2 = -1 - 3 \log_2 3 = -\log_2 2 - \log_2 3^3 = -\log_2 54$.

Câu 5: Chọn A

$$\text{Ta có } \log_3 (7 - 3^x) = 2 - x \Leftrightarrow 7 - 3^x = 3^{2-x} \Leftrightarrow 7 - 3^x = \frac{9}{3^x}.$$

$$\text{Đặt } t = 3^x (t > 0). \text{ Phương trình trở thành } 7 - t = \frac{9}{t} \Leftrightarrow -t^2 + 7t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} (tm) \\ t = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} (tm) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \\ 3^x = \frac{7-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 \left(\frac{7+\sqrt{13}}{2} \right) \\ x = \log_3 \left(\frac{7-\sqrt{13}}{2} \right) \end{cases}.$$

Tổng các nghiệm của phương trình $\log_3 \left(\frac{7+\sqrt{13}}{2} \right) + \log_3 \left(\frac{7-\sqrt{13}}{2} \right) = 2$.

Câu 6: Chọn C

Từ giả thiết ta có a, b là hai nghiệm phân biệt của phương trình

$$\log_3(7-3^x) = 2-x \Leftrightarrow 7-3^x = 3^{2-x} \Leftrightarrow 3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 9 = 0$$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} 3^a + 3^b = 7 \\ 3^a \cdot 3^b = 9 \end{cases}$.

Do đó: $9^a + 9^b = (3^a + 3^b)^2 - 2 \cdot 3^a \cdot 3^b = 7^2 - 2 \cdot 9 = 31$.

Câu 7: Chọn D

ĐKXD: $17 \cdot 2^x - 8 > 0$.

Khi đó $\log_2(17 \cdot 2^x - 8) = 2x \Leftrightarrow 17 \cdot 2^x - 8 = 2^{2x} \Leftrightarrow (2^x)^2 - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Đặt $2^x = t$ ($t > 0$). Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 17t + 8 = 0$. Phương trình có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 8 \Rightarrow 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 8 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 2^3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 3$.

Câu 8: Chọn B

$$\log_5(25^x - 3 \cdot 5^x + 15) = x + 1 \Leftrightarrow 25^x - 3 \cdot 5^x + 15 = 5^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 25^x - 8 \cdot 5^x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 3 \\ 5^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là $1 + \log_5 3 = \frac{1 + \log_3 5}{\log_3 5}$.

Câu 9: Chọn D

$$\log_9 a = \log_{16} b = \log_{12} \frac{5b-a}{2} = t. \text{ Khi đó } \begin{cases} a = 9^t \\ b = 16^t \\ \frac{5b-a}{2} = 12^t \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \left(\frac{3}{4} \right)^{2t}.$$

Ta có: $5 \cdot 16^t - 9^t = 2 \cdot 12^t \Leftrightarrow 5 - \left(\frac{9}{16} \right)^t = 2 \cdot \left(\frac{12}{16} \right)^t \Leftrightarrow -\left(\frac{3}{4} \right)^{2t} - 2 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^t + 5 = 0$.

Suy ra $\left(\frac{3}{4} \right)^t = -1 + \sqrt{6} \Rightarrow \frac{a}{b} = \left(\frac{3}{4} \right)^{2t} = 7 - 2\sqrt{6}$.

Câu 10: Chọn B

Ta có: $\log_5(25 - 5^x) + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \log_5(25 - 5^x) = 3 - x$

$$\Leftrightarrow 25 - 5^x = 5^{3-x} \Leftrightarrow 25 - 5^x = \frac{5^3}{5^x} \Leftrightarrow 25 \cdot 5^x - 5^{2x} = 125. \quad (1)$$

Đặt $5^x = t$ với $t > 0$. Phương trình (1) trở thành:

$$25t - t^2 = 125 \Leftrightarrow t^2 - 25t + 125 = 0. \quad (2)$$

Phương trình (2) có $\begin{cases} \Delta = 25^2 - 4 \cdot 125 = 125 > 0 \\ S = 25 > 0, P = 125 > 0 \end{cases}$ nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

t_1, t_2 dương thỏa mãn $t_1 + t_2 = 25$ và $t_1 \cdot t_2 = 125$.

Khi đó, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $5^{x_1} = t_1, 5^{x_2} = t_2$.

Ta có $5^{x_1+x_2} = 5^{x_1} \cdot 5^{x_2} = t_1 \cdot t_2 = 125 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$.

Vậy $T = 3$.

Câu 11: Chọn D

Nhận xét $x = 1$ không là nghiệm pt.

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(2^{(x-1)(x^2+3x)} \cdot 3^{x-1} \right) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x) + (x-1)\log_2 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 3x + \log_2 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 1 vì $\begin{cases} \Delta = 9 - 4\log_2 3 > 0 \\ 4 + \log_2 3 \neq 0 \end{cases}$.

Do đó phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Nhận xét $x = 1$ không là nghiệm pt.

Câu 12: Chọn B

Ta có $0 < m^2 + 2 \neq 1 \quad \forall m \in \mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình } 2\log_{(m^2+2)}(x-1) = \log_{(m^2+2)}(mx^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ \log_{(m^2+2)}(x-1)^2 = \log_{(m^2+2)}(mx^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 = mx^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 - \frac{2}{x} \text{ với } x \in (1; +\infty).$$

Yêu cầu bài toán trở thành định m để phương trình $m = 1 - \frac{2}{x}$ có nghiệm trên khoảng $(1; +\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = \frac{2}{x^2} > 0 \quad \forall x \in (1; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $-1 < m < 1$.

Câu 13: Chọn B

Đặt $t = t(x) = 2^x + 2^{-x}$ với $x \in [-1; 2]$.

Hàm số $t = t(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ có $t'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2$ và $t'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2^{-x} \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	-1	0	2
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$	$\frac{5}{2}$		$\frac{17}{4}$

Nhận xét: Dựa vào bảng biến thiên với mỗi $t \in \left(2; \frac{5}{2}\right]$ có 2 giá trị của x thỏa mãn $t = 2^x + 2^{-x}$

và với mỗi $t \in \left\{2\right\} \cup \left[\frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right]$ có duy nhất 1 giá trị x thỏa mãn $t = 2^x + 2^{-x}$.

Xét phương trình $f(t) = m$ với $t \in \left[2; \frac{17}{4}\right]$.

Dựa vào đồ thị phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có số nghiệm nhiều nhất khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm t_1, t_2 trong đó có: $t_1 \in \left(2; \frac{5}{2}\right]$ và $t_2 \in \left[\frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right]$.

Vậy phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Câu 14: Chọn D

Đặt $t = \sin x$, do $x \in (0; \pi)$ nên $t \in (0; 1]$.

Khi đó phương trình trở thành: $f(t) = m, t \in (0; 1]$. Đồ thị $f(t)$ trên $(0; 1]$ như hình vẽ.

Từ đồ thị ta có: Phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(t) = m$ có nghiệm trên nửa khoảng $(0; 1] \Leftrightarrow m \in [-1; 1)$.

Câu 15: Chọn D

Đặt $t = 4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) = 4 - 3\sin^2 2x \Rightarrow t \in [1; 4]$.

Do đó phương trình $f\left[4(\sin^6 x + \cos^6 x)\right] = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $f(t) = m$ có nghiệm trên đoạn $[1; 4]$.

Dựa vào đồ thị đã cho ta thấy: phương trình $f(t) = m$ có nghiệm t với $t \in [1; 4] \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 5$.

Vậy $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 16: Chọn B

Điều kiện xác định của phương trình: $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ với $t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành $\log_3(t+2) + 5^{t^2-1} - 2 = 0$.

Xét hàm số $f(t) = \log_3(t+2) + 5^{t^2-1} - 2$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{(t+2)\ln 3} + 2t \cdot 5^{t^2-1} \ln 5 > 0, \forall t \geq 0$.

Suy ra $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$. Mà $f(0) = \log_3 2 - \frac{9}{5} < 0$

Do đó phương trình $f(t) = 0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$.

Xét $t = 1$ ta có $\log_3(1+2) + 5^{1^2-1} - 2 = 0$

Suy ra $t = 1$ là nghiệm duy nhất.

$$t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 + 2x_2 = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{5}).$$

Suy ra $a = 9, b = 5$. Vậy $a - 2b = -1$.

Câu 17: Chọn D

Ta có $2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1} \Leftrightarrow m = \frac{2^x + 3}{\sqrt{4^x + 1}}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{2^x + 3}{\sqrt{4^x + 1}}$ trên $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1 - 3 \cdot 2^x) \cdot 2^x \ln 2}{(4^x + 1)\sqrt{4^x + 1}} = 0 \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\log_2 \frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	3	$\sqrt{10}$	1

Từ bản biến thiên suy ra $m \in (3; \sqrt{10})$. Do đó $\begin{cases} a = 3 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow S = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 10 = 36$.

