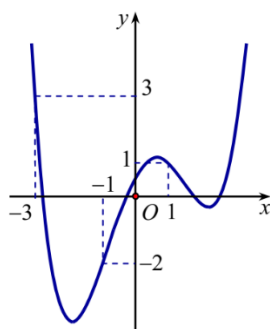


Câu 1. a. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Hàm số $g(x) = 3f(1-2x) + 8x^3 - 21x^2 + 6x$ đồng biến trên khoảng nào?

b. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua các điểm $A(1;1)$, $B(2;4)$, $C(3;9)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B , N khác A và C , P khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là

Câu 2: a. Chọn một số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập $\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 11.

b. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - 3\sqrt{x+3} = 3\sqrt{y-5} & (1) \\ \sqrt{x^2 + 16(y-x)} + y = 2\sqrt{xy} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 3: a. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

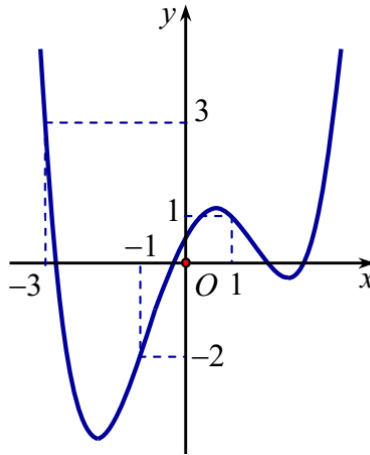
b. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối của hai khối tứ diện $A'BC'D$ và $AB'CD'$. Gọi V_2 là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Câu 4: Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B . Biết rằng thể tích của khối chóp là $\frac{5}{24}$ và giá trị nhỏ nhất diện tích toàn phần chóp $S.ABC$ là $p\sqrt{5} + q$ trong đó $p, q \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị biểu thức: $p^2 + q^2 = ?$

Câu 5: Cho các số thực dương x, y phân biệt thỏa mãn $xy \leq 4$. Tìm GTNN của $P = \frac{2}{x^4} + \frac{2}{y^4} + \frac{3}{(x-y)^4}$?

ĐÁP ÁN

Câu 1. [2D1-1.4-4] Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Hàm số $g(x) = 3f(1-2x) + 8x^3 - 21x^2 + 6x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$.

B. $(-3;-1)$.

C. $(0;1)$.

D. $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = -6f'(1-2x) + 24x^2 - 42x + 6$

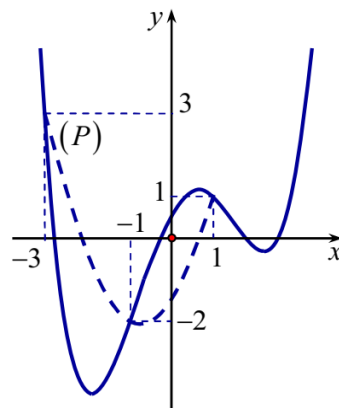
$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < 4x^2 - 7x + 1 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } 1-2x = t \Leftrightarrow x = \frac{1-t}{2}$$

$$\text{Ta có } (*) \text{ trở thành } f'(t) < 4 \cdot \left(\frac{1-t}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{1-t}{2} + 1 \Leftrightarrow f'(t) < t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}.$$

Ta vẽ parabol $(P): y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau, ta

thấy (P) có đỉnh $I(-\frac{3}{4}; -\frac{33}{16})$ và đi qua các điểm $(-3;3), (-1;-2), (1;1)$.



Từ đồ thị hàm số ta thấy trên khoảng $(-3;1)$ ta có $f'(t) < t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \Leftrightarrow -3 < t < -1$

$$\Leftrightarrow -3 < 1 - 2x < -1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 2: [2D1-5.15-4] (Sở GD&ĐT Bắc Ninh-2019-2020) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua các điểm $A(1;1)$, $B(2;4)$, $C(3;9)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B , N khác A và C , P khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là

A. -6.

B. 6.

C. 18.

D. -18.

Lời giải

Chọn D

Giả sử hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) . Vì $A(1;1)$, $B(2;4)$, $C(3;9)$ thuộc (C)

$$\text{nên ta có hệ phương trình: } \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \\ 27a + 9b + 3c + d = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - 6a \\ c = 11a \\ d = -6a \end{cases}.$$

$$\Rightarrow f(x) = ax^3 + (1 - 6a)x^2 + 11ax - 6a = a(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) + x^2 = a(x - 1)(x - 2)(x - 3) + x^2.$$

Đường thẳng AB đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB}(1;3)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $y = 3x - 2$.

