

MỤC LỤC

▶ BÀI ③. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI.....2

.....(A). Tóm tắt kiến thức
2

.....(B). Phân dạng toán cơ bản
3

•Dạng ①: Phương trình dạng.....3

•Dạng ②: Phương trình dạng.....3

.....(C). Dạng toán rèn luyện
4

•Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....4

•Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....15

•Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....31



► BÀI 9. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. Tóm tắt kiến thức

①. Phương trình dạng: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

✍ **Để giải phương trình:**

✓ Ta làm như sau: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

✓ **Bước ①:** Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.

✓ **Bước ②:** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm

✍ **Hoặc** $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + bx + c \geq 0 \\ dx^2 + ex + f \geq 0 \\ ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f \end{cases}$

②. Phương trình dạng: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

✍ **Để giải phương trình:**

✓ Ta làm như sau: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

✓ **Bước ①:** Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.

✓ **Bước ②:** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm

✍ **Hoặc** $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e \Leftrightarrow \begin{cases} dx + e \geq 0 \\ ax^2 + bx + c = (dx + e)^2 \end{cases}$

✍ **Chú ý:** Một số dạng phương trình chứa ẩn dưới dấu căn khác

①. Dạng: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

②. Dạng: $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0; B \geq 0 \\ A + B + 2\sqrt{AB} = C \end{cases}$

③. Dạng: $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} + \sqrt{D}$.

✓ Nếu $A + B = C + D$ (hoặc $A \cdot B = C \cdot D$) thì bình phương 2 vế ta được phương trình tương đương.

✓ Nếu $A + C = B + D$ (hoặc $A \cdot C = B \cdot D$) thì phải đưa phương trình về dạng:

$\sqrt{A} - \sqrt{C} = \sqrt{D} - \sqrt{B}$ sau đó bình phương hai vế, tìm nghiệm sau đó thử lại để

④. **Dạng:** $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$

✓ Lập phương hai vế ta được: $A + B + 3\sqrt[3]{AB}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = C$.

✓ Sau đó thay thế: $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$ vào phương trình, ta được: $A + B + 3\sqrt[3]{ABC} = C$

✍ **Chú ý:** sự thay thế này có thể dẫn đến nghiệm ngoại lai, vì vậy phải thử lại nghiệm.

B. Phân dạng toán cơ bản

• **Dạng ①: Phương trình dạng** $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

✍ **Phương pháp**

- ✓ Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$, ta làm như sau:
- ✓ Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình $ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$.
- ✓ Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1.
- ✓ Bước 3: Thử lại xem các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

📖 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 6x - 8} = \sqrt{x^2 - 5x - 2}$.

Lời giải

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$2x^2 - 6x - 8 = x^2 - 5x - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = -2$ thoả mãn. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -2$.

• **Dạng ②: Phương trình dạng** $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

✍ **Phương pháp**

- ✓ Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$, ta làm như sau:
- ✓ Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$.

- ✓ Bước 2: Giải phương trình nhận được ở Bước 1 .
- ✓ Bước 3: Thử lại xem các giá trị x tìm được ở Bước 2 có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 5x - 13} = x + 1$.

Lời giải

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 13 &= (x + 1)^2 \\ \Rightarrow 3x^2 + 5x - 13 &= x^2 + 2x + 1 \\ \Rightarrow 2x^2 + 3x - 14 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = 2$ thoả mãn. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.

Dạng toán rèn luyện

• Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x - 1} = 2 - x$ là:

- A. $S = \{1; 5\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{5\}$. D. $S = \{2; 3\}$.

Lời giải

Chọn B

Thay các giá trị vào phương trình có $x = 1$ vào thoả mãn phương trình.

Câu 2: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x - 1} = -x^2 - 5$ là

- A. $S = \{1; 5\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{5\}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn D

Vì $-x^2 - 5 < 0$ vậy phương trình vô nghiệm

Câu 3: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4 - 3x^2} = 2x - 1$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{4-3x^2}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 4-3x^2=4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=\frac{-3}{7} \end{cases}$$
$$\Rightarrow x=1$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $(x-3)\sqrt{4-x^2}=x^2-4x+3$ là:

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định $-2 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned} (x-3)\sqrt{4-x^2} &= x^2-4x+3 \\ \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{4-x^2} &= (x-3)(x-1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 & (L) \\ \sqrt{4-x^2} &= x-1 (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải (*)

$$\sqrt{4-x^2}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x=\frac{1+\sqrt{7}}{2} & (TM) \\ x=\frac{1-\sqrt{7}}{2} & (L) \end{cases}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm

Câu 5: Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)\sqrt{10-x^2}=x^2-3x+2$ là:

- A.** 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$

$$\begin{aligned}(x-1)\sqrt{10-x^2} &= x^2 - 3x + 2 \\ \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{10-x^2} &= (x-2)(x-1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(TM) \\ \sqrt{10-x^2} = x-2(*) \end{cases}\end{aligned}$$

Giải (*)

$$\sqrt{10-x^2} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 10-x^2 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x=3(TM) \\ x=-1(L) \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 4

Câu 6: Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$ là

- A.** $S = \emptyset$. **B.** $S = \{2\}$. **C.** $S = \{6; 2\}$. **D.** $S = \{6\}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-3} = x-3 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ 2x-3 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 2x-3 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \begin{cases} x=6 \Leftrightarrow x=6 \\ x=2 \end{cases} \end{cases}.\end{aligned}$$

Câu 7: Tìm số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y = x-3$.

- A.** 2 giao điểm. **B.** 4 giao điểm. **C.** 3 giao điểm. **D.** 1 giao điểm.

Lời giải

Chọn D

Số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y = x-3$ là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm:

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-4} = x-3 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ (\sqrt{3x-4})^2 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 3x-4 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 9x + 13 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = \frac{9-\sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{9+\sqrt{29}}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9+\sqrt{29}}{2}.\end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x - 4}$ và đường thẳng $y = x - 3$ có 1 giao điểm chung.

Câu 8: Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình: $\sqrt{2x - 1} = x - 2$ bằng:

- A.** 6. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

+) Với điều kiện $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ ta có phương trình đã cho tương đương với phương

$$\text{trình: } 2x - 1 = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(L) \\ x = 5(t/m) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Câu 9: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x - 2} = x$ là

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \sqrt{3x - 2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x - 2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Câu 10: Nghiệm của phương trình $\sqrt{5x + 6} = x - 6$ bằng

- A.** 15. **B.** 6. **C.** 2 và 15. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$$\sqrt{5x + 6} = x - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 \geq 0 \\ 5x + 6 = x^2 - 12x + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x^2 - 17x + 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x = 2 \\ x = 15 \end{cases} \Leftrightarrow x = 15$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 15$.

Câu 11: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{4x + 7} = 2x - 1$ là

- A.** $\left\{ \frac{2 - \sqrt{10}}{2}; \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \right\}$ **B.** $\left\{ \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \right\}$
C. $\left\{ \frac{2 - \sqrt{10}}{2} \right\}$ **D.** Một phương án khác.

Lời giải

Chọn B

Ta có
$$\sqrt{4x+7} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 4x+7 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 8x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$. Vậy $x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$.

Câu 12: Phương trình $\sqrt{-x^2+4x} = 2x-2$ có bao nhiêu nghiệm?

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{-x^2+4x} = 2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ -x^2+4x = (2x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 5x^2 - 12x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 2(n) \\ x = \frac{2}{5}(l) \end{cases}$$

Vậy $x=2$ là nghiệm của phương trình.