Câu 18: Chọn C

Ta có: $3x^2 - 5x + 8 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên đk của phương trình là: $x^2 + 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > -1 \end{cases}$

$$\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 8} = x^2 - 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + 3x + 2) - \log_2(3x^2 - 5x + 8) = \frac{1}{2}[(3x^2 - 5x + 8) - (x^2 + 3x + 2)].$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + 3x + 2) + \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 2) = \log_2(3x^2 - 5x + 8) + \frac{1}{2}(3x^2 - 5x + 8).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + \frac{1}{2}t, (t > 0); f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + \frac{1}{2} > 0 \quad \forall t > 0.$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập $(0; +\infty)$.

Mà phương trình có dạng: $f(x^2 + 3x + 2) = f(3x^2 - 5x + 8).$

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(3x^2 - 5x + 8) = (x^2 + 3x + 2) \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} (t/m).$$

Vậy $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 = 1.$

Câu 19: Chọn C

Đặt $5^x + m = \log_5(x - m) = t.$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 5^x + m = t \\ \log_5(x - m) = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x + m = t \\ x - m = 5^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x + m = t \\ 5^t + m = x \end{cases}.$

Trừ hai vế ta được: $5^x - 5^t = t - x \Leftrightarrow 5^x + x = 5^t + t \Leftrightarrow f(x) = f(t).$

Với $f(x) = 5^x + x \Rightarrow f'(x) = 5^x \cdot \ln 5 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}.$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = f(t)$ có nghiệm duy nhất $x = t.$

Với $x = t$ ta có $5^x + m = x \Leftrightarrow 5^x - x = -m.$ Xét hàm số $g(x) = 5^x - x.$

$$g'(x) = 5^x \cdot \ln 5 - 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{\ln 5} \Leftrightarrow x = \log_5 \frac{1}{\ln 5}.$$

x	$-\infty$	$\log_5 \frac{1}{\ln 5}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{\ln 5} - \log_5 \frac{1}{\ln 5}$	$+\infty$

$$\Rightarrow \text{với } -m > \frac{1}{\ln 5} - \log_5 \frac{1}{\ln 5} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{\ln 5} + \log_5 \frac{1}{\ln 5}.$$

Do m là số nguyên và $m \in (-20; 20)$ nên $m \in \{-19; -18; \dots; -1\}.$

Vậy có 19 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 20: Chọn D

Điều kiện $x > 0.$ Đặt $t = x + \frac{1}{2x}, (t \geq \sqrt{2}).$

Phương trình trở thành: $\log_2 t + 2^t = 5$ (1). Xét $f(t) = \log_2 t + 2^t$ với $t \geq \sqrt{2}.$

Ta có $f(2) = 5$ nên $x = 2$ là một nghiệm của phương trình (1).

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2^t \ln 2 > 0 \quad \forall t \geq \sqrt{2} \Rightarrow f(t) \text{ luôn đồng biến trên khoảng } (\sqrt{2}; +\infty)$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(t)$ cắt đường thẳng $y = 5$ nhiều nhất tại 1 điểm.

Vậy $t = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

$$\text{Với } t = 2: x + \frac{1}{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (2).$$

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và tích tất cả các nghiệm thực của phương trình là $\frac{1}{2}$.

Câu 21: Chọn C

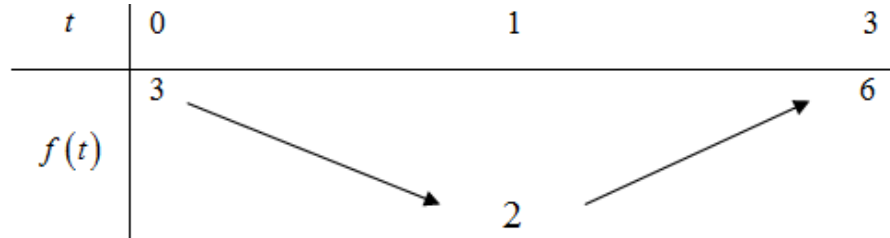
$$\text{Ta có: } \log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x + 3 = m \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = \log_2 x, x \in [1; 8] \Rightarrow t \in [0; 3]. \text{ Phương trình (1) trở thành } t^2 - 2t + 3 = m \quad (2).$$

Phương trình (1) có nghiệm $x \in [1; 8]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; 3]$.

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^2 - 2t + 3 \text{ với } t \in [0; 3].$$

Ta có bảng biến thiên:



$$\text{Vậy phương trình (1) có nghiệm } x \in [1; 8] \Leftrightarrow f(1) \leq m \leq f(3) \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 6.$$

Câu 22: Chọn B

$$\text{ĐKXĐ: } x \in [0; 4]. \text{ Đặt } t = \sqrt{4x - x^2} \text{ với } x \in [0; 4] \text{ thì } t \in [0; 2]$$

$$\text{Đặt } u = 3^t \text{ với } t \in [0; 2] \text{ thì } u \in [1; 9]$$

Khi đó, tìm m để phương trình $u^2 - 4u + 2m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 9]$.

$$\Leftrightarrow 2m = -u^2 + 4u + 1, \text{ với } u \in [1; 9]. \text{ Xét hàm số } f(u) = -u^2 + 4u + 1.$$

$$f'(u) = -2u + 4 = 0 \Leftrightarrow u = 2. \text{ Ta có, } f(1) = 4, f(2) = 5, f(9) = -44.$$

$$\text{Do đó, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi } -44 \leq 2m \leq 5 \Leftrightarrow -22 \leq m \leq \frac{5}{2}.$$

Vậy có 25 số nguyên của tham số m .

Câu 23: Chọn A

Để phương trình $\pi^x = k$ có 1 nghiệm thì $k > 0$.

Do đó để $f(\pi^x) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0 \Leftrightarrow f(\pi^x) = \frac{m^2 - 1}{8}$ có 2 nghiệm thì đường thẳng $y = \frac{m^2 - 1}{8}$ phải cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 0.

Dựa vào đồ thị ta thấy $-1 < \frac{m^2-1}{8} < 1 \Leftrightarrow -7 < m^2 < 9 \Leftrightarrow 0 \leq m^2 < 9 \Leftrightarrow m \in (-3; 3)$.

Mà $m < 5; m \in \mathbb{Z}$. Vậy $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Có tất cả 5 giá trị.

Câu 24: Chọn D

Ta có $5^x + m = \log_5(x-m)$ (*). Đặt $t = 5^x + m$.

Suy ra (*) $\Leftrightarrow t = \log_5(x-m) \Leftrightarrow x-m = 5^t \Leftrightarrow x = 5^t + m$.

Ta có hệ $\begin{cases} t = 5^x + m \\ x = 5^t + m \end{cases} \Rightarrow t-x = 5^x - 5^t \Leftrightarrow x+5^x = t+5^t$.

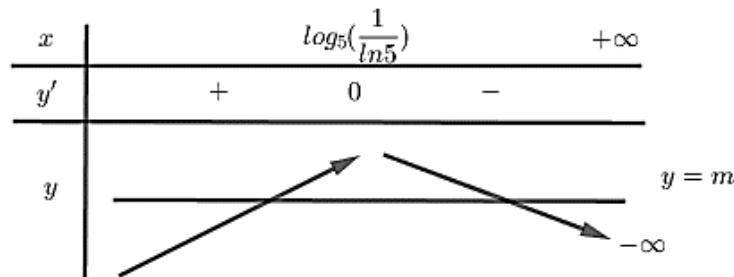
Xét hàm số $f(u) = u + 5^u$ có $f'(u) = 1 + 5^u \ln 5 > 0, \forall u$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(1) $\Leftrightarrow x = t$. Khi đó ta được $x = 5^x + m \Leftrightarrow x - 5^x = m$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - 5^x$ và đường thẳng $y = m$ song song hoặc trùng trục hoành.

Xét $y = x - 5^x$ có $y' = 1 - 5^x \ln 5$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = \log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq f\left(\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)\right) \in (-1; 0)$

Vì $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-20; 20) \end{cases}$ nên $m \in \{-19; -18; \dots; -1\}$. Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 25: Chọn D

Do $0 \leq x \leq 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa.

Ta có $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y \Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 3y - 2^{3y}$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + 2^{\log_2(x+1)} = 3y + 2^{3y}$ (1). Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 \Rightarrow f'(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (1) $\Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3y \Leftrightarrow x+1 = 2^{3y}$

$\Leftrightarrow y = \log_8(x+1)$.

Ta có $0 \leq x \leq 2020$ nên $1 \leq x+1 \leq 2021$ suy ra $0 \leq \log_8(x+1) \leq \log_8 2021$.

Lại có $\log_8 2021 \approx 3,66$ nên nếu $y \in \mathbb{Z}$ thì $y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 4 cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0; 0), (7; 1), (63; 2), (511; 3)$.