Đường thẳng AC đi qua A và nhận $\overrightarrow{AC}(2;8)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $y = 4x - 3$.

Đường thẳng BC đi qua B và nhận $\overrightarrow{BC}(1;5)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $y = 5x - 6$.

Hoành độ của M là nghiệm của phương trình:

$$a(x - 1)(x - 2)(x - 3) + x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow a(x - 1)(x - 2)(x - 3) = -(x - 1)(x - 2) \quad (1).$$

Vì M khác A và B nên $x \neq 1; x \neq 2$, do đó $(1) \Leftrightarrow a(x - 3) = -1 \Leftrightarrow x = 3 - \frac{1}{a}$.

Hoành độ của N là nghiệm của phương trình:

$$a(x - 1)(x - 2)(x - 3) + x^2 = 4x - 3 \Leftrightarrow a(x - 1)(x - 2)(x - 3) = -(x - 1)(x - 3) \quad (2).$$

Vì N khác A và C nên $x \neq 1; x \neq 3$, do đó $(2) \Leftrightarrow a(x-2) = -1 \Leftrightarrow x = 2 - \frac{1}{a}$.

Hoành độ của P là nghiệm của phương trình:

$$a(x-1)(x-2)(x-3) + x^2 = 5x - 6 \Leftrightarrow a(x-1)(x-2)(x-3) = -(x-2)(x-3) \quad (3).$$

Vì P khác B và C nên $x \neq 2; x \neq 3$, do đó $(3) \Leftrightarrow a(x-1) = -1 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{a}$.

Vì tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5 nên: $3 - \frac{1}{a} + 2 - \frac{1}{a} + 1 - \frac{1}{a} = 5 \Leftrightarrow a = 3$.

Vậy $f(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3) + x^2 \Rightarrow f(0) = -18$.

Câu 3: [1D2-5.2-4] (THPT Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - Năm 2019 - 2020) Chọn một số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Xác suất để số được chọn chia hết cho 11 bằng

A. $\frac{1}{24}$.

B. $\frac{5}{72}$.

C. $\frac{1}{36}$.

D. $\frac{1}{18}$.

Lời giải

Chọn B

Số cách lập số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập trên là: $6! \cdot A_6^5$ cách

Gọi $M = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ là số chia hết cho 11 và $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq 1+2+\dots+6 = 21$

$$M : 11 \Leftrightarrow \begin{cases} a_6 + a_4 + a_2 = a_1 + a_3 + a_5 \\ |a_1 + a_3 + a_5 - a_6 - a_4 - a_2|_2 = 11 \end{cases}$$

TH1: $a_6 + a_4 + a_2 = a_1 + a_3 + a_5$ vì $0+1+2+\dots+6=21$ là số lẻ nên ta chọn ra 6 chữ số từ tập ban đầu phải bỏ đi một số lẻ. Các tập còn lại lần lượt là $\{0; 2; 3; 4; 5; 6\}; \{0; 1; 2; 4; 5; 6\}; \{0; 1; 2; 3; 4; 6\}$. Ta nhận thấy mỗi tập như vậy chỉ có duy nhất một cách chia thành hai tập có 3 phần tử sao cho tổng ba phần tử tập này bằng tập kia.

Xét số các số $M : 11$ lập từ tập $\{0; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Nếu $a_1; a_3; a_5 \in \{2; 3; 5\}; a_2; a_4; a_6 \in \{0; 4; 6\}$ ta có $3! \cdot 3! = 36$ số

Nếu $a_1; a_3; a_5 \in \{0; 4; 6\}; a_2; a_4; a_6 \in \{2; 3; 5\}$ ta có $3! \cdot 3! - 2! \cdot 3! = 24$ số

Vậy trường hợp này có $3 \cdot (36 + 24) = 180$ (số)

TH2: $|a_1 + a_3 + a_5 - a_6 - a_4 - a_2| = 11$ vì $0+1+2+\dots+6=21$ là số lẻ nên ta chọn ra 6 chữ số từ tập ban đầu phải bỏ đi một số chẵn. Các tập còn lại lần lượt là $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}; \{0; 1; 3; 4; 5; 6\}; \{0; 1; 2; 3; 5; 6\}; \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Xét các hệ phương trình (ứng với từng tập hợp)

$$\begin{cases} x - y = 11 \\ x + y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 5 \end{cases}; \begin{cases} x - y = 11 \\ x + y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 4 \end{cases}; \begin{cases} x - y = 11 \\ x + y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x - y = 11 \\ x + y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Tập đầu tiên và tập thứ 4 không thể chia thành hai tập mỗi tập có ba chữ số mà tổng các chữ số tập này trừ đi tổng các chữ số tổng kia bằng 11 (vì không có ba chữ số nào có tổng là 16 và 1). Các tập thứ hai và thứ ba chỉ có duy nhất một cách chia