Câu 13: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x+5} = x^2-2x+3$ là

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x^2 - 2x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $t = x^2 - 2x + 5$, ta có phương trình trở thành $\sqrt{t} = t - 2$

$$\sqrt{t} = t - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t = (t-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t^2 - 5t + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t = 1 \Rightarrow t = 4 \\ t = 4 \end{cases}$$

Khi đó $4 = x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Thử lại ta thấy $x = 1$ thỏa mãn.

Suy ra phương trình đã cho có một nghiệm.

Câu 14: Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+x+1} = x^2+x-1$ là

- A.** 3. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \sqrt{x^2 + x + 1} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - \sqrt{x^2 + x + 1} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} = -1 \text{ (vn)} \\ \sqrt{x^2 + x + 1} = 2 \text{ (1)} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

$$\text{Do đó: } x_1 \cdot x_2 = \frac{-3}{1} = -3.$$

Câu 15: Phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x - 5} = x + 1$ có nghiệm:

- A.** $x = 1$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 5 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 16: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2 - 9x + 7} = x - 2$ là

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{3x^2 - 9x + 7} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 9x + 7 = (x - 2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 17: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + 3} = 3x - 1$ là

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2+3}=3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x^2+3=(3x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 8x^2-6x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x=1 \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Kết luận.

Câu 18: Phương trình: $\sqrt{x^2-x-12}=7-x$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 2.
C. 1. D. Vô Số.

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{x^2-x-12}=7-x \Leftrightarrow \begin{cases} 7-x \geq 0 \\ x^2-x-12=(7-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ 13x=61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x=\frac{61}{13}(tm) \end{cases}$$

Ta có:

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\frac{61}{13}$.

Câu 19: Số nghiệm của phương trình sau $x-\sqrt{2x^2-3x+1}=1$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$x-\sqrt{2x^2-3x+1}=1.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x^2-3x+1=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy số nghiệm của phương trình là 1.

Câu 20: Số nghiệm của phương trình $x^2-3x+86-19\sqrt{x^2-3x+16}=0$ là.

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Phương trình

$$x^2-3x+86-19\sqrt{x^2-3x+16}=0 \hat{=} x^2-3x+16-19\sqrt{x^2-3x+16}+70=0(*)$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 16}$, $t \geq 0$. Khi đó (*) $t^2 - 19t + 70 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 14 \\ t = 5 \end{cases}$

Với $t = 14 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 16} = 14 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ x = -12 \end{cases}$

Với $t = 5 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 16} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 21: Tìm m để phương trình $x + 2\sqrt{x+1} + m = 0$ vô nghiệm

- A. $m \in (2; +\infty)$. B. $m \in (1; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; 1]$. D. $m \in (-\infty; 2]$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{x+1} \geq 0$ ta có phương trình $t^2 + 2t - 1 = -m$ (2). Phương trình ban đầu vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) không có nghiệm $t \in [0; +\infty)$. Lập BBT cho hàm số $f(t) = t^2 + 2t - 1$ với $t \in [0; +\infty)$ ta có kết luận $-m < -1 \Leftrightarrow m > 1$ là các giá trị cần tìm. Suy ra đáp án **B**

Câu 22: Phương trình $\sqrt{2x^2 - (2m^2 + 1)x + m^2} = 2x - 1$ có hai nghiệm phân biệt thì $m \in (a, b)$. Tính $b - a$.

- A. 1. B. 0. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt tương đương với phương trình $2x^2 - (2m^2 + 1)x + m^2 = (2x - 1)^2$ (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1/2; +\infty)$.

Mà $(1) \Leftrightarrow 2x^2 + (2m^2 - 3)x + 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ x = 1 - m^2 \end{cases}$. Như vậy ta cần $1 - m^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Suy ra đáp án **C**

Câu 23: Phương trình $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = m$ có vô số nghiệm thì giá trị của m thuộc khoảng nào?

- A.** $m \in (1; 3)$. **B.** $m \in (2; 4)$. **C.** $m \in (3; 5)$. **D.** $m \in (4; 6)$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $[1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}+1| = m \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1} = m & (x \in [2; +\infty)) \\ 2 = m & (x \in [1; 2]) \end{cases}$$

Phương trình ban đầu

Để phương trình có vô số nghiệm thì $m=2$, suy ra chọn đáp án **A**

Câu 24: Phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = m^2(x+1)$ có nghiệm thì $m \in [a; b] \setminus \{0\}$, tính giá trị của $a^2 + b$

- A.** 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $[1; +\infty)$

Phương trình ban đầu

$$\Leftrightarrow 2(x+1) = m^2(x+1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 2 = m^2(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1})(1) \end{cases}$$

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm $x \geq 1$.

Lại có $(1) \Leftrightarrow \frac{2}{m^2} = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}$ do $m=0$ là cho phương trình vô nghiệm.

Vậy (1) có nghiệm $x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{m^2}$ thuộc miền giá trị của hàm số $y = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}$ với $x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \frac{2}{m^2} \geq 2 \Leftrightarrow m \in [-1; 1] \setminus \{0\}$. Suy ra đáp án **C**

Câu 25: Số các nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2+5x-2} - 2$ là

- A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} \Leftrightarrow x(x+5) = t^3 + 2$. Phương trình đã cho trở thành $t^3 - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t^2 - 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = -2$.

Với $t = -2: x^2 + 5x - 2 = -8 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$

Câu 26: Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - x - 1} - \sqrt{3 - \sqrt{x^2 - x - 1}} = 1$ là

- A.** $\frac{1}{2}$ **B.** - 5 **C.** 5 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{3 - \sqrt{x^2 - x - 1}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 1} = 3 - t^2$. Phương trình đã cho trở thành

$$3 - t^2 - t = 1 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1(tm) \\ t = -2(loại) \end{cases}$$

Với $t = 1: x^2 - x - 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -5$

Câu 27: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $2x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + x + 2\sqrt{x^2 + x - 1}} = 7$ là

- A.** 11 **B.** - 1 **C.** - 9 **D.** $\frac{25}{4}$

Lời giải

Chọn A

$$2x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + x + 2\sqrt{x^2 + x - 1}} = 7 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - \sqrt{(\sqrt{x^2 + x - 1} + 1)^2} = 7$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - (\sqrt{x^2 + x - 1} + 1) = 7 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + x - 1} - 8 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 2(t^2 + 1)$. Phương trình trở thành

$$2t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2(tm) \\ t = -\frac{3}{2}(loại) \end{cases}$$

Với $t = 2: x^2 + x - 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -1 \\ P = -5 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 11$

Câu 28: Nếu phương trình $x^2 + 2x + \sqrt{-x^2 - 2x + 15} + m = 0$ có nghiệm duy nhất thì

- A. $m \in (-2; 0)$ B. $m = -4$ C. $m \in (-4; 0)$ D. $m = -\frac{65}{4}$

Lời giải

Chọn C

$$x^2 + 2x + \sqrt{-x^2 - 2x + 15} + m = 0 \Leftrightarrow -(x+5)(3-x) + \sqrt{(x+5)(3-x)} + m + 15 = 0 \quad (1)$$

Nhận xét: Nếu a là nghiệm của (1) thì $-2-a$ cũng là nghiệm của (1). Để (1) có nghiệm duy nhất thì $a = -2-a \Leftrightarrow a = -1$. Thay $a = -1$ là nghiệm của (1) ta tính được $m = -3$.

Thử lại: Thay $m = -3$ vào phương trình và giải được nghiệm duy nhất $x = -1$.