Câu 26: Chọn B

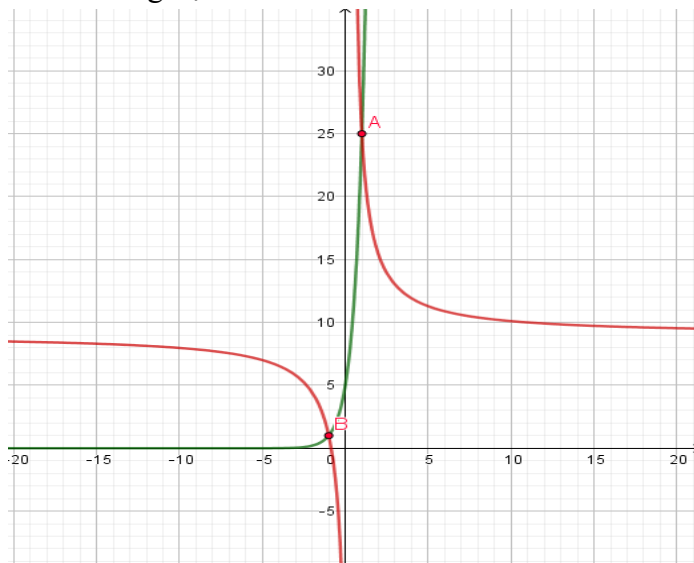
Ta thấy $x = \frac{1}{3}$ không là nghiệm của phương trình, do đó

$$15x \cdot 5^x = 5^{x+1} + 27x + 23 \Leftrightarrow 5^{x+1} = \frac{27x+23}{3x-1}$$

Xét hai hàm số $f(x) = 5^{x+1}$ và $g(x) = \frac{27x+23}{3x-1}$ trên tập $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Ta có $f'(x) = 5^{x+1} \cdot \ln 5 > 0, \forall x \neq \frac{1}{3}$ và $g'(x) = \frac{-96}{(3x-1)^2} < 0, \forall x \neq \frac{1}{3}$.

Do vậy hàm số $f(x)$ là hàm đồng biến và $g(x)$ là hàm nghịch biến trên từng khoảng xác định nên phương trình có tối đa 02 nghiệm.



Nhận thấy $x = \pm 1$ là hai nghiệm của phương trình trên.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 0.

Câu 27: Chọn A

Ta có $x+3 = me^x \Leftrightarrow me^x - x - 3 = 0$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = me^x - x - 3$ cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt. Ta có $y' = me^x - 1$.

Nếu $m \leq 0$ thì $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y = me^x - x - 3$ không thể cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt.

Nếu $m > 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = -\ln m$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\ln m$	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		$\ln m - 2$		$+\infty$

Suy ra $\ln m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < e^2$. Vậy $0 < m < e^2$. Do đó các giá trị nguyên của m là 1, 2, ..., 7.

Nhận xét: Những bài toán về số nghiệm của phương trình phụ thuộc vào tham số m ta thường tìm cách cô lập m rồi khảo sát hàm số, tuy nhiên với bài toán này, nếu làm vậy thì gặp khó khăn

trong việc khảo sát hàm số nhận được. Do đó ta xét vị trí tương đối của đồ thị một hàm khác với trục hoành. Bài toán này cần đến các kỹ năng khảo sát hàm số, giải phương trình mũ và bất phương trình logarit.

Câu 28: Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}. \text{ Ta có: } \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5.$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} - 1 = 3x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{3(x-1)^2} = 3(x-1)^2 - (2x-1).$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x-1) + (2x-1) = \log_3 (3(x-1)^2) + 3(x-1)^2 \quad (1).$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \log_3(t) + t \text{ với } t > 0 \text{ có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \quad \forall t > 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow f(2x-1) = f(3(x-1)^2).$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy hai nghiệm của phương trình là 2 và $\frac{2}{3}$ suy ra $b = 3$.

Câu 29: Chọn A

$$\text{Ta có: } x+3 = me^x \Leftrightarrow me^x - x - 3 = 0. \text{ Đặt } f(x) = me^x - x - 3 \Rightarrow f'(x) = me^x - 1.$$

Nếu $m \leq 0$ thì $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Ta xét với $m > 0$, khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\ln m$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\ln m$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\ln m - 2$	$+\infty$

Để phương trình $x+3 = me^x$ có 2 nghiệm phân biệt $\ln m - 2 < 0 \Leftrightarrow 0 < m < e^2$.

Từ đó suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Câu 30: Chọn B

Vì $e^x + e^{x+a} > 0, \forall x$ nên $\ln(1+x) > \ln(1+x+a) \Leftrightarrow 1+x > 1+x+a \Leftrightarrow a < 0$.

$$\text{Điều kiện của phương trình là } \begin{cases} 1+x > 0 \\ 1+x+a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1-a, \forall a < 0.$$

Phương trình tương đương với: $e^x + e^{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x+a+1) = 0$.

Xét hàm số $f(x) = e^x + e^{x+a} - \ln(x+1) + \ln(x+a+1)$.

Ta có

$$f'(x) = e^x + e^{x+a} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+a+1} = e^x + e^{x+a} - \frac{a}{(x+1)(x+a+1)} > 0 \quad \forall a < 0, \forall x > -a-1.$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(-1-a; +\infty)$ với $\forall a < 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -(a+1)^+} f(x) = -\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-1-a$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$\Rightarrow f(x) = 0$ luôn có một nghiệm thực duy nhất với mọi $a < 0$.

Vì $a \in (-200; 200)$ nên có 199 số a nguyên thỏa mãn.

Câu 31: Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Ta có

$$2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{m(x-2)-1}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} - \frac{1}{x-2} = -m. \quad (*)$$

$$\text{Đặt } f(x) = 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} - \frac{1}{x-2}.$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = 2019^x \ln 2019 + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \quad \forall x \in D.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+
$f(x)$	2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình (*) có 3 nghiệm thực phân biệt thì $-m > 2 \Rightarrow m < -2$.

Mà $m \in [-2019; 2019]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2017 giá trị m thỏa mãn.

Câu 32: Chọn B

$$e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$$

$$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = (x+3y-9) - (3x+5y-10)$$

$$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} + 3x+5y-10 = e^{x+3y-9} + x+3y-9. \text{ Xét hàm số } f(t) = e^t + t, t \in \mathbb{R}.$$

Ta có: $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm là duy nhất. Tức là:

$$3x + 5y - 10 = x + 3y - 9 \Leftrightarrow 2y = 1 - 2x.$$

Thay vào phương trình thứ 2, ta được:

$$\log_5^2(3x + 2y + 4) - (m + 6)\log_5(x + 5) + m^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5^2(x + 5) - (m + 6)\log_5(x + 5) + m^2 + 9 = 0 \quad (1).$$

Đặt $\log_5(x + 5) = t$ ($t \in \mathbb{R}, x > -5$). Khi đó phương trình trở thành $t^2 - (m + 6)t + m^2 + 9 = 0$.

Tồn tại x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi phương trình có nghiệm, tức là:

$$\Delta = (m + 6)^2 - 4(m^2 + 9) \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Chọn C

$$\text{Điều kiện: } 2x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \log_2\left(\sqrt{2x^2 - 3x + 1}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x^2+3x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{2x^2 - 3x + 1}\right) + 2^{2x^2-3x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{2x^2 - 3x + 1}\right) = 2 - 2^{2x^2-3x-1} \quad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 3x}; t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành: $\log_2(t + 1) = 2 - 2^{t^2-1} \quad (1)$.

Nhận thấy rằng phương trình là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = \log_2(t + 1)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$ và $y = 2 - 2^{t^2-1}$ luôn nghịch biến trên $[0; +\infty)$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t = 1$.

$$\text{Từ đó ta có phương trình: } \sqrt{2x^2 - 3x} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}.$$

Vậy $a = 3; b = 17; c = 4$. $a + b + c = 24$.

Câu 34: Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có } 5\log_a x \cdot \log_b x - 4\log_a x - 3\log_b x - 2019 = 0 \Leftrightarrow 5\frac{\ln x}{\ln a} \cdot \frac{\ln x}{\ln b} - 4\frac{\ln x}{\ln a} - 3\frac{\ln x}{\ln b} - 2019 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \ln x. \text{ Ta được phương trình: } \frac{5t^2}{\ln a \cdot \ln b} - \left(\frac{3\ln a + 4\ln b}{\ln a \cdot \ln b}\right)t - 2019 = 0$$

Do $a, b > 1 \Rightarrow \ln a \cdot \ln b > 0$. Vậy luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 . Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Mặt khác ta có: $t_1 + t_2 = \frac{3\ln a + 4\ln b}{5} = \frac{3\ln a + 4\ln(2019-a)}{5}$.

$$\Rightarrow \ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 = t_1 + t_2 = \frac{3\ln a + 4\ln(2019-a)}{5}$$

Vì $a > 1$, $b > 1$ và $a + b = 2019$ nên $a \in (1; 2018)$.

Xét hàm số $f(u) = \frac{3\ln u + 4\ln(2019-u)}{5}$ trên $(1; 2018)$.

Ta có $f'(u) = \frac{6057-7u}{5u(2019-u)} \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{6057}{7}$

Bảng biến thiên:

u	1	$\frac{6057}{7}$	2018
$f'(u)$	+	0	-
$f(u)$	$\frac{3}{5} \ln \frac{6057}{7} + \frac{4}{5} \ln \frac{8076}{7}$		

Vậy giá trị lớn nhất của $\ln(x_1 x_2)$ bằng $\frac{3}{5} \ln \frac{6057}{7} + \frac{4}{5} \ln \frac{8076}{7}$.