Tương tự trường hợp 1 ta có số các chữ số trường hợp này là $2.60 = 120$

$$\Rightarrow P = \frac{120+180}{A_7^6 - A_6^5} = \frac{5}{72}$$

Bài toán 1.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - 3\sqrt{x+3} = 3\sqrt{y-5} & (1) \\ \sqrt{x^2 + 16(y-x)} + y = 2\sqrt{xy} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải. Điều kiện
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 5 \\ x^2 + 16(y-x) \geq 0 \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có $y - 5 - 3\sqrt{y-5} + x - 3\sqrt{x+3} + 5 = 0$

Đặt $t = \sqrt{y-5} \geq 0$

Khi đó ta có $t^2 - 3t + x - 3\sqrt{x+3} + 5 = 0$

$\Delta_t = 9 - 4(x + 5 - 3\sqrt{x+3}) \geq 0 \Leftrightarrow 4(x+3) - 12\sqrt{x+3} - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x+3} \leq \frac{6+2\sqrt{10}}{4} \Rightarrow x < 16$

Mặt khác từ (2) ta có

$\sqrt{x^2 + 16(y-x)} - \sqrt{xy} - \sqrt{xy} + y = 0$

$\Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{x-16}{\sqrt{x^2 + 16(y-x)} + \sqrt{xy}} \right) - (x-y) \frac{y}{y + \sqrt{xy}} = 0$

$\Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{x-16}{\sqrt{x^2 + 16(y-x)} + \sqrt{xy}} - \frac{y}{y + \sqrt{xy}} \right) = 0$

Do $0 \leq x < 16; y \geq 5 \Rightarrow \frac{x-16}{\sqrt{x^2 + 16(y-x)} + \sqrt{xy}} - \frac{y}{y + \sqrt{xy}} < 0$

Với $x = y \Rightarrow 2x = 3(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-5})$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 9\sqrt{x^2 - 2x - 15}$

$\Rightarrow x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 324 = 0$

$\Rightarrow (x-6)^2(x^2 + 3x + 9) = 0$

$\Rightarrow x = 6$

Thử lại thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (6; 6)$.

Câu 49: [2H1-3.4-4] (THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội – Lần 01 – Năm 2019 - 2020) Cho hình chóp đều

$S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích

khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $3a^3$.

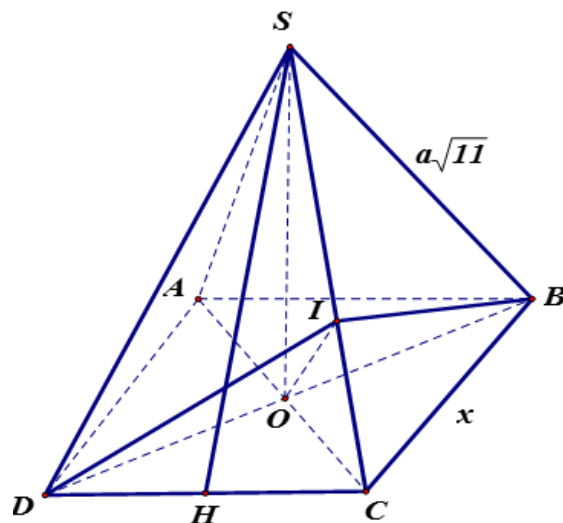
B. $12a^3$.

C. $4a^3$.

D. $9a^3$.

Lời giải

Chon C



+) Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, khi đó $SO \perp (ABCD)$.

Kẻ $OI \perp SC$ ($I \in SC$), ta có $BD \perp (SOC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow SC \perp (BID) \Rightarrow BI \perp SC, DI \perp SC$. Do đó $\angle((SBC);(SCD)) = \angle(BI;DI)$.

Từ giả thiết suy ra $\cos \angle(BI; DI) = \frac{1}{10} \Rightarrow \sin \angle BID = \frac{3\sqrt{11}}{10}$.