Câu 29: Với giá trị nào của tham số m thì phương trình sau có nghiệm (ẩn x)

$$2x^2 - 4x + m + \sqrt{-x^2 + 2x} = -1$$

- A. $-\frac{9}{8} \leq m \leq 0$ B. $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$ C. $-1 \leq m$ D. $-\frac{9}{8} \leq m \leq -1$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 2x} = \sqrt{-(x-1)^2 + 1} \in [0; 1]$. Bài toán trở thành: tìm m để phương trình $2t^2 - t - 1 = m$ có nghiệm $t \in [0; 1]$. Lập bảng biến thiên của hàm số

$$f(t) = 2t^2 - t - 1, t \in [0; 1] \text{ ta tìm được tập giá trị của nó là } \left[-\frac{9}{8}; 0\right]$$

Câu 30: Cho phương trình $4\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{9x^2 + 54x + 81}$. Tính tổng các nghiệm của phương trình?

- A. $\frac{13}{23}$ B. 5 C. $\frac{102}{23}$ D. $\frac{125}{23}$

Lời giải

Chọn C

$$4\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{9x^2 + 54x + 81} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ 32x^2 - 48x + 16 = 9x^2 + 54x + 81 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ 23x^2 - 102x - 65 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ x = 5 \\ x = -\frac{13}{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -\frac{13}{23} \end{cases} \Rightarrow 5 + \left(-\frac{13}{23}\right) = \frac{102}{23}.$$

•Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Cho phương trình $\sqrt{2x^2 + x + 3} = -x - 5$ (*). Khi đó:

- a) Bình phương 2 vế của phương trình ta được $x^2 - 9x - 22 = 0$
- b) Phương trình $\sqrt{2x^2 + x + 3} = -x - 5$ và phương trình $x^2 - 9x - 22 = 0$ có chung tập nghiệm
- c) $x = 11; x = -2$ là nghiệm của phương trình (*)
- d) Tập nghiệm của phương trình (*) là $S = \emptyset$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Đúng

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} + x + 5 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + x + 3} = -x - 5.$$

Bình phương hai vế của phương trình, ta được:

$$2x^2 + x + 3 = x^2 + 10x + 25 \Rightarrow x^2 - 9x - 22 = 0 \Rightarrow x = 11 \text{ hoặc } x = -2$$

Thay lần lượt $x = 11; x = -2$ vào phương trình đã cho, ta thấy hai giá trị này đều không thỏa mãn. Do đó, phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \emptyset$

Câu 2: Cho phương trình $\sqrt{x^2 - 4x - 5} = \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$ (*). Khi đó:

- a) Bình phương hai vế của phương trình (*), ta được $x^2 - 7x + 6 = 0$
- b) $x = -1$ là nghiệm của phương trình (*)
- c) Tổng các nghiệm của phương trình (*) bằng -1
- d) Phương trình (*) có 1 nghiệm phân biệt

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai

$$\sqrt{x^2 - 4x - 5} - \sqrt{2x^2 + 3x + 1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 5} = \sqrt{2x^2 + 3x + 1}.$$

Bình phương hai vế của phương trình, ta được:

$$x^2 - 4x - 5 = 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -6.$$

Thay lần lượt $x = -1; x = -6$ vào phương trình đã cho, ta thấy hai giá trị này đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-1; -6\}$.

Câu 3: Cho phương trình $\sqrt{5x^2 - 8x + 2} = \sqrt{x^2 + 2}$ (*). Khi đó:

- a) $x^2 + 2 \geq 0$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.
- b) Bình phương hai vế ta được $4x^2 - 3x = 0$
- c) Phương trình (*) có 2 nghiệm
- d) Tổng các nghiệm của phương trình (*) bằng 0

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

a) Ta có: $x^2 + 2 \geq 0$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bình phương hai vế ta được
$$5x^2 - 8x + 2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 2\}$.

Câu 4: Cho phương trình $\sqrt{2x^2 + x - 6} = x + 2$ (*). Khi đó:

- a) Bình phương 2 vế phương trình ta được $x^2 - 3x - 10 = 0$
- b) Điều kiện của phương trình (*) là $x \geq 2$
- c) Phương trình (*) có 2 nghiệm
- d) Tổng bình phương các nghiệm của phương trình (*) bằng 20

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

b) Ta có:
$$\sqrt{2x^2 + x - 6} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 + x - 6 = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \end{cases}$$

Phương trình $x^2 - 3x - 10 = 0$ có hai nghiệm $x = -2, x = 5$. Ta thấy $x = -2$ và $x = 5$ đều thoả mãn $x \geq -2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 5\}$.

Câu 5: Cho phương trình $(x+1)(\sqrt{x+4} - \sqrt{-x^2 + 4x + 14}) = 0$ (*). Khi đó:

- a) Điều kiện: $x \geq 4$
- b) Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt
- c) Các nghiệm của phương trình (*) nhỏ hơn 5
- d) Tổng các nghiệm của phương trình (*) bằng 2

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Đúng

$$(x+1)(\sqrt{x+4} - \sqrt{-x^2+4x+14}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{-x^2+4x+14} = 0. \end{cases}$$

Ta có:

Phương trình $x+1=0$ có nghiệm là $x=-1$.

$$\text{Ta có: } \sqrt{x+4} - \sqrt{-x^2+4x+14} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{-x^2+4x+14} \quad (1)$$

Bình phương hai vế phương trình (1) ta có:

$$x+4 = -x^2+4x+14 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x=5 \text{ hoặc } x=-2 \text{ (đều thỏa mãn } x+4 \geq 0).$$

Vậy tập nghiệm của phương trình ban đầu là $S = \{-2; -1; 5\}$.

Câu 6: Cho phương trình $(\sqrt{x^2+2x-3} - 2x+2)^2 + (2 - \sqrt{x+3})^2 = 0$. (*) Khi đó:

a) Điều kiện: $x \geq -3$

b) Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt

c) $x = \frac{7}{3}$ là nghiệm của phương trình (*)

d) Nghiệm của phương trình (*) nhỏ hơn 2

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Sai d) Đúng

$$(\sqrt{x^2+2x-3} - 2x+2)^2 + (2 - \sqrt{x+3})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} - 2x+2 = 0 \\ 2 - \sqrt{x+3} = 0. \end{cases}$$

Ta có:

$$\text{Phương trình } 2 - \sqrt{x+3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2 \text{ có nghiệm } x=1.$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2+2x-3} - 2x+2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x-3} = 2x-2 \quad (2)$$

Bình phương hai vế phương trình (2) ta có:

$$x^2+2x-3 = 4x^2 - 8x+4 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x+7 = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=\frac{7}{3} \text{ (đều thỏa mãn } 2x-2 \geq 0).$$

Tuy nhiên chỉ có $x=1$ thỏa mãn phương trình $2 - \sqrt{x+3} = 0$.

Vậy tập nghiệm của phương trình ban đầu là $S = \{1\}$.

Câu 7: Cho phương trình $\sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{2-x}$ (*). Khi đó:

a) Điều kiện $x \leq 2$

b) Bình phương 2 vế phương trình (*) ta được $x^2+3x+1=0$

c) Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

d) Các nghiệm của phương trình (*) thuộc $\mathbb{Z}$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

Cách giải 1:

Bình phương hai vế phương trình, ta được:

$$x^2 + 2x + 4 = 2 - x \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2.$$

Thay giá trị $x = -1$ vào phương trình: $\sqrt{3} = \sqrt{3}$ (thỏa mãn).

Thay giá trị $x = -2$ vào phương trình: $\sqrt{4} = \sqrt{4}$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{-1; -2\}$.

Cách giải 2:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 4 = 2 - x \end{cases}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = -1 \vee x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{-1; -2\}$.