Do đó $m = 6075$, $n = 8076$ hay $S = m + 2n = 22209$.

Câu 35: Chọn D

Ta có: $2019^{2(x^2-y+1)} = \frac{2x+y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot 2019^{2(x^2+1)} = (2x+y) \cdot 2019^{2y}$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot 2019^{2(x+1)^2-4x} = (2x+y) \cdot 2019^{2y} \Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot 2019^{2(x+1)^2} = (2x+y) \cdot 2019^{2(2x+y)}.$$

Đặt $u = (x+1)^2$, $v = 2x+y$, ($u > 0, v > 0$), khi đó trở thành $u \cdot 2019^{2u} = v \cdot 2019^{2v}$.

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t \cdot 2019^{2t}$, ($t > 0$), ta có

$$f'(t) = 2019^{2t} + 2t \cdot 2019^{2t} \cdot \ln 2019 > 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow \text{Hàm } f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty).$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2x+y \Leftrightarrow y = x^2 + 1$.

Vậy $P = 2y - x = 2x^2 - x + 2$. Do P là hàm bậc hai có hệ số $a = 2 > 0$ nên

$$\min P = P\left(-\frac{b}{2a}\right) = P\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 2 = \frac{15}{8}.$$

Câu 36: Chọn B

$$(|x|-1)^2 e^{(|x|-1)} - \log 2 = 0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2 e^{(|x|-1)} = \log 2, (1)$$

Đặt $t = |x| - 1$, điều kiện $t \geq -1$ khi đó phương trình trở thành $t^2 e^t = \log 2, (2)$

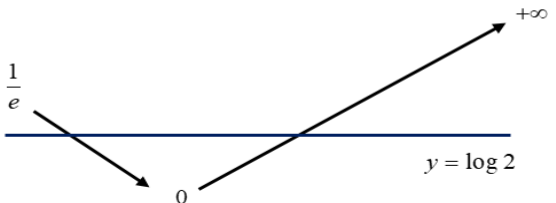
Đặt $f(t) = t^2 e^t$, $f'(t) = (t^2)' e^t + t^2 (e^t)' = (t^2 + 2t)e^t$.

Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t)e^t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}$, ($t = -2$ loại vì $t \geq -1$).

Giải phương trình: $f'(t) > 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t)e^t > 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t > 0 \Leftrightarrow t \in (0; +\infty)$,

Mà $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^t = +\infty$

Từ đó thu được bảng biến thiên của hàm số $y = f(t) = t^2 e^t$ trên $[-1; +\infty)$ như sau:

t	-1	0	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $-1 < t_1 < t_2$. Ứng với mỗi nghiệm này cho ta được hai nghiệm x nên phương trình (1) có 4 nghiệm.

Câu 37: Chọn B

Ta có: $f(2 + f(e^x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + f(e^x) = -1 \\ 2 + f(e^x) = a, (2 < a < 3) \end{cases}$

$2 + f(e^x) = -1 \Leftrightarrow f(e^x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ e^x = b < -1 (VN) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

$2 + f(e^x) = a \Leftrightarrow f(e^x) = a - 2, (0 < a - 2 < 1) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = c < -1 \\ e^x = d < 0 \\ e^x = t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \ln t$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

Câu 38: Chọn B

Ta có $\ln \frac{b}{c} = c - b \Leftrightarrow \ln b + b = \ln c + c (*)$.

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t, (t > 0) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0, \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. Phương trình có dạng $f(b) = f(c)$

Do đó ta được $b = c$. Lại có $\log_3 a + b = 0 \Leftrightarrow a = 3^{-b}$.

Thay vào $\log_a b = \frac{1}{c}$ ta được: $\log_{3^{-b}} b = \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{-1}{b} \log_3 b = \frac{1}{b} \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$.

Vậy $b = c = \frac{1}{3}, a = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$. Suy ra $S = a + b + c = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{2}{3} \in \left(\frac{6}{5}; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 39: Chọn C

Ta có:

$$3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m| + 5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10} (|m| + 5) \Leftrightarrow \frac{3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}}{3^{|m| + 5}} = \frac{\ln(|m| + 5)}{\ln(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10} \cdot \ln(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10) = 3^{|m| + 5} \cdot \ln(|m| + 5)$$

Xét $f(t) = \ln(t) \cdot 3^t, \forall t \geq 5$ có $f'(t) = \frac{1}{t} 3^t + \ln(t) 3^t \ln(3) > 0, \forall t \geq 5$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$f(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10) = f(|m| + 5) \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5} \cos x + 10 = |m| + 5 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5} \cos x + 5 = |m|$$

$$\text{Mà } -\sqrt{6} \leq \sin x + \sqrt{5} \cos x \leq \sqrt{6}$$

Vậy để phương trình có nghiệm ta phải có $5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6}$

Câu 40: Chọn D

Điều kiện $\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} > 0 \Leftrightarrow x+y > 0$.

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) + 2 - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2+y^2+xy+2-3x-3y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y) + (3x+3y) = 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2\log_3 t + t, t \in (0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{2}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow f(3x+3y) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow x^2+y^2+xy+2 = 3x+3y$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a+b \\ y = a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{x-y}{2} \end{cases}, \text{ Khi đó } P = \frac{3a-b+3}{2a+6} \text{ và (2) là: } 3(a-1)^2 + b^2 = 1.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{3}(a-1) = \cos t, \\ b = \sin t, \end{cases} (t \in [0; 2\pi]), \text{ khi đó}$$

$$P = \frac{3\cos t - \sqrt{3}\sin t + 6\sqrt{3}}{2\cos t + 8\sqrt{3}} \Leftrightarrow (2P-3) \cdot \cos t + \sqrt{3}\sin t = 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3}P$$

Do phương trình luôn có nghiệm t nên ta có

$$(2P-3)^2 + 3 \geq (6\sqrt{3} - 8\sqrt{3}P)^2 \Leftrightarrow 47P^2 - 69P + 24 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{69 - \sqrt{249}}{94} \leq P \leq \frac{69 + \sqrt{249}}{94}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{69 + \sqrt{249}}{94}$.

Câu 41: Chọn C

$$1 + [2x^2 - m(m+1)x - 2] \cdot 2^{1+mx-x^2} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{mx(1-m)} + x^2 - m^2x$$

$$\Leftrightarrow [(x^2 - mx - 1) + (x^2 - m^2x - 1)] \cdot 2^{-(x^2-mx-1)} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{(x^2-m^2x-1)-(x^2-mx-1)} + (x^2 - m^2x - 1).$$

Đặt $a = (x^2 - mx - 1)$, $b = (x^2 - m^2x - 1)$ thì phương trình trên trở thành

$$(a+b) \cdot 2^{-a} = a \cdot 2^{b-a} + b \Leftrightarrow a+b = a \cdot 2^b + b \cdot 2^a \Leftrightarrow a(2^b - 1) + b(2^a - 1) = 0.$$

Nếu $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì phương trình thỏa mãn.

Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình tương đương $\frac{2^b - 1}{b} + \frac{2^a - 1}{a} = 0$.

Nhận xét:

Với $a > 0$ thì $2^a > 1$, tức là $2^a - 1 > 0$ nên $\frac{2^a - 1}{a} > 0$.

Với $a < 0$ thì $2^a < 1$, tức là $2^a - 1 < 0$ nên $\frac{2^a - 1}{a} > 0$.

Suy ra $\frac{2^a - 1}{a} > 0, \forall a \neq 0$.

Tương tự: $\frac{2^b - 1}{b} > 0, \forall b \neq 0$.

Nên $\frac{2^b - 1}{b} + \frac{2^a - 1}{a} > 0, \forall a \neq 0, b \neq 0$. Suy ra phương trình vô nghiệm.

Do đó: $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

Tức là phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} x^2 - mx - 1 = 0 \\ x^2 - m^2x - 1 = 0 \end{cases}$.

Hai phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ và $x^2 - m^2x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trùng nhau khi $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Nếu $m = 0$ thì hai phương trình đều là $x^2 - 1 = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó là $T_1 = 0$.

Nếu $m = 1$ thì hai phương trình đều là $x^2 - x - 1 = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó là $T_2 = 1$.

Khi $m \neq 0$ và $m \neq 1$ thì hai phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ và $x^2 - m^2x - 1 = 0$ không có nghiệm nào trùng nhau.

Phương trình bậc hai $x^2 - mx - 1 = 0$ có $a.c < 0$ nên có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm đó là $x_1 + x_2 = m$.

Phương trình bậc hai $x^2 - m^2x - 1 = 0$ có $a.c < 0$ nên có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm đó là $x_3 + x_4 = m^2$.

Suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt và tổng của chúng là

$$T_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m + m^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}.$$

$$T_3 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}, \text{ nên } \min T_3 = -\frac{1}{4}.$$

So sánh $T_1, T_2, \min T_3$ thì được giá trị nhỏ nhất của tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $-\frac{1}{4}$ và đạt tại $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 42: Chọn C

Điều kiện: $x > -1$.