+) Đặt cạnh đáy $BC = x$. Khi đó $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{2}}$

$$\Rightarrow OI = \frac{SO \cdot OC}{SC} = \frac{\sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}}}{a\sqrt{11}}.$$

Gọi H là trung điểm $CD \Rightarrow SH \perp CD \Rightarrow SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{4}}$.

$$\Rightarrow BI = DI = \frac{SH.CD}{SC} = \frac{\sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{4}}.x}{a\sqrt{11}}.$$

Xét trong ΔDIB ta có $DI.BI.\sin \angle(BI; DI) = 2S_{\triangle BID} = OI.BD$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{4}} \cdot x}{a\sqrt{11}} \right)^2 \cdot \frac{3\sqrt{11}}{10} = \frac{\sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}}}{a\sqrt{11}} \cdot x\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{11-\frac{x^2}{2a^2}}=3\left(11-\frac{x^2}{4a^2}\right) \Leftrightarrow x^2=4a^2 \Leftrightarrow x=2a.$$

$$\text{Do đó } SO = \sqrt{11a^2 - \frac{x^2}{2}} = 3a \text{ nên } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = 4a^3.$$

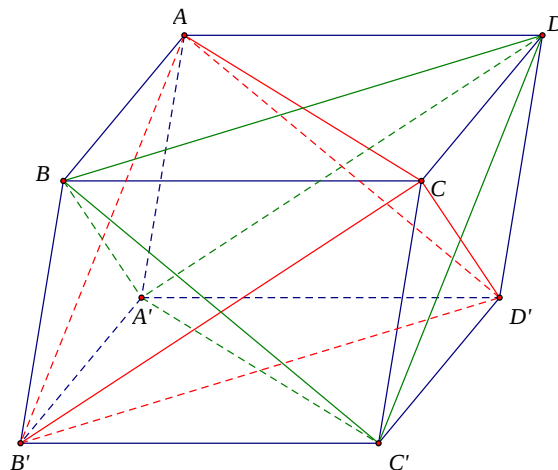
Câu 52: [2H1-3.10-4] (Cụm 8 Trường Chuyên - Lần 01 - Năm 2018 - 2019) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối của hai khối tứ diện $A'BC'D$ và $AB'CD'$. Gọi V_2 là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{6}$.

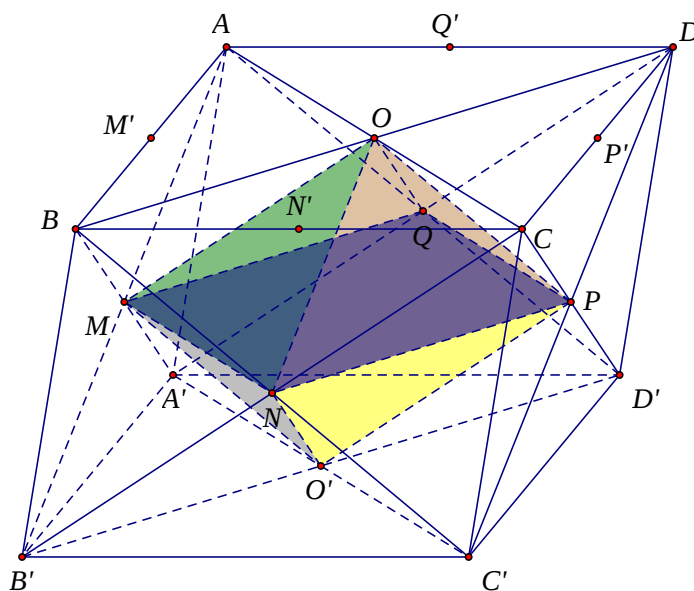
C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{4}$.



Lời giải

Chọn B



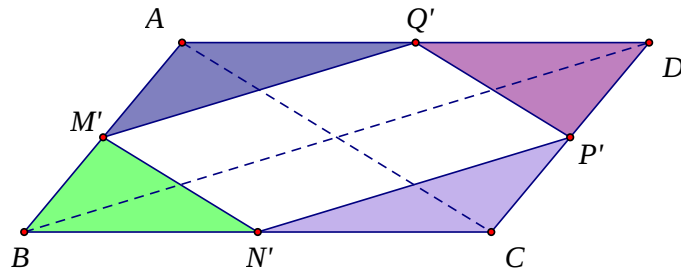
Gọi O, O', M, N, P, Q lần lượt là tâm của các hình chữ nhật $ABCD, A'B'C'D', A'B'BA, BB'C'C, CC'D'D, AA'D'D$.

Ta có phần chung của hai khối tứ diện $A'BC'D$ và $AB'CD'$ là bát diện $OMNPQO'$.