Câu 8: Cho phương trình $\sqrt{2x^2 + 5} = \sqrt{x^2 - x + 11}$ (*). Khi đó:

a) Điều kiện: $x \geq 0$

b) Bình phương 2 vế phương trình (*) ta được $x^2 + x - 6 = 0$

c) Phương trình (*) có 1 nghiệm

d) Giả sử x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là nghiệm của phương trình (*) khi đó: $x_1 - 2x_2 = 7$

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai

Cách giải 1:

Bình phương hai vế phương trình, ta được:

$$2x^2 + 5 = x^2 - x + 11 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3.$$

Thay giá trị $x = 2$ vào phương trình: $\sqrt{13} = \sqrt{13}$ (thỏa mãn).

Thay giá trị $x = -3$ vào phương trình: $\sqrt{23} = \sqrt{23}$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{2; -3\}$.

Cách giải 2:

$$\sqrt{2x^2 + 5} = \sqrt{x^2 - x + 11} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x^2 + 5 = x^2 - x + 11 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Ta có:

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{2; -3\}$.

Câu 9: Cho 2 phương trình $\sqrt{5x+10} = 8-x$ (1) và $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x-2$ (2). Khi đó:

- a) Phương trình (1) có 1 nghiệm
- b) Phương trình (2) có 2 nghiệm
- c) Phương trình (1) và (2) có chung tập nghiệm
- d) Tổng các nghiệm của phương trình (1) và (2) bằng 6

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

(1) $\sqrt{5x+10} = 8-x$.

Cách giải 1:

Bình phương hai vế phương trình, ta được:

$$5x+10 = 64 - 16x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 21x + 54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=18 \end{cases}$$

Thay $x=3$ vào phương trình đã cho: $\sqrt{25} = 5$ (thỏa mãn).

Thay $x=18$ vào phương trình đã cho: $\sqrt{100} = -10$ (không thỏa mãn). Vậy tập nghiệm phương trình: $S = \{3\}$.

Cách giải 2:

Ta có: $\sqrt{5x+10} = 8-x \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x \geq 0 \\ 5x+10 = 64 - 16x + x^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x^2 - 21x + 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x=3 \vee x=18 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Vậy tập nghiệm phương trình: $S = \{3\}$.

(2) $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x-2$.

Cách giải 1:

Bình phương hai vế phương trình, ta được:

$$3x^2 - 9x + 1 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x=3 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Thay $x=3$ vào phương trình đã cho, ta được: $\sqrt{1} = 1$ (thỏa mãn). Thay

$x = -\frac{1}{2}$ vào phương trình đã cho, ta được: $\sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{5}{2}$ (không thỏa mãn). Vậy tập nghiệm phương trình: $S = \{3\}$.

Cách giải 2:

Ta có: $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 9x + 1 = x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 3 \vee x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy tập nghiệm phương trình: $S = \{3\}$.

Câu 10: Cho các phương trình sau $\sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ (1) và $\sqrt{x+2} = \sqrt{3x^2 - x + 1}$ (2). Khi đó:

a) Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

b) Phương trình (2) có 1 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình (1) bằng $\frac{3}{2}$

d) Tổng các nghiệm của phương trình (2) bằng $\frac{2}{3}$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

(1) Bình phương hai vế phương trình, ta có:

$$x^2 - x - 2 = -x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{5}{2}.$$

Thay các giá trị $x = -1, x = \frac{5}{2}$ vào phương trình đã cho, ta thấy chúng đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \left\{-1; \frac{5}{2}\right\}$.

(2) Bình phương hai vế phương trình, ta có:

$$3x^2 - x + 1 = x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}.$$

Thay các giá trị $x = 1, x = -\frac{1}{3}$ vào phương trình đã cho, ta thấy chúng đều thỏa

mãn. Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \left\{1; -\frac{1}{3}\right\}$.

Câu 11: Cho các phương trình sau: $\sqrt{3-2x} = x$ (1) và $\sqrt{7x+11} + x + 1 = 0$ (2). Khi đó:

a) Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

b) Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt

c) Tổng các nghiệm của phương trình (1) bằng 1

d) Nghiệm của phương trình (2) nhỏ hơn 5

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Đúng

(1) Ta có: $\sqrt{3-2x}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3-2x=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x=1 \vee x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$. Vậy tập nghiệm phương trình là: $S=\{1\}$.

(2) Ta có: $\sqrt{7x+11}+x+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{7x+11}=-x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 \geq 0 \\ 7x+11=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2-5x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x=\frac{5 \pm \sqrt{65}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5-\sqrt{65}}{3}.$$

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S=\left\{\frac{5-\sqrt{65}}{3}\right\}$.

Câu 12: Cho phương trình $(x-2)\sqrt{2x^2+4}=x^2-4$. Khi đó:

a) Điều kiện $x \geq 2$

b) Phương trình có 3 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình bằng 5

d) Các nghiệm của phương trình là các số chẵn

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Đúng

Ta có: $(x-2)\sqrt{2x^2+4}=x^2-4$

$$\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{2x^2+4}=(x-2)(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{2x^2+4}=x+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x+2 \geq 0 \\ 2x^2+4=x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x \geq -2 \\ x^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x \geq -2 \\ x=0 \vee x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \\ x=4 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S=\{0; 2; 4\}$.

Câu 13: Cho phương trình $x^2-3x+10+2(x-3)\sqrt{3x+1}=0$. Khi đó:

a) Điều kiện: $x \leq 3$

b) Phương trình có 3 nghiệm

c) Các nghiệm của phương trình nhỏ hơn 2

d) Các nghiệm của phương trình là số lẻ

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

Ta có: $x^2 - 3x + 10 + 2(x - 3)\sqrt{3x + 1} = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + (\sqrt{3x + 1})^2 + 2(x - 3)\sqrt{3x + 1} = 0 \Leftrightarrow [(x - 3) + \sqrt{3x + 1}]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3) + \sqrt{3x + 1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x + 1} = 3 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 3x + 1 = 9 - 6x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 9x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = 1 \vee x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \{1\}$.

Câu 14: Cho phương trình $\sqrt{5x^2 - 28x - 29} = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ (1). Khi đó:

a) Bình phương hai vế của phương trình (1), ta được: $4x^2 - 23x - 35 = 0$

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

c) Nghiệm lớn nhất của phương trình (1) là một số tự nhiên

d) Nghiệm nhỏ nhất của phương trình (1) là một số nguyên âm

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

Bình phương hai vế của phương trình (1), ta được:

$$5x^2 - 28x - 29 = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow 4x^2 - 23x - 35 = 0 \Rightarrow x = 7 \text{ hoặc } x = -\frac{5}{4}.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy $x = 7$ và $x = -\frac{5}{4}$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 7$ và $x = -\frac{5}{4}$.

Câu 15: Cho phương trình $\sqrt{-x^2 - 5x + 2} = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ (2) Khi đó:

a) Bình phương hai vế phương trình (2), ta được: $2x^2 + 3x - 5 = 0$

b) Phương trình (2) có chung tập nghiệm với phương trình $2x + 5 = 0$

c) Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt

d) Các nghiệm của phương trình (2) nhỏ hơn 3

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

Bình phương hai vế phương trình (2), ta được:

$$-x^2 - 5x + 2 = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -\frac{5}{2}.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình (1) ta thấy chỉ có $x = -\frac{5}{2}$ thỏa mãn. Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = -\frac{5}{2}$.