Vì $x = 0$ không thỏa mãn phương trình nên ta có

$$(1) \Leftrightarrow [m \ln(x+1) - x - 2][\ln(x+1) + 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \ln(x+1) = x + 2 \\ \ln(x+1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x+2}{\ln(x+1)}, (2) \\ x = \frac{1}{e} - 1 \end{cases}.$$

Do nghiệm $x = \frac{1}{e} - 1 < 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt sao cho $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x+2}{\ln(x+1)}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có $f'(x) = \frac{\ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1} = 0, (3).$$

Xét hàm số $h(x) = \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1}$ có $h'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x > 0$ nên $h(x)$ đồng biến

trên $(0; +\infty)$ do đó phương trình $f'(x) = 0$ có không quá một nghiệm.

Mà $f'(2) \cdot f'(4) < 0$ và $f'(x)$ là hàm số liên tục trên $[2; 4]$ suy ra phương trình (3) có duy nhất một nghiệm $x_0 \in (2; 4)$. Từ đó ta có bảng biến thiên

x	0	2	x_0	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{4}{\ln 3}$	$\frac{6}{\ln 5}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$

khi và chỉ khi $m > \frac{6}{\ln 5} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{6}{\ln 5}; +\infty\right)$. Vậy $a = \frac{6}{\ln 5} \in (3,7; 3,8)$.

Câu 43: Chọn D

Phương trình tương đương với

$$3^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) = 27 + 3^{3-x} \Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 3^{3-x} + (3-x)^3$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t) = 3^t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 3t^2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

$$3^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 3^{3-x} + (3-x)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{m-3x} = 3-x \Leftrightarrow m = (3-x)^3 + 3x$$

$$\Leftrightarrow m = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27.$$

$$\text{Đặt } g(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27 \Rightarrow g'(x) = -3x^2 + 18x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+	0	-		
$g(x)$	$+\infty$							$-\infty$

Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $7 < m < 11 \Rightarrow m \in \{8; 9; 10\}$. Vậy tổng các giá trị m bằng 27.

Câu 44: Chọn C

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$$

Xét hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ với $t \geq 0$.

Hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ xác định và liên tục trên $[0; +\infty)$.

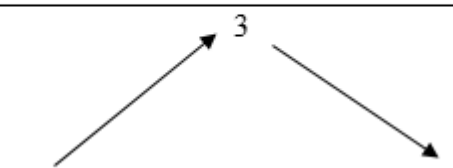
$$\text{Ta có } y' = 2^t \cdot \log_2(t+2) \cdot \ln 2 + \frac{2^t}{(t+2)\ln 2} > 0, \forall t \geq 0.$$

Vậy hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Từ } (1) \Leftrightarrow f((x-1)^2) = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2(x-m) \\ -(x-1)^2 = 2(x-m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 & (1) \\ 2m = x^2 + 1 & (2) \end{cases} (*).$$

Xét phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m < 3 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 1 nghiệm khi $2m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ vô nghiệm khi $2m > 3 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

Xét phương trình $2m = x^2 + 1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x) = x^2 + 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Phương trình $2m = x^2 + 1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Phương trình $2m = x^2 + 1$ có 1 nghiệm khi $2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Phương trình $2m = x^2 + 1$ vô nghiệm khi $2m < 1 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

Khi $m = \frac{3}{2}$: phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có nghiệm $x = 2$, phương trình $2m = x^2 + 1$ có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2}$. Vậy (*) có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m = \frac{3}{2}$.

Khi $m = \frac{1}{2}$: phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt $x = 2 \pm \sqrt{2}$, phương trình

$2m = x^2 + 1$ có nghiệm $x = 0$. Vậy (*) có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m = \frac{3}{2}$.

Xét phương trình $-x^2 + 4x - 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ suy ra không tồn tại m để phương trình (1) và (2) có cùng tập nghiệm gồm 2 phần tử. Vậy không tồn tại m để (*) có 2 nghiệm phân biệt. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt.

Trường hợp 1: (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: (2) có 2 nghiệm phân biệt và (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

Trường hợp 3: (1) có nghiệm $x = 2$ và (2) có nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$.

Kết hợp với điều kiện m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ ta có $m \in \left[-2019; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2019\right]$.

Vì m nguyên nên ta có 4038 giá trị của m .

Câu 45: Chọn A

Để $\frac{1-y}{x+3xy} > 0$ mà từ giả thiết $x, y > 0$ suy ra $1-y > 0 \Leftrightarrow y < 1$. Vậy ĐKXD: $x > 0; 0 < y < 1$.

$$\text{Ta có: } \log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4 \Leftrightarrow \frac{1-y}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-4} \Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-y)}{x+3xy} = \frac{3^{3xy+x}}{3^{3-3y}} \Leftrightarrow (3-3y) \cdot 3^{3-3y} = (3xy+x) \cdot 3^{3xy+x} (*)$$

Xét $f(t) = t \cdot 3^t$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = 3^t + t \cdot 3^t \cdot \ln 3 > 0$ với $\forall t > 0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Từ (*) ta có $f(3-3y) = f(3xy+x)$ với $3-3y > 0, 3xy+x > 0$ nên

$$3-3y = 3xy+x \Leftrightarrow y = \frac{3-x}{3(x+1)}.$$

$$\text{Ta có } P = x + y = x + \frac{3-x}{3(x+1)} = (x+1) + \left(\frac{3-x}{3(x+1)} + \frac{1}{3} \right) - \frac{4}{3}$$

$$P = (x+1) + \frac{4}{3(x+1)} - \frac{4}{3} \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{3(x+1)}} - \frac{4}{3} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{4}{3(x+1)} \\ y = \frac{3-x}{3(x+1)} \\ x > 0; 0 < y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \\ y = \frac{2\sqrt{3}-1}{3} \end{cases}.$$

Câu 46: Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}. \text{ Ta có: } \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5.$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} - 1 = 3x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{3(x-1)^2} = 3(x-1)^2 - (2x-1).$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x-1) + (2x-1) = \log_3 (3(x-1)^2) + 3(x-1)^2 \quad (1).$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \log_3(t) + t \text{ với } t > 0 \text{ có } f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 3} + 1 > 0 \quad \forall t > 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow f(2x-1) = f(3(x-1)^2).$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy hai nghiệm của phương trình là 2 và $\frac{2}{3}$ suy ra $b = 3$.

Câu 47: Chọn B

Điều kiện xác định: $\frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x + m + 1 > 0$.

Khi đó:

$$\log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} \geq 2x^2 + 4x + 5 - 2m \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} - 1 \geq 2x^2 + 4x + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{3(x^2 + x + 1)} \geq 2x^2 + 4x + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 + x + m + 1) - \log_3 3(x^2 + x + 1) \geq -2(2x^2 + x + m + 1) + 6(x^2 + x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 + x + m + 1) + 2(2x^2 + x + m + 1) \geq \log_3 3(x^2 + x + 1) + 6(x^2 + x + 1).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + 2t$ với $t > 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 2 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó tương đương với $f(2x^2 + x + m + 1) \geq f(3(x^2 + x + 1)) \Leftrightarrow 2x^2 + x + m + 1 \geq 3(x^2 + x + 1)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 \leq m.$$

Bất phương trình $x^2 + 2x + 2 \leq m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq \min g(x)$ với $g(x) = x^2 + 2x + 2$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 2x + 2$ với $x \in \mathbb{R}$ có $g'(x) = 2x + 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min g(x) = 1$. Do đó $m \geq 1$.

Vì $m \in [-10; 10]$ nên tập $S = \{1; 2; \dots; 10\}$. Vậy S có 10 phần tử.

Câu 48: Chọn D

Điều kiện: Ta có $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2 + 1} - x) + e^{-x} - e^x = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + e^{-x} - e^x$$

$$= -(\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + e^x - e^{-x}) = -f(x) \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra } f(x) \text{ là hàm số lẻ.}$$

$$\text{Mà } f'(x) = \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + e^x + e^{-x} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}(\sqrt{x^2 + 1} + x)} + e^x + e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(3^x) + f(2x-1) = 0 \Leftrightarrow f(3^x) = -f(2x-1) \Leftrightarrow f(3^x) = f(1-2x) \Leftrightarrow 3^x = 1-2x$.

Điều kiện: Ta có $\sqrt{x^2+1} + x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1} - x\right) + e^{-x} - e^x = -\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + e^{-x} - e^x$
 $= -\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + e^x - e^{-x}\right) = -f(x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

Mà $f'(x) = \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} + 1}{\sqrt{x^2+1} + x} + e^x + e^{-x} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1} + x} + e^x + e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(3^x) + f(2x-1) = 0 \Leftrightarrow f(3^x) = -f(2x-1) \Leftrightarrow f(3^x) = f(1-2x) \Leftrightarrow 3^x = 1-2x$.

