

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán

Ngày thi: 02 – 10 – 2014

Thời gian làm bài: 180 phút

(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1 (5,0 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) .

- a) Tiếp tuyến tại điểm M của đồ thị (C) cắt hai đường tiệm cận của (C) tại A và B . Chứng minh diện tích tam giác IAB không phụ thuộc vào vị trí điểm M (I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C)).
- b) Tìm các cặp tiếp tuyến song song của (C) sao cho khoảng cách giữa chúng lớn nhất.

Câu 2 (4,0 điểm)

- a) Giải phương trình $2x^2 - 3x + 7 - 3\sqrt{4x+4} = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 12x^2 = y(4+9x^2) \\ 12y^2 = z(4+9y^2) \\ 12z^2 = x(4+9z^2) \end{cases}$$

Câu 3 (3,0 điểm)

Với ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc}.$$

Câu 4 (4,0 điểm)

Cho hai điểm A, B cố định trên mặt phẳng (P) , $AB = a$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với mặt phẳng (P) lấy điểm S sao cho $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) và đi qua B (Δ không vuông góc với AB). Đường thẳng đi qua A vuông góc với AB cắt Δ tại D . H là hình chiếu của A lên Δ . Trong mặt phẳng (SDB) đường thẳng đi qua D vuông góc với SB cắt SH, SB lần lượt tại I, K .

a) Chứng minh $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$.

- b) Xác định vị trí của đường thẳng Δ để diện tích tam giác AIK là lớn nhất.

Câu 5 (4,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{3u_n^2 + 1}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n ta có $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$.
- b) Chứng minh u_{2015} chia hết cho 5.

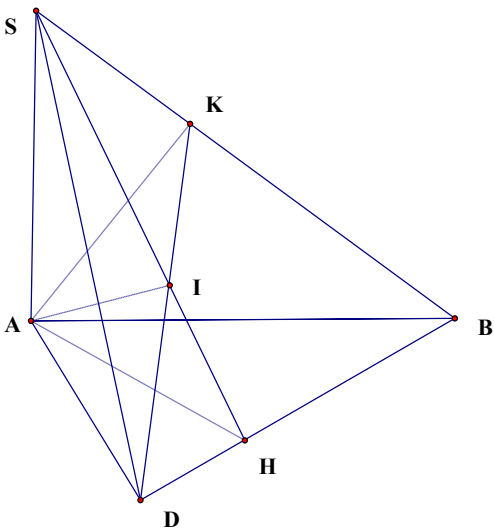
----- HẾT -----

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán
Ngày thi: 02 – 10 – 2014

Câu	HƯỚNG DẪN CHẤM	Điểm
Câu 1a	Chứng minh diện tích không đổi ...	3 điểm
	Xác định TCD $x = -1$, TCN $y = 2$, $I(-1; 2)$.	0,5 điểm
	Gọi $M\left(a; 2 - \frac{3}{a+1}\right)$ thuộc (C) Tiếp tuyến tại M là $y = \frac{3}{(a+1)^2}(x-a) + 2 - \frac{3}{a+1}$	0,5 điểm
	Tìm giao với hai tiệm cận $A\left(-1; 2 - \frac{6}{a+1}\right)$, $B(2a+1; 2)$.	1,0 điểm
	Tính $IA = \left \frac{6}{a+1}\right $, $IB = 2 a+1 $	0,5 điểm
	Tính được $S_{IAB} = 6$	0,5 điểm
Câu 1b	Tìm các cặp đường thẳng ...	2 điểm
	Gọi $M(a; f(a))$, $N(b; f(b))$ với $a \neq b$ là các tiếp điểm của tiếp tuyến Δ_1, Δ_2 . Vì tiếp tuyến tại M, N song song nên $f'(a) = f'(b) \Leftrightarrow a + b = -2$	0,5 điểm
	Chứng minh I là trung điểm của MN Suy ra $d(\Delta_1, \Delta_2) = 2d(I, \Delta_1)$	0,5 điểm
	Gọi A, B là giao của Δ_1 với hai tiệm cận, H là hình chiếu của I lên AB. Ta có $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} \geq \frac{2}{IA \cdot IB} = \frac{1}{6} \Rightarrow IH \leq \sqrt{6}$ Suy ra khoảng cách Δ_1, Δ_2 lớn nhất khi $IA = IB \Leftrightarrow a = -1 \pm \sqrt{3}$	0,5 điểm
	Vậy cặp tiếp tuyến cần tìm có phương trình là $y = x + 3 - 2\sqrt{3}$ và $y = x + 3 + 2\sqrt{3}$	0,5 điểm
Câu 2a	Giải phương trình ...	2 điểm
	Vì $2x^2 - 3x + 7 > 0$, $\forall x \Rightarrow x > -1$ Ta có: $3\sqrt[3]{4(x+1)} \leq 2 + 2 + x + 1 = x + 5$	1,0 điểm
	Suy ra $2x^2 - 3x + 7 \leq x + 5 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 \leq 0 \Rightarrow x = 1$ Thử lại thỏa mãn Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$.	1,0 điểm
Câu 2b	Giải hệ phương trình ...	2 điểm
	Nhận xét $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$	0,5 điểm
	Ta có $y = \frac{12x^2}{4+9x^2} \leq x$, tương tự $z \leq y$, $x \leq z$ Suy ra $x = y = z$	1,0 điểm