Câu 16: Cho phương trình $\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{-2x^2 + 5} = 0$. (3) Khi đó:

- a) Bình phương hai vế phương trình (3), ta được: $2x^2 + 2x - 3 = 0$
- b) Phương trình (3) có chung tập nghiệm với phương trình $3x^2 + 2x - 8 = 0$
- c) Phương trình (3) có một nghiệm
- d) Phương trình (3) có các nghiệm là các số nguyên âm

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Sai

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{-2x^2 + 5} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{-2x^2 + 5} \quad (3)$$

Bình phương hai vế phương trình (3), ta được:

$$x^2 + 2x - 3 = -2x^2 + 5 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = \frac{4}{3}.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình (3) ta thấy chỉ có $x = \frac{4}{3}$ thỏa mãn. Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x = \frac{4}{3}$.

Câu 17: Cho phương trình $\sqrt{x^2 - 6x + 17} = 3$. (1) Khi đó:

- a) Bình phương hai vế phương trình (1), ta được: $x^2 - 6x + 8 = 0$
- b) Phương trình (1) có một nghiệm
- c) Phương trình (1) có một nghiệm nhỏ hơn 3
- d) Tổng các nghiệm của phương trình (1) bằng 6

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

a) Bình phương hai vế phương trình (1), ta được:
 $x^2 - 6x + 17 = 9 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 4.$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy $x = 2$ và $x = 4$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 2$ và $x = 4$.

Câu 18: Cho phương trình $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = 2 - x$. (2) Khi đó:

- a) Bình phương hai vế phương trình (2), ta được: $2x^2 - 5x - 3 = 0$

b) Phương trình (2) có chung tập nghiệm với phương trình $2x+1=0$

c) Tổng các nghiệm của phương trình (2) bằng $\frac{5}{2}$

d) Nghiệm nhỏ nhất của phương trình (2) nhỏ hơn 0

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

Bình phương hai vế phương trình (2), ta được:

$$3x^2 - 9x + 1 = (2 - x)^2 \Rightarrow 3x^2 - 9x + 1 = 4 - 4x + x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ hoặc } x = 3.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 19: Cho phương trình $\sqrt{4+2x-x^2}+2=x$. (3) Khi đó:

a) Bình phương hai vế phương trình (3), ta được $2x^2 - 3x = 0$

b) Phương trình (3) có chung tập nghiệm với phương trình $2x - 6 = 0$

c) Phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt

d) Tổng các nghiệm của phương trình (3) bằng 3

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Đúng

$$\sqrt{4+2x-x^2}+2=x \Leftrightarrow \sqrt{4+2x-x^2}=x-2.$$

Bình phương hai vế phương trình ta được $4+2x-x^2=(x-2)^2 \Rightarrow 4+2x-x^2=x^2-4x+4 \Rightarrow 2x^2-6x=0 \Rightarrow x=0$ hoặc $x=3$.

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=3$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình (3) là $x=3$.

Câu 20: Cho phương trình $\sqrt{3x-2}=1+\sqrt{x+7}$. (1) Khi đó:

a) Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

- c) Phương trình (1) có chung tập nghiệm với phương trình $(x-9)^2=0$
 d) Tổng các nghiệm của phương trình (1) bằng 11

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

Điều kiện: $\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = \sqrt{x+7} + 1 \Leftrightarrow 3x-2 = x+8 + \sqrt{x+7} \Leftrightarrow \sqrt{x+7} = x-5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5 \geq 0 \\ x+7 = x^2 - 10x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x=9 \Leftrightarrow x=9 \\ x=2 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện, ta được nghiệm của phương trình là $x=9$.

Câu 21: Cho phương trình $(x-2)\sqrt{2x+7} = x^2 - 4$ (3). Khi đó:

- a) Điều kiện $x \geq \frac{7}{2}$
 b) Phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt
 c) Tổng các nghiệm của phương trình (3) bằng 3
 d) Các nghiệm của phương trình (3) là các số tự nhiên

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng

Điều kiện: $2x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$.

$$(x-2)\sqrt{2x+7} = x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{2x+7} = (x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)[\sqrt{2x+7} - (x+2)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{2x+7} = x+2 \end{cases}$$

+) $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn).

+) $\sqrt{2x+7} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x+7 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$.

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm $x=2$ và $x=1$.

Câu 22: Cho phương trình $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$ (4). Khi đó:

a) Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$

b) Phương trình (4) có 3 nghiệm phân biệt

c) Phương trình (4) có nghiệm lớn nhất là một số tự nhiên

d) Tổng các nghiệm của phương trình (4) bằng $3 - \sqrt{2}$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} - x + x^2 - (2x-1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1} - x) + x^2 - (\sqrt{2x-1})^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1} - x) + (x - \sqrt{2x-1})(x + \sqrt{2x-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2x-1})(-1 + x + \sqrt{2x-1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = x \\ \sqrt{2x-1} = 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 1 = x^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 2x - 1 = (1 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 2 - \sqrt{2}.$$

So với Điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = 1$ hoặc $x = 2 - \sqrt{2}$.

Câu 23: Xác định tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình $\sqrt{4x^2 - 3x - 3} = \sqrt{2x + 3}$ có 2 nghiệm phân biệt

b) Phương trình $\sqrt{x^2 + 12x + 28} = \sqrt{2x^2 + 14x + 24}$ có 2 nghiệm phân biệt

c) Phương trình $\sqrt{-4x^2 - 5x + 8} - \sqrt{2x^2 + 2x - 2} = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

d) Phương trình $\sqrt{2x^2 - 12x - 14} = \sqrt{5x^2 - 26x - 6}$ có 2 nghiệm phân biệt

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

a) $x = -\frac{3}{4}; x = 2$.

b) $x = -1 + \sqrt{5}$.

c) $x = -2$ và $x = \frac{5}{6}$.

d) Phương trình vô nghiệm.

Câu 24: Xác định tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 2x - 5$ có 2 nghiệm phân biệt

b) Phương trình $\sqrt{x^2 + 3x + 4} - 3x = 1$ có 2 nghiệm phân biệt

c) Phương trình $\sqrt{x^2 - 2x - 8} = \sqrt{3}(x - 4)$ có 2 nghiệm phân biệt

d) Phương trình $\sqrt{11x^2 - 64x + 97} = 3x - 11$ có 2 nghiệm phân biệt

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Sai

a) $x = \frac{14}{5}$.

b) $x = \frac{-3 + \sqrt{105}}{16}$.

c) $x = 4$ hoặc $x = 7$.

d) Phương trình vô nghiệm.

Câu 25: Xác định tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+1} = 8$ có 2 nghiệm phân biệt

b) Phương trình $\sqrt{7x+4} - \sqrt{x+1} = 3$ có 2 nghiệm phân biệt

c) Phương trình $\sqrt{5x+1} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{14x+7}$ có 2 nghiệm phân biệt

d) Phương trình $\sqrt{3x-3} - \sqrt{5-x} = \sqrt{2x-4}$ có 2 nghiệm phân biệt

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Đúng

a) $x = 8$.

b) $x = 3$.

c) $x = -\frac{1}{9}$ hoặc $x = 3$.

d) $x = 2$ hoặc $x = 4$. (HD: pt $\Leftrightarrow \sqrt{3x-3} = \sqrt{2x-4} + \sqrt{5-x}$)

Câu 26: Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau

a) Phương trình $\sqrt{x^2 + x - 4} = \sqrt{x^2 - x}$ có 2 nghiệm

b) Phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{2x^2 - 5x - 1}$ có 2 nghiệm

c) Phương trình $\sqrt{2x^2 + x - 1} = 5 - x$ có 2 nghiệm

d) Phương trình $\sqrt{-x^2 + x + 6} = 3x - 4$ có 2 nghiệm

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Sai

a) $S = \{2\}$.

b) $S = \{-1; 3\}$.

c) $S = \{2; -13\}$.

d) $S = \{2\}$.