Xét hàm số $g(x) = 3^x$. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, hàm số $h(x) = 1-2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ và $y = h(x)$ có nhiều nhất một điểm chung. Vì $g(0) = h(0)$ suy ra phương trình $3^x = 1-2x$ có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 49: Chọn D

Ta có $\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x-1} = x+a \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x-1} - x = a$

Điều kiện xác định $\begin{cases} \ln(x+5) \neq 0 \\ x+5 > 0 \\ 3^x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x > -5 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Đặt hàm số $f(x) = \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x-1} - x$ có TXĐ $D = (-5; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$

Suy ra $f'(x) = \frac{-1}{(x+5)\ln^2(x+5)} - \frac{3^x \ln 3}{(3^x-1)^2} - 1 < 0$ nên $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác

định

Tính: $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \frac{1}{3^{-5}-1} + 5 = 5 - \frac{243}{242}$; $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Bảng biến thiên

x	-5	-4	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$
$f(x)$		$5 - \frac{243}{242}$	$+\infty$	$+\infty$
		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
		$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Phương trình $f(x) = a$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $a \geq 5 - \frac{243}{242}$

Do $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in (-2019; 2019) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in [4; 2018] \end{cases}$. Vậy có $2018 - 4 + 1 = 2015$ giá trị của a .

Câu 50: Chọn C

Nhận xét phương trình $2^{f(x)} - 1 = 0$ có một nghiệm đơn $x = 2$ nên biểu thức sẽ đổi dấu khi đi qua điểm $x = 2$. Do đó để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình

$$x(m - 2^{f(\sin x)}) + 2 \cdot 2^{f(\sin x)} + m^2 - 3 = 0 \text{ phải có một nghiệm } x = 2 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Thử lại với $m = 1$ ta có:

$$\left[x(1 - 2^{f(\sin x)}) + 2 \cdot 2^{f(\sin x)} - 2 \right] (2^{f(x)} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(1 - 2^{f(\sin x)})(2^{f(x)} - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{f(\sin x)} \leq 1 \Leftrightarrow f(\sin x) \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 2 \text{ luôn đúng với mọi } x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 1 \text{ thỏa mãn ycbt.}$$

Thử lại với $m = -3$ ta có:

$$\left[x(-3 - 2^{f(\sin x)}) + 2 \cdot 2^{f(\sin x)} + 6 \right] (2^{f(x)} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -(x - 2)(3 + 2^{f(\sin x)})(2^{f(x)} - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2^{f(\sin x)} \leq 0 \Rightarrow m = -3 \text{ không thỏa mãn ycbt.}$$

Vậy $S = \{1\}$. Số tập con của S là 2 đó là $\{1\}$ và $\emptyset$.

Câu 51: Chọn D

$$\text{Phương trình } \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} = x + a \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} - x = a$$

$$\text{Đặt hàm số } f(x) = \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x - 1} - x \text{ có tập xác định } D = (-5; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; \infty)$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{-1}{(x+5)\ln^2(x+5)} - \frac{3^x \ln 3}{(3^x - 1)^2} - 1 < 0$$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên các khoảng của tập xác định

$$\text{Các giới hạn: } \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \frac{1}{3^{-5} - 1} + 5 = 5 - \frac{243}{242}; \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

x	-5	-4	0	$+\infty$	
$f'(x)$	-		-		+
$f(x)$	$5 - \frac{243}{242}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Phương trình $f(x) = a$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $a \geq 5 - \frac{243}{242}$

Do $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in (-2019; 2019) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in [4; 2018] \end{cases}$. Vậy có $2018 - 4 + 1 = 2015$ giá trị của a .

Câu 52: Chọn D

Phương trình $50^x + 2^{x+5} = 3 \cdot 7^x \Leftrightarrow 50^x + 2^{x+5} - 3 \cdot 7^x = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 50^x + 2^{x+5} - 3 \cdot 7^x$

$$f'(x) = 50^x \ln 50 + 2^{x+5} \ln 2 - 3 \cdot 7^x \ln 7$$

$$f''(x) = 50^x (\ln 50)^2 + 2^{x+5} (\ln 2)^2 - 3 \cdot 7^x (\ln 7)^2$$

$$\text{Khi } x \geq 0 \text{ thì } f''(x) = 7^x \left(\left(\frac{50}{7} \right)^x (\ln 50)^2 - 3(\ln 7)^2 \right) + 2^{x+5} (\ln 2)^2$$

$$f''(x) \geq 7^x \left(\left(\frac{50}{7} \right)^0 (\ln 50)^2 - 3(\ln 7)^2 \right) + 2^{x+5} (\ln 2)^2 > 0$$

$$\text{Khi } x < 0 \text{ thì } f''(x) = 7^x \left(\left(\frac{2}{7} \right)^x 32(\ln 2)^2 - 3(\ln 7)^2 \right) + 50^x (\ln 50)^2$$

$$f''(x) > 7^x \left(\left(\frac{2}{7} \right)^0 32(\ln 2)^2 - 3(\ln 7)^2 \right) + 50^x (\ln 50)^2 > 0$$

Suy ra $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nên $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

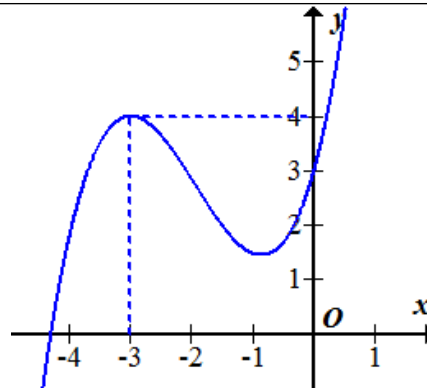
Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ nên $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Câu 53: Chọn D



Điều kiện $x \in [-1; 1]$.

$$\text{Khi đó } f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} - f(m) \leq 0 \Leftrightarrow f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} \leq f(m).$$

Đặt $g(x) = f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3}$. Ta có bảng sau:

x	-1	0	1
$\sqrt{1-x^2}$	0	1	0
$f(\sqrt{1-x^2})$	3	$f(1)$	3
$\frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3}$	1	$\frac{8}{3}$	$\frac{7}{3}$
$g(x)$	4	$g(1)$	$\frac{16}{3}$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm khi $f(m) \geq 4$. Vì m nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ nên $m \in \{-3; 1; 2; \dots; 10\}$. Do đó S có 11 phần tử.

Câu 54: Chọn D

$$\text{Ta có: } e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}} = m \Leftrightarrow 2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2} = \ln m.$$

$$\text{Đặt } g(x) = 2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}.$$

$$g'(x) = f'(x)[6f^2(x) - 13f(x) + 7].$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = \frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; x = 3 \\ x = 1; x = a > 3 \\ x = b < 0 \end{cases}$$

Bảng biến thiên trên đoạn $[0; 2]$:

x	$-\infty$	b	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$		0		$+$	0	$-$	0
$g(x)$				4			

Giá trị lớn nhất của m để phương trình có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$ là: $\ln m = 4 \Leftrightarrow m = e^4$.

Câu 55: Chọn C

Ta có

$$e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = (x+3y-9) - (3x+5y-10)$$

$$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} + (3x+5y-10) = e^{x+3y-9} + (x+3y-9) \quad (1)$$

Do hàm số $f(t) = e^t + t$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ nên

$$(1) \Leftrightarrow 3x+5y-10 = x+3y-9 \Leftrightarrow 2x+2y=1$$

$$\text{Khi đó phương trình } \log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5^2(x+5) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0, \text{ đặt } t = \log_5(x+5), t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } t^2 - (m+6)t + m^2 + 9 = 0 \quad (2)$$

$$(2) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta = (m+6)^2 - 4(m^2 + 9) = -3m^2 + 12m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Vậy số giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn là 4 giá trị.

Câu 56: Chọn B

$$\text{Ta có } 2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1) \Leftrightarrow 2^{x^2+4x+6-(m^2+1)} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x^2 + 4x + 6 \\ b = m^2 + 1 \end{cases}, \text{ ta có } a \geq 2; b \geq 1, \text{ phương trình đã cho trở thành } 2^{a-b} = \log_a b.$$

$$\text{Nếu } a > b \text{ thì } \begin{cases} 2^{a-b} > 1 \\ \log_a b < 1 \end{cases} \text{ không thỏa mãn.}$$

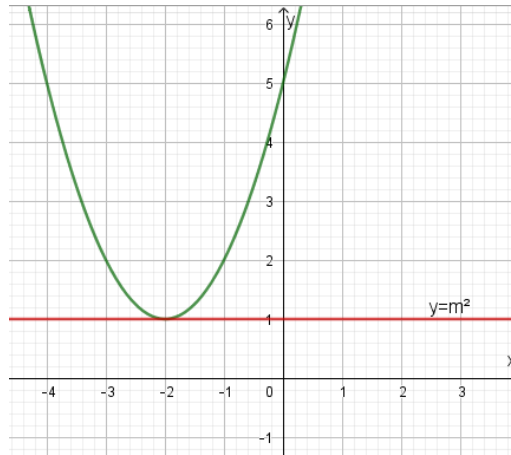
Nếu $a < b$ thì $\begin{cases} 2^{a-b} < 1 \\ \log_a b > 1 \end{cases}$ không thỏa mãn.

