

ĐỀ THI CHỌN HSG ĐỘI TUYỂN TOÁN 8
TRƯỜNG THCS NGUYỄN ĐĂNG ĐẠO

Bài 1. Cho $Q = \frac{a^4 + a^3 - a^2 - 2a - 2}{a^4 + 2a^3 - a^2 - 4a - 2}$

- a) Rút gọn M
- b) Xác định a để $Q_{\min}$

Bài 2.

- a) Phân tích đa thức thành nhân tử

$$A = x^4 + 2007x^2 + 2006x + 2007$$

- b) Cho $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{a+c}, z = \frac{c}{a+b}$. Tính $A = yz + zx + xy + 2xyz$

Bài 3. Cho $x, y, z > 0$. CMR: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$

Bài 4. Tìm k để phương trình sau có nghiệm dương: $\frac{k(x+1)}{2x-1} = k+1$

Bài 5. Hình vuông $ABCD$ có E và F thuộc tia đối CB và DC sao cho $DF = BE$. Từ E kẻ đường song song với AF và từ F kẻ đường song song với AE. Hai đường này giao tại I. Tứ giác $AFIE$ là hình gì ?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a)

$$Q = \frac{a^4 + a^3 - a^2 - 2a - 2}{a^4 + 2a^3 - a^2 - 4a - 2} = \frac{a^4 + a^3 + a^2 - 2a^2 - 2a - 2}{a^4 + 2a^3 + a^2 - 2a^2 - 4a - 2} = \frac{(a^2 - 2)(a^2 - a - 1)}{(a^2 - 2)(a + 1)^2}$$

$$DKXD: a \neq \pm\sqrt{2}, a \neq -1$$

$$Q = \frac{a^2 + a + 1}{(a + 1)^2}$$

Khi đó:

b) Ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{a^2 + a + 1}{(a + 1)^2} = \frac{a^2 + 2a + 1 - (a + 1) + 1}{a^2 + 2a + 1} = 1 - \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{(a + 1)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{(a + 1)^2} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{2} \right)^2 \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$$

$$\text{Vậy GTNN của } Q = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = 1$$

Bài 2.

a)

$$\begin{aligned} A &= x^4 + 2007x^2 + 2006x + 2007 = x^4 - x + 2007x^2 + 2007x + 2007 \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2007) \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$= \frac{ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)}{(a + b)(b + c)(c + a)} = \frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2}{(a + b)(b + c)(c + a)}$$

$$A = \frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} = \dots = 1$$

Nên

Bài 3. Ta có:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq x; \frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq x; \frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z$$

Cộng lại ta có điều phải chứng minh

Bài 4.

Ta có phương trình tương đương:

$$k(x+1) = (k+1)(2x-1) \Leftrightarrow kx+k = 2xk - k + 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{k+2}$$

Vậy $x > 0$ thì k phải thỏa mãn 2 điều kiện sau:

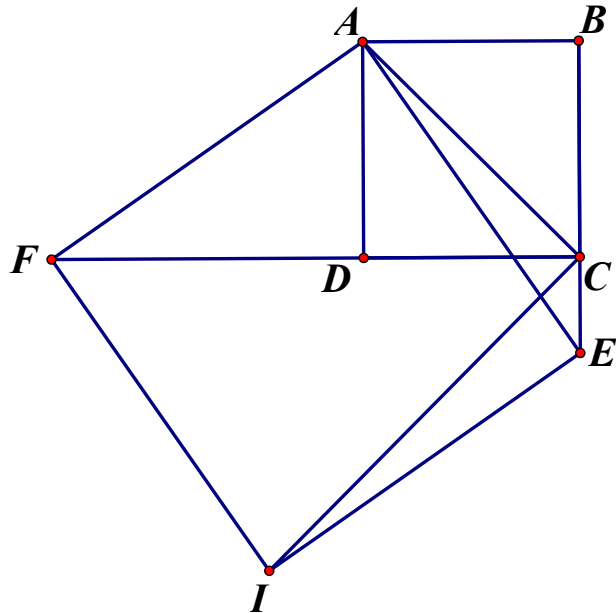
$$*) k(x+1) = (k+1)(2x-1) \Leftrightarrow kx+k = 2xk - k + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{k+2} \text{ và } k+2 > 0 \text{ hoặc } 2k+1 < 0 \text{ và } k+2 < 0$$

$$*) k \neq 0 \left(\text{vì } x \neq \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Vậy } x > 0 \Leftrightarrow k < -2 \text{ hoặc } k > -\frac{1}{2} \text{ và } k \neq 0$$

Bài 5.



Ta có AE song song với FI (gt); AF song song với EI (gt)

$\Rightarrow AFIE$ là hình bình hành (các cặp cạnh đối song song) (1)

Chứng minh $\triangle ADF = \triangle BCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle FAD = \angle BCE$

Mà $\angle BAE + \angle DAE = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow \angle FAD + \angle DAE = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AFIE$ là hình chữ nhật

Ta lại có : $AF = AE$ (vì hai tam giác bằng nhau theo cmt) nên $AFIE$ là hình vuông.