Câu 27: Cho phương trình $\sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+2)} = 2\sqrt{x^2}$. Khi đó:

- a) $x=0$ là nghiệm của phương trình
- b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt
- c) Tổng các nghiệm của phương trình bằng 9
- d) Nghiệm lớn nhất của phương trình nhỏ hơn 2

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

Điều kiện:
$$\begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x(x+2) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x \leq -2 \vee x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

+ Với $x=0$ thì phương trình trở thành $0=0 \Rightarrow x=0$ là một nghiệm của pt.

+ Với $x \geq 1$ thì pt $\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}) = 2\sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x-1+x+2+2\sqrt{(x-1)(x+2)} = 4x \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x+2)} = x - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + x - 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = \frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{8} (N).$

Suy ra nghiệm của phương trình là $x=0 \vee x=\frac{9}{8}$.

Câu 28: Cho phương trình $(x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12$. Khi đó:

- a) Điều kiện $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$
- b) $x=-3$ là nghiệm của phương trình
- c) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt
- d) Tổng các nghiệm của phương trình bằng 3

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

Điều kiện: $10-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$.

$$(*) \Leftrightarrow (x+3)\sqrt{10-x^2} = (x+3)(x-4) \Leftrightarrow (x+3)\left[\sqrt{10-x^2} - (x-4)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \sqrt{10-x^2} = x-4 \quad (1) \end{cases}$$

Ta có: $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10} \Rightarrow x-4 \leq \sqrt{10}-4 < 0 \Rightarrow x-4 < 0$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -3$.

Câu 29: Cho phương trình $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$. Khi đó:

a) Điều kiện $x \geq -5$

b) Phương trình tương đương với phương trình $x^2 - (x+5) + (x+\sqrt{x+5}) = 0$

c) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

d) Tích các nghiệm của phương trình là một số dương

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

Điều kiện: $x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$. pt $\Leftrightarrow x^2 - (x+5) + (x+\sqrt{x+5}) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{x+5})^2 + (x+\sqrt{x+5}) = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{x+5})(x + \sqrt{x+5}) + (x + \sqrt{x+5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x+5})(x + 1 - \sqrt{x+5}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5} = -x & (1) \\ \sqrt{x+5} = x+1 & (2) \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ hoặc $x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$.

Câu 30: Cho phương trình $2x^2 - 6x + 10 - 5(x-2)\sqrt{x+1} = 0$. Khi đó:

a) Điều kiện $x \geq -1$

b) Phương trình tương đương với phương trình $2(x-2)^2 + 2(x+1) - 5(x-2)\sqrt{x+1} = 0$

c) $x=0$ là nghiệm của phương trình

d) Tổng các nghiệm của phương trình bằng 11

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

Điều kiện: $x \geq -1$. pt $\Leftrightarrow 2(x-2)^2 + 2(x+1) - 5(x-2)\sqrt{x+1} = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow [2(x-2)^2 - (x-2)\sqrt{x+1}] + [2(\sqrt{x+1})^2 - 4(x-2)\sqrt{x+1}] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)[2(x-2) - \sqrt{x+1}] - 2\sqrt{x+1}[2(x-2) - \sqrt{x+1}] = 0 \\ &\Leftrightarrow [2(x-2) - \sqrt{x+1}][(x-2) - 2\sqrt{x+1}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2) - \sqrt{x+1} = 0 \\ 2\sqrt{x+1} - (x-2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 17x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 8x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8$$

So với điều kiện, phương trình có hai nghiệm: $x=3$ hoặc $x=8$.

Câu 31: Cho phương trình $4x^2 + \sqrt{2x+3} = 8x+1$. Khi đó:

a) Điều kiện: $x \geq \frac{3}{2}$

b) Phương trình tương đương với phương trình $\left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+3} - \frac{1}{2}\right)^2$

c) Phương trình có 4 nghiệm phân biệt

d) Phương trình có một nghiệm dương lớn hơn $\frac{3}{2}$

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Đúng

Điều kiện: $2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$.

$$\text{pt} \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = (\sqrt{2x+3})^2 - 2\sqrt{2x+3} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+3} - \frac{1}{2}\right)^2$$

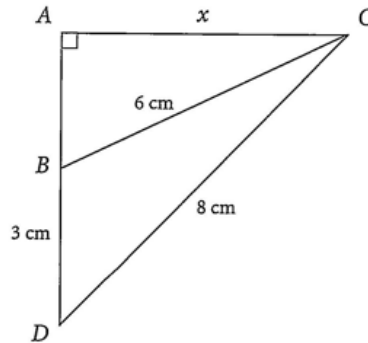
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{3}{2} = \sqrt{2x+3} - \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{2x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+3} = 2x - 1 \\ \sqrt{2x+3} = 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{21}}{4} \\ x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của phương trình là $x = \frac{5 - \sqrt{21}}{4}$ hoặc

$$x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$$

•Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 6\text{ cm}$. Điểm D nằm trên tia AB sao cho $DB = 3\text{ cm}, DC = 8\text{ cm}$ (xem hình vẽ). Đặt $AC = x$. Tính diện tích tam giác BCD (làm tròn kết quả đến hàng phân mười).



Trả lời: $7,65(\text{cm}^2)$

Lời giải

Áp dụng định lí Pytago cho tam giác ABC vuông tại A , ta được:
 $AC^2 + AB^2 = BC^2$.

Suy ra $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{6^2 - x^2} = \sqrt{36 - x^2}(\text{cm})$.

Áp dụng định lí Pytago cho tam giác ACD vuông tại A , ta được:
 $AC^2 + AD^2 = CD^2$.

Suy ra $AD = \sqrt{CD^2 - AC^2} = \sqrt{8^2 - x^2} = \sqrt{64 - x^2}(\text{cm})$.

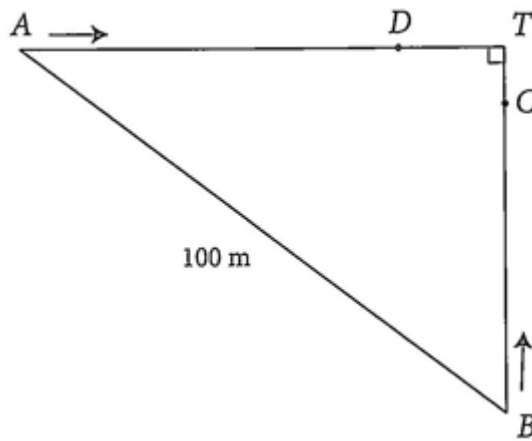
Mà $AB + BD = AD$ nên $\sqrt{36 - x^2} + 3 = \sqrt{64 - x^2}$ (1).

Bình phương hai vế của phương trình (1), ta được:

$$36 - x^2 + 6\sqrt{36 - x^2} + 9 = 64 - x^2 \Rightarrow \sqrt{36 - x^2} = \frac{19}{6} \Rightarrow x^2 = \frac{935}{36} \Rightarrow x \approx 5,1.$$

Diện tích của tam giác BCD là: $\frac{1}{2} \cdot 5,1 \cdot 3 = 7,65(\text{cm}^2)$.

Câu 2: Lúc 8 giờ sáng, hai ô tô cùng xuất phát tại vị trí A và vị trí B cách nhau 100 km chạy về thành phố T . Vận tốc của hai ô tô chạy từ vị trí A và vị trí B lần lượt là 55 km/h và 45 km/h . Biết rằng tại thời điểm ô tô đi từ vị trí A đến địa điểm D cách thành phố T 14 km thì ô tô đi từ vị trí B đến địa điểm C cách thành phố T là 6 km . Hỏi thời điểm đó là mấy giờ?