Do đó $a = b$, khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 4x + 6 = m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = m^2$$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của parabol $y = x^2 + 4x + 5$ và đường thẳng $y = m^2$

Ta có hình ảnh minh họa sau



Dựa vào đồ thị, phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi $m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m là 0.

Câu 57: Chọn B

Điều kiện: $\frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình: $\frac{1}{2} \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + x^2 = 2(x + |x - m|) \quad (*)$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + 2x^2 = 4(x + |x - m|)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 - 4x + 6) - \log_2 (|x - m| + 1) + 2x^2 - 4x = 4|x - m|$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 - 4x + 6) + (2x^2 - 4x + 6) = \log_2 (|x - m| + 1) + 2 + (4|x - m| + 4)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 - 4x + 6) + (2x^2 - 4x + 6) = \log_2 (4|x - m| + 4) + (4|x - m| + 4) \quad (1)$$

Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

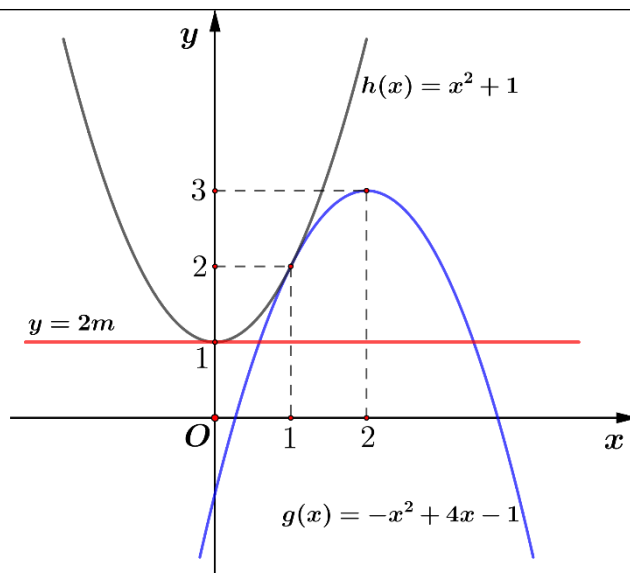
Có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(2x^2 - 4x + 6) = f(4|x - m| + 4) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 6 = 4|x - m| + 4$$

$$\Leftrightarrow 2|x - m| = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2m = x^2 - 2x + 1 \\ 2x - 2m = -(x^2 - 2x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 \\ 2m = x^2 + 1 \end{cases} \quad (2)$$

Vẽ đồ thị hai hàm số $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ và $h(x) = x^2 + 1$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy



Để phương trình (*) có đúng ba nghiệm phân biệt thì (2) phải có đúng ba nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = 2m$ và hai đồ thị trên có đúng ba điểm chung phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 1 \\ 2m = 2 \\ 2m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases} . \text{ Vậy tổng tất cả các giá trị của } m \text{ bằng } 3.$$

Câu 58: Chọn B

Điều kiện xác định: $x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4} > 0$.

$$\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x(\sqrt{x^2 + 4} + x) + m) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4} - x} + m\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx}{\sqrt{x^2 + 4} - x}\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + 1 = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$, $t \in (0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty) \text{ nên hàm số luôn đồng biến trên TXĐ.}$$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow 8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx = \sqrt{x^2 + 4} - x$$

$$\Leftrightarrow 2m(\sqrt{x^2+4}-x) = (\sqrt{x^2+4}-x)-8x \Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x}{\sqrt{x^2+4}-x} \Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x(\sqrt{x^2+4}+x)}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2m = 1 - 2x(\sqrt{x^2+4}+x) \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+4}+x^2 = \frac{1-2m}{2}.$$

Xét hàm số $g(x) = x\sqrt{x^2+4}+x^2$ với $x \in (-\infty; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+4}+x)^2}{\sqrt{x^2+4}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(\sqrt{x^2+4}+x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-1} = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} + 1 \right) \right] = +\infty.$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	-2	$+\infty$

Để phương trình có nghiệm thì $\frac{1-2m}{2} > -2 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}.$

Do m nguyên thuộc $[-20; 20]$ nên số giá trị m là 23.

Câu 59: Chọn D

Với hai số dương $x; y$ thỏa $\log_2(4x+y+2xy+2)^{y+2} = 8 - (2x-2)(y+2)$

Ta có $(y+2)\log_2(4x+y+2xy+2) = 8 - (2x-2)(y+2)$

$$\Leftrightarrow (y+2)\log_2(2x+1)(y+2) = 8 - (2x+1)(y+2) + 3(y+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x+1) + \log_2(y+2) = \frac{8}{y+2} - (2x+1) + 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x+1) + (2x+1) = \log_2\left(\frac{8}{y+2}\right) + \frac{8}{y+2}.$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$f(2x+1) = f\left(\frac{8}{y+2}\right) \Rightarrow 2x+1 = \frac{8}{y+2} \Leftrightarrow y = \frac{8}{2x+1} - 2.$$

$$P = 2x + y = 2x + \frac{8}{2x+1} - 2 = (2x+1) + \left(\frac{8}{2x+1}\right) - 3 \stackrel{AM-GM}{\geq} 4\sqrt{2} - 3.$$

$$\text{Đấu bằng xảy ra khi } 2x+1 = \frac{8}{2x+1} \Leftrightarrow (2x+1)^2 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S = a + b + c = 3.$$

Câu 60: Chọn D

Cách 1.

Đặt $t = 4^x, t > 0$, phương trình đã cho trở thành:

$$(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{t^2 + 6t + 5}{t^2 - 4t + 6}.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu khi phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\text{Đặt } f(t) = -\frac{t^2 + 6t + 5}{t^2 - 4t + 6} \Rightarrow f'(t) = \frac{10t^2 - 2t - 56}{(t^2 - 4t + 6)^2}. \text{ Suy ra } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{561}}{10}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{561}}{10}$	0	1	$\frac{1 + \sqrt{561}}{10}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0		-	0	+
$f(x)$			$-\frac{5}{6}$			

Từ bảng biến thiên, ta có phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi $-4 < m < -1$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m = -3$ và $m = -2$.

Cách 2:

Đặt $t = 4^x, t > 0$, phương trình đã cho trở thành: $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0$.

Đặt $f(x) = (m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu khi phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\text{Điều đó xảy ra khi: } \begin{cases} (m+1)f(1) < 0 \\ (m+1)f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(3m+12) < 0 \\ (m+1)(6m+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < -1 \\ m < -1 \\ m > -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -1.$$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m = -3$ và $m = -2$.

Câu 61: Chọn D

Ta có:

$$\log_2(|2x-1|+m) = \log_3[3(m+4x-4x^2-1)] \Leftrightarrow \log_2(|2x-1|+m) = \log_3[3(m-(2x-1)^2)].$$

Nếu $2x_0 - 1$ là nghiệm của phương trình thì $-(2x_0 - 1)$ cũng là nghiệm của phương trình.

$$\text{Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất thì } 2x_0 - 1 = -(2x_0 - 1) \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

Với $x_0 = \frac{1}{2}$ thay vào phương trình ta có: $\log_2 m = \log_3 3m = t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2^t \\ 3m = 3^t \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot 2^t = 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = 3 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}} 3 \Rightarrow m = 2^{\frac{\log_3 3}{\frac{1}{2}}} \approx 6,54.$$

Câu 62: Chọn C

Điều kiện: $x > -1$.

Nhận thấy với $x = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $0 = 1$, nên $x = 0$ không là nghiệm của phương trình với mọi m .

Xét $-1 < x \neq 0$ ta có:

$$x \log_3(x+1) = \log_9[9(x+1)^{2m}] \Leftrightarrow \log_3(x+1)^x = \log_3[3(x+1)^m]$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^{x-m} = 3 \Leftrightarrow x-m = \frac{\ln 3}{\ln(x+1)} \Leftrightarrow m = x - \frac{\ln 3}{\ln(x+1)}$$

$$\text{Đặt } f(x) = x - \frac{\ln 3}{\ln(x+1)} \quad \text{với } -1 < x \neq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{\ln 3}{(x+1)\ln^2(x+1)} > 0, \quad \forall x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}.$$

Ta lập được bảng biến thiên:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	-1	$+\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì phương trình $m = x - \frac{\ln 3}{\ln(x+1)}$ có hai nghiệm thực phân biệt khi $m \in (-1; +\infty)$.

Câu 63: Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau

$$2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\cos x}} + (\cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + m)2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1.$$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\cos x}} + \left[(\cos x - 2)^3 + 8 + m - 3\cos x \right] 2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1.$$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\cos x}} + \left[(\cos x - 2)^3 + m - 3\cos x \right] 2^{\cos x - 2} = 1.$$

Đặt $\cos x - 2 = a$ và $\sqrt[3]{m - 3\cos x} = b$.

Ta có phương trình: $2^{a+b} + (a^3 + b^3)2^a = 1$ (1).

Nhận thấy $a + b = 0$ thỏa mãn phương trình (1).