	Thay $x = y = z$ vào ta được $\begin{cases} x = y = z = 0 \\ x = y = z = \frac{2}{3} \end{cases}$ Thử lại thỏa mãn Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là ...	0,5 điểm
Câu 3	Tìm giá trị nhỏ nhất ...	3 điểm
	* Ta có: $P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca}$	1,0 điểm
	$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{7}{ab + bc + ca}$ $\geq \frac{9}{(a + b + c)^2} + \frac{7}{ab + bc + ca}$	1,0 điểm
	Ta có: $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{7}{ab + bc + ca} \geq 21$ Suy ra $P \geq 30$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 30 đạt được khi $a = b = c = \frac{1}{3}$	1,0 điểm
Câu 4a	Chứng minh...	2 điểm
		1,0 điểm
	Chứng minh $AI \perp (SBD)$ Ta có $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2}$ $= \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2}$	1,0 điểm
Câu 4b	Xác định vị trí ...	2 điểm
	Chứng minh tam giác AIK vuông có cạnh huyền $AK = \frac{a}{\sqrt{3}}$ Suy ra diện tích tam giác AIK lớn nhất khi tam giác AIK vuông cân.	1,0 điểm
	Khi đó $AI = \frac{a}{\sqrt{6}} \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$ Suy ra $ABH = 30^\circ$ Vậy Δ là đường thẳng đi qua B tạo với AB một góc 30°	1,0 điểm
Câu 5a	Chứng minh ...	2 điểm
	Ta có $u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{3u_n^2 + 1} \Rightarrow (u_{n+1} - 2u_n)^2 = 3u_n^2 + 1 \Rightarrow u_{n+1}^2 - 4u_{n+1}u_n + u_n^2 = 1$ Tương tự $u_{n+2}^2 - 4u_{n+2}u_{n+1} + u_{n+1}^2 = 1$	1,0 điểm

	Suy ra u_{n+2}, u_n là nghiệm của phương trình $X^2 - 4u_{n+1}X + u_{n+1}^2 - 1 = 0$ Theo vì ết ta có $u_{n+2} + u_n = 4u_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$	1,0 điểm
Câu 5b	<i>Chứng minh chia hết...</i>	2 điểm
	Ta có: $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n = 15u_n - 4u_{n-1} = 5(3u_n - u_{n-1}) + u_{n-1}$ $\Rightarrow u_{n+2} \equiv u_{n-1} \pmod{5}$	1,0 điểm
	$u_{2015} \equiv u_{2012} \equiv \dots \equiv u_2 \pmod{5}$ Mà $u_2 = 15$ chia hết cho 5 Vậy u_{2015} chia hết cho 5	1,0 điểm