Trả lời: 9 giờ 12 phút (sáng).

Lời giải

Gọi x (giờ) là thời gian ô tô đi từ vị trí A đến địa điểm $D(x > 0)$. Vì hai ô tô xuất

phát cùng một lúc nên thời gian ô tô đi từ vị trí B đến địa điểm C cũng là x giờ.

Do đó, quãng đường AD và BC lần lượt là $55x(km)$ và $45x(km)$.

Suy ra khoảng cách từ vị trí A và vị trí B đến thành phố T lần lượt là $55x+14(km)$

và $45x+6(km)$.

Vì khoảng cách giữa hai vị trí A và B là $100km$ nên ta có phương trình:

$$\sqrt{(55x+14)^2 + (45x+6)^2} = 100 \Rightarrow 5050x^2 + 2080x + 232 = 10000.$$

Giải phương trình này và kết hợp với điều kiện $x > 0$, ta nhận $x = \frac{6}{5}$.

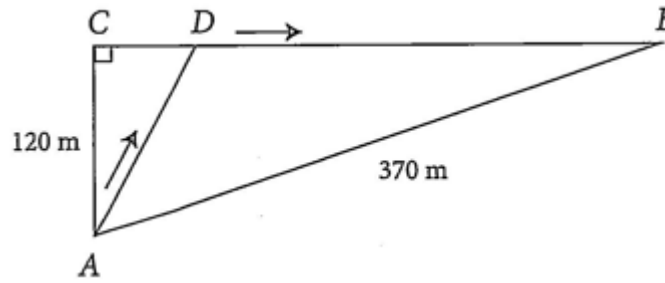
Đổi: $\frac{6}{5}$ giờ = 1 giờ 12 phút.

Vậy thời điểm ô tô đi từ vị trí A đến địa điểm D là:

8 giờ + 1 giờ 12 phút = 9 giờ 12 phút (sáng).

Câu 3: Một chú thỏ ngày nào cũng ra bờ suối ở vị trí A , cách cửa hang của mình tại vị trí B là $370m$ để uống nước, sau đó chú thỏ sẽ đến vị trí C cách vị trí A $120m$ để ăn cỏ rồi trở về hang. Tuy nhiên, hôm nay sau khi uống nước ở bờ suối, chú thỏ không đến vị trí C như mọi ngày mà chạy đến vị trí D để tìm cà rốt rồi mới trở về hang (xem hình bên dưới). Biết rằng, tổng thời gian chú thỏ chạy từ vị trí A đến vị trí D rồi về hang là 30 giây (không kể thời gian tìm

cà rốt), trên đoạn AD chú thỏ chạy với vận tốc là $13m/s$, trên đoạn BD chú thỏ chạy với vận tốc là $15m/s$. Tính khoảng cách giữa hai vị trí C và D .



Trả lời: $50(m)$

Lời giải

Gọi thời gian chú thỏ chạy trên đoạn AD là $x(0 < x < 30)$ (giây), khi đó thời gian

chú thỏ chạy trên đoạn BD là $30 - x$ (giây). Do đó, quãng đường AD và BD lần lượt là $13x(m)$ và $15(30 - x)(m)$.

Độ dài quãng đường BC là: $\sqrt{370^2 - 120^2} = 350(m)$.

Tam giác ACD vuông tại C nên $CD = \sqrt{(13x)^2 - 120^2} (m)$.

Mặt khác, $CD = BC - BD = 350 - 15(30 - x)(m)$.

Do đó, ta có: $\sqrt{(13x)^2 - 120^2} = 350 - 15(30 - x)$.

Giải phương trình này và kết hợp với điều kiện $0 < x < 30$, ta nhận $x = 10$ (giây).

Vậy khoảng cách giữa vị trí C và vị trí D là: $350 - 15 \cdot (30 - 10) = 50(m)$.

Câu 4: Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{x^2 - 4x - 1} - |2x + 1| = 1$

Trả lời: $S = \left\{ \frac{-6 + \sqrt{21}}{3}; -1 \right\}$

Lời giải

Trường hợp 1: Với $2x + 1 \geq 0$ hay $x \geq -\frac{1}{2}$, phương trình đã cho trở thành:

$$\sqrt{x^2 - 4x - 1} - (2x + 1) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 1} = 2x + 2 \quad (1)$$

Bình phương hai vế của phương trình (1), ta được:

$$x^2 - 4x - 1 = 4x^2 + 8x + 4 \Rightarrow 3x^2 + 12x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 + \sqrt{21}}{3} \text{ hoặc } x = \frac{-6 - \sqrt{21}}{3}.$$

Mà $x \geq -\frac{1}{2}$ nên ta nhận $x = \frac{-6 + \sqrt{21}}{3}.$

Thay $x = \frac{-6 + \sqrt{21}}{3}$ vào phương trình đã cho, ta thấy giá trị này thoả mãn.

Trường hợp 2: Với $2x + 1 < 0$ hay $x < -\frac{1}{2}$, phương trình đã cho trở thành $\sqrt{x^2 - 4x - 1} + 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 1} = -2x.$ (2)

Bình phương hai vế của phương trình (2), ta được:

$$x^2 - 4x - 1 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{3} \text{ hoặc } x = -1.$$

Mà $x < -\frac{1}{2}$ nên ta nhận $x = -1.$

Thay $x = -1$ vào phương trình đã cho, ta thấy giá trị này thoả mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{-6 + \sqrt{21}}{3}; -1 \right\}.$

Câu 5: Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{2x^2 - |x| + 3} = -x + 5.$

Trả lời: $S = \left\{ 2; \frac{-11 - \sqrt{209}}{2} \right\}$

Lời giải

Trường hợp 1: Với $x \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{2x^2 - x + 3} = -x + 5. \quad (1)$$

Bình phương hai vế của phương trình (1), ta được:

$$2x^2 - x + 3 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x^2 + 9x - 22 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -11.$$

Mà $x \geq 0$ nên ta nhận $x = 2.$

Thay $x = 2$ vào phương trình đã cho, ta thấy giá trị này thoả mãn.

Trường hợp 2: Với $x < 0$, phương trình trở thành

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} = -x + 5. \quad (2)$$

Bình phương hai vế của phương trình (2), ta được:

$$2x^2 + x + 3 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x^2 + 11x - 22 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-11 + \sqrt{209}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{-11 - \sqrt{209}}{2}.$$

Mà $x < 0$ nên ta nhận $x = \frac{-11 - \sqrt{209}}{2}$.

Thay $x = \frac{-11 - \sqrt{209}}{2}$ vào phương trình đã cho, ta thấy giá trị này thoả mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ 2; \frac{-11 - \sqrt{209}}{2} \right\}$.

Câu 6: Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = |x - 2|$;

Trả lời: $S = \left\{ -3; \frac{7}{2} \right\}$

Lời giải:

Cách giải 1:

Bình phương hai vế phương trình, ta có:

$$3x^2 - 9x - 5 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{7}{2}.$$

Thay $x = -3$ vào phương trình, ta được: $\sqrt{49} = |-7|$ (thỏa mãn).

Thay $x = \frac{7}{2}$ vào phương trình, ta được: $\frac{1}{2} = \left| -\frac{1}{2} \right|$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \left\{ -3; \frac{7}{2} \right\}$.

Cách giải 2:

Ta có: $\sqrt{3x^2 - 9x - 5} = |x - 4| \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 4| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 3x^2 - 9x - 5 = x^2 - 8x + 16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{7}{2}$$

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \left\{ -3; \frac{7}{2} \right\}$.