Nếu $a + b > 0$ thì $2^{a+b} > 2^0 = 1$ và $(a^3 + b^3)2^a > 0$ nên phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu $a + b < 0$ thì $2^{a+b} < 1$ và $(a^3 + b^3)2^a < 0$ nên phương trình (1) cũng vô nghiệm.

Vậy $a + b = 0$ suy ra $\sqrt[3]{m - 3\cos x} = 2 - \cos x \Leftrightarrow -\cos^3 x + 6\cos^2 x - 9\cos x + 8 = m$.

Đặt $\cos x = t$ với điều kiện $t \in [-1; 1]$, suy ra $f(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 8 = m$.

Dễ thấy $\min_{t \in [-1; 1]} f(t) = 4$ và $\max_{t \in [-1; 1]} f(t) = 24$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \in [4; 24]$. Suy ra $S = \{4; 5; \dots; 24\}$ nên tổng của hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của S bằng 28.

Cách khác: Ta có $2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\cos x}} + \left[(\cos x - 2)^3 + m - 3\cos x \right] 2^{\cos x - 2} = 1$.

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m - 3\cos x}} + \left(\sqrt[3]{m - 3\cos x} \right)^3 = 2^{2 - \cos x} + (2 - \cos x)^3.$$

Xét hàm số đặc trưng $f(u) = 2^u + u^3$, đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó ta cũng suy ra được $\sqrt[3]{m - 3\cos x} = 2 - \cos x$.

Câu 64: Chọn A

Điều kiện: $x \neq 0$. Ta có: $2\log_2 x^4 + \sqrt{2\log_2 x^8} + 2018 = 2m$.

Đặt $t = \sqrt{\log_2 x}$. Vì $x \in [1; 2] \Rightarrow \sqrt{\log_2 x} \in [0; 1]$.

$\Rightarrow f(t) = 4t^2 + 2t + 1009 = m$ có nghiệm thuộc $[1; 2]$

$$f'(t) = 8t + 2 > 0, \forall t \in [0; 1]$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(t)$			+	
$f(t)$		1009	1015	

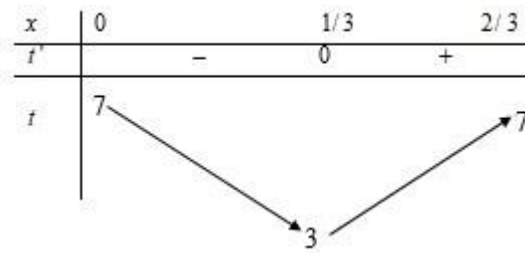
$$\Rightarrow 1009 \leq m \leq 1015 \Rightarrow S = \{1009; 1010; 1011; 1012; 1013; 1014; 1015\}.$$

Số phần tử của S là: 7.

Câu 65: Chọn D

Đặt $t = 7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}$ (1) thì $f(t) = 1 - 2m(2)$.

$$t' = \frac{-4(6-18x)}{2\sqrt{6x-9x^2}} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$



Từ bảng biến thiên suy ra nếu $t \in (3; 7]$ thì phương trình có 2 nghiệm x .

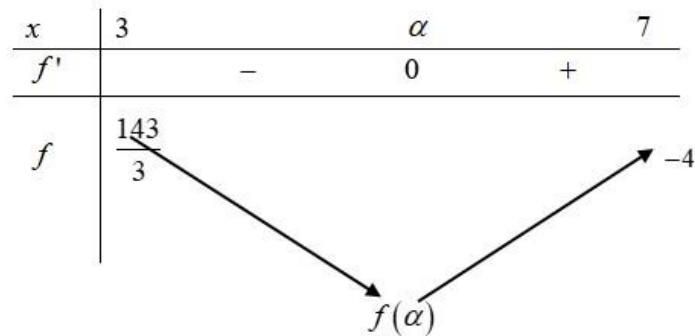
Xét hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1) \cdot 2^{7-x} - 6x + 3$

$$f'(x) = 3^{x-4} \ln 3 + 2^{7-x} - (x+1)2^{7-x} \ln 2 - 6$$

$$f''(x) = 3^{x-4} \ln^2 3 + (2^{7-x} \ln 2) [(x+1) \ln 2 - 2] > 0 \forall x \in (3; 7]$$

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $(3; 7]$. Mặt khác, $f'(6) \cdot f'(7) < 0$ nên phương trình

$f'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \alpha \in (6; 7)$.



Vậy, phương trình $f(t) = 1 - 2m$ có nhiều nghiệm nhất khi

$$f(\alpha) < 1 - 2m \leq -4 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq m < \frac{1-f(\alpha)}{2}. \text{ Kết luận, GTNN của } m \text{ là } \frac{5}{2} \Rightarrow a = 5, b = 2.$$

Câu 66: Chọn B

Điều kiện: $x > \frac{-1}{4}$.

Trường hợp 1: $m = 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$(x-1) [\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - 2$ là hàm đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{4}; +\infty\right)$.

Khi đó, nếu x_0 là nghiệm của phương trình (1) thì x_0 là nghiệm duy nhất.

Ta có: $f(0) = -2$; $f(1) > 0$, suy ra $f(0)f(1) < 0$.

Theo hệ quả của định lý trung gian, tồn tại $x_0 \in (0; 1)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Do vậy: $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m < 2$, dẫn đến $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.

Phương trình đã cho trở thành:

$$\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - \frac{2x-m}{x-1} = 0$$

Xét hàm số $g(x) = \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - \frac{2x-m}{x-1}$, có tập xác định: $D = \left(-\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$

$$\text{Đạo hàm: } g'(x) = \frac{4}{(4x+1)\ln 3} + \frac{2}{(2x+1)\ln 5} + \frac{2-m}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in D.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra: phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x_1 \in \left(-\frac{1}{4}; 1\right)$; $x_2 \in (1; +\infty)$ với mọi $m < 2$.

Vậy với mọi giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2]$ thì phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

Có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 67: Chọn C

Ta có

$$3^{x^2+2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2+2x+3}(2|x-m|+2) \Leftrightarrow \frac{3^{x^2+2x+3}}{3^{2|x-m|+2}} = \frac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2+2x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2+2x+3) \cdot 3^{x^2+2x+3} = \ln(2|x-m|+2) \cdot 3^{2|x-m|+2}$$

$$\text{Xét } f(t) = \ln(t) \cdot 3^t, \forall t \geq 2 \text{ có } f'(t) = \frac{1}{t} 3^t + \ln(t) 3^t \ln(3) > 0, \forall t \geq 2$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$f(x^2+2x+3) = f(2|x-m|+2) \Leftrightarrow x^2+2x+3 = 2|x-m|+2 \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 2|x-m|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1-2m & (1) \\ x^2+4x = -1+2m & (2) \end{cases}$$

Điều kiện cần để phương trình có 3 nghiệm là:

Trường hợp 1: (1) có nghiệm kép $\Rightarrow m = \frac{-1}{2}$ thử lại ta thấy thỏa mãn

Trường hợp 2: (2) có nghiệm kép $\Rightarrow m = \frac{-3}{2}$ thử lại ta thấy thỏa mãn

Trường hợp 3: (1) và (2) có nghiệm chung $\Rightarrow x = m$. Thế (1) vào ta có $m = -1$

Ta có $\frac{-1}{2} + \frac{-3}{2} + (-1) = -3$

Câu 68: Chọn C

Ta có $\log\left(\frac{x+3y}{xy}\right) = xy - x - 3y \Leftrightarrow \log(x+3y) - \log(xy) = xy - (x+3y)$.

$\Leftrightarrow \log(x+3y) + (x+3y) = \log(xy) + xy \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = \log t + t, t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 10} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Phương trình (1) tương đương $f(x+3y) = f(xy) \Leftrightarrow x+3y = xy$.

Theo bất đẳng thức Schwarz ta có $P = \frac{x^2}{1+3y} + \frac{9y^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+3y} + \frac{(3y)^2}{1+x} \geq \frac{(x+3y)^2}{2+(x+3y)} \quad (2)$.

Theo bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương ta có

$xy = x+3y \geq 2\sqrt{x \cdot 3y} \Leftrightarrow (xy)^2 - 12xy \geq 0 \Leftrightarrow xy(xy-12) \geq 0$.

Vì $xy > 0$ nên $xy \geq 12 \Rightarrow x+3y \geq 12$. Đặt $u = x+3y \Rightarrow u \geq 12$.

Từ (2) ta có $P \geq f(u) = \frac{u^2}{u+2}, u \geq 12$

$f'(u) = \frac{u^2 + 4u}{(u+2)^2} \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ u=-4 \end{cases} \Rightarrow \text{Min } f(u) = f(12) = \frac{72}{7}$.

Vậy $P \geq \frac{72}{7} \Rightarrow \text{Min } P = \frac{72}{7}$ khi

$u = 12 \Rightarrow \begin{cases} x+3y=12 \\ \frac{x}{1+3y} = \frac{3y}{1+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y+12 \\ (-3y+12)^2 - 3y+12 = 3y+9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$.