Gọi M', N', P', Q' lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Ta có

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCB}} = \frac{S_{M'N'P'Q'}}{S_{ABCB}} = \frac{S_{ABCB} - S_{AM'Q'} - S_{BM'N'} - S_{CN'P'} - S_{DP'Q'}}{S_{ABCB}}$$

$$= \frac{S_{ABCB} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot S_{ABCB}}{S_{ABCB}} = \frac{1}{2}$$



Ngoài ra, chiều cao của khối chóp $V_{O.MNPQ}$ bằng $\frac{1}{2}$ chiều cao của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

$$\text{Suy ra } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2V_{O.MNPQ}}{V_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Câu 16: [2H1-3.13-4] (ĐTD - Đề 08 - Năm 2018-2019) Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B . Biết rằng thể tích của khối chóp là $\frac{5}{24}$ và giá trị nhỏ nhất diện tích toàn phần chóp $S.ABC$ là $p\sqrt{5} + q$ trong đó $p, q \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị biểu thức: $p^2 + q^2 = ?$

A. $p^2 + q^2 = \frac{37}{36}$

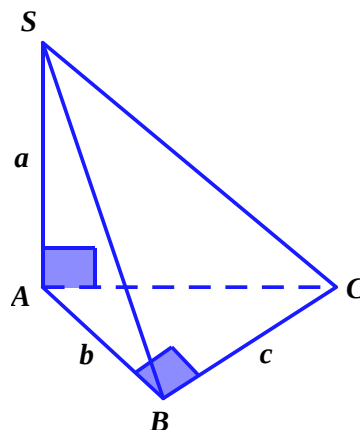
B. $p^2 + q^2 = \frac{37}{9}$

C. $p^2 + q^2 = \frac{25}{4}$

D. $p^2 + q^2 = \frac{25}{16}$

Lời giải

Chọn D



$SA = a, AB = b, BC = c$, ta có: $abc = \frac{5}{4}$.

Diện tích toàn phần: $\boxed{2S = ab + bc + a\sqrt{b^2 + c^2} + c\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky ta có: $\left(\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2 + 1^2 \right) (b^2 + c^2) \geq \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} b + c \right)^2$.

Như vậy: $\frac{3\sqrt{5}}{5} \sqrt{b^2 + c^2} \geq \frac{2\sqrt{5}}{5} b + c \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{b^2 + c^2} \geq \frac{2}{3} b + \frac{\sqrt{5}}{3} c}$.

Do đó: $2S = ab + bc + a \left(\frac{2}{3} b + \frac{\sqrt{5}}{3} c \right) + c \left(\frac{2}{3} b + \frac{\sqrt{5}}{3} a \right) = \frac{5}{3} b(a + c) + \frac{2\sqrt{5}}{3} ac \geq \frac{10}{3} b\sqrt{ac} + \frac{2\sqrt{5}}{3} \frac{5}{4b}$

$\Rightarrow 2S \geq \frac{10}{3} b\sqrt{\frac{5}{4b}} + \frac{5\sqrt{5}}{6b} = \frac{5\sqrt{5}}{3} \sqrt{b} + \frac{5\sqrt{5}}{6b} = \left(\frac{5\sqrt{5}}{6} \right) \left(\sqrt{b} + \sqrt{b} + \frac{1}{b} \right) \geq \frac{5\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S \geq \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $b = 1, a = c = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Vậy $p = \frac{5}{4}, q = 0 \Rightarrow \boxed{p^2 + q^2 = \frac{25}{16}}$.

Câu 6: [2D1-3.12-4] (ĐTD - Đề số 4 - Năm 2018 - 2019) Cho các số thực dương x, y phân biệt thỏa

mãn $xy \leq 4$. GTNN của $P = \frac{2}{x^4} + \frac{2}{y^4} + \frac{3}{(x-y)^4}$ nằm trong khoảng nào?

A. (0;1)

B. (1;2)

C. (2;3)

D. (3;4)

Lời giải

Gợi ý: Rút $x^2 y^2$ tạo nhân tử $\boxed{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t > 2}$

$$P = \frac{1}{x^2 y^2} \cdot \left[2 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{3}{\left[\frac{(x-y)^2}{xy} \right]^2} \right] \geq \frac{1}{16} \cdot \left[2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2 - 4 + \frac{3}{\left[\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right]^2} \right]$$

$\Rightarrow P \geq f(t)$ với $f(t) = \frac{1}{16} \left(2t^2 - 4 + \frac{3}{(t-2)^2} \right)$ với $t > 2$.