Câu 7: Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} = x + \frac{1}{4}$.

Trả lời: vô nghiệm.

Lời giải:

Ta có: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} = x + \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 = x + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = x - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{4} \geq 0 \\ x-1 = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 8: Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$;

Trả lời: $S = \{1; 2\}$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 3} (t \geq 0)$, suy ra $t^2 = x^2 - 3x + 3 \Rightarrow t^2 - 3 = x^2 - 3x$.

Phương trình trở thành:

$$t + \sqrt{(t^2 - 3) + 6} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 3} = 3 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ t^2 + 3 = 9 - 6t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Với $t = 1$ thì $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$.

Câu 9: Tìm tập nghiệm phương trình sau: $(x+1)(x+4) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$

Trả lời: $S = \{2; -7\}$

Lời giải

$$(x+1)(x+4) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 2 - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 5x + 2} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = x^2 + 5x + 2 \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + 5x.$$

$$\text{Phương trình trở thành: } (t^2 - 2) - 2 - 3t = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (l)} \\ t = 4 \end{cases} \quad \text{Với } t = 4$$

$$\text{thì } \sqrt{x^2 + 5x + 2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{2; -7\}$.

Câu 10: Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = \sqrt{(3+x)(6-x)} + 3$;

Trả lời: $S = \{-3; 6\}$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} (t \geq 0)$

$$\Rightarrow t^2 = (3+x) + (6-x) + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \Rightarrow \frac{t^2 - 9}{2} = \sqrt{(3+x)(6-x)}.$$

Phương trình đã cho trở thành: $t = \frac{t^2 - 9}{2} + 3 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (l)} \\ t = 3 \text{ (n)} \end{cases}$.

Với $t = 3$ thì $\frac{3^2 - 9}{2} = \sqrt{(3+x)(6-x)} \Leftrightarrow (3+x)(6-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-3; 6\}$.

Câu 11: Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt[3]{x+7} = 1 + \sqrt{x}$.

Trả lời: $S = \{1\}$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[3]{x+7} \Rightarrow t^3 = x+7 \Rightarrow t^3 - 7 = x$.

Phương trình trở thành: $t = 1 + \sqrt{t^3 - 7} \Leftrightarrow \sqrt{t^3 - 7} = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 \geq 0 \\ t^3 - 7 = t^2 - 2t + 1 \end{cases}$

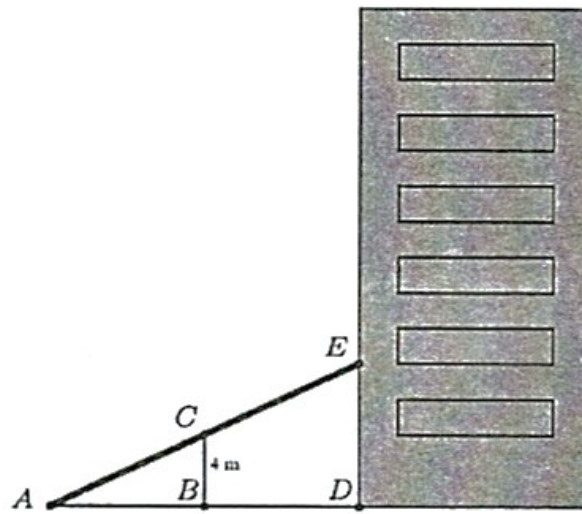
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t^3 - t^2 + 2t - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ (t-2)(t^2+t+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

Với $t = 2$ thì $2^3 - 7 = x \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{1\}$.

Câu 12: Người ta làm ra một cái thang bắc lên tầng hai của một ngôi nhà (hình vẽ), muốn vậy họ cần làm một thanh đỡ BC có chiều dài bằng $4m$, đồng thời

muốn đảm bảo kỹ thuật thì tỉ số độ dài $\frac{CE}{BD} = \frac{5}{3}$. Hỏi vị trí A cách vị trí B bao nhiêu mét?



Trả lời: $3m$

Lời giải:

Đặt $AB = x > 0$. Xét tam giác ABC vuông tại B có: $AC = \sqrt{x^2 + 4}$.

Theo tính chất định lí Ta-lét, ta có: $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{x} = \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 16} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \geq 0 \\ 9(x^2 + 16) = 25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 16x^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy hai vị trí A, B cách nhau $3m$.

Câu 13: Tìm tập nghiệm phương trình sau: $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$;

Trả lời: $S = \{1\}$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{6x^2 - 12x + 7} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 6(x^2 - 2x) + 7 \Rightarrow \frac{t^2 - 7}{6} = x^2 - 2x$.

Với $t = 1$ thì $\frac{1^2 - 7}{6} = x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \{1\}$.

Câu 14: Tìm tập nghiệm phương trình sau: $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$.

Trả lời: $S = \{3\}$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x+1} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 1$.

Thay vào phương trình, ta có:

$$2\sqrt{(t^2 - 1) + 2 + 2t} - t = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2 + 2t + 1} - t = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{(t+1)^2} - t = 4 \\ \Leftrightarrow 2|t+1| - t = 4 \Leftrightarrow 2(t+1) - t = 4 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (n)}.$$

Với $t = 2$ thì $x = 2^2 - 1 = 3$. Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \{3\}$.

Câu 15: Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x - 12 + 2\sqrt{x^2 - 16}$;

Trả lời: $S = \{5\}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 4$. Đặt $t = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} \quad (t \geq 0)$

$$\Rightarrow t^2 = x+4 + x-4 + 2\sqrt{(x-4)(x+4)} = 2x + 2\sqrt{x^2 - 16}.$$

Phương trình trở thành: $t = t^2 - 12 \Leftrightarrow t^2 - t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \text{ (loại)} \\ t = 4 \text{ (nhận)} \end{cases}$

Với $t = 4$ thì $4^2 = 2x + 2\sqrt{x^2 - 16} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 16} = 8 - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ x^2 - 16 = 64 - 16x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \{5\}$.

Câu 16: Tìm tập nghiệm phương trình sau: $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$.

Trả lời: $S = \{-2\}$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[3]{3x-2} \Rightarrow t^3 = 3x-2 \Rightarrow \frac{t^3+2}{3} = x$.

Phương trình trở thành: $2t + 3\sqrt{6-5 \cdot \frac{t^3+2}{3}} - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{8-5t^3}{3}} = 8-2t \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2t \geq 0 \\ 9 \cdot \frac{8-5t^3}{3} = 64-32t+4t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 24-15t^3 = 64-32t+4t^2 \end{cases}$$

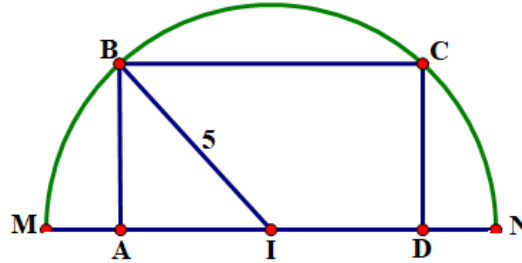
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 15t^3 + 4t^2 - 32t + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 15t^3 + 4t^2 - 32t + 40 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ (t+2)(15t^2 - 26t + 20) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow t = -2.$$

Với $t = -2$ thì $x = \frac{(-2)^3 + 2}{3} = -2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-2\}$.

Câu 17: Xét nửa đường tròn đường kính $MN = 10$. Xét điểm B (không trùng hai điểm M, N) di động trên nửa đường tròn và hình chiếu của B trên đoạn MN là điểm A , vẽ hình chữ nhật $ABCD$ với C cũng thuộc nửa đường tròn. Tìm độ dài IA biết rằng chu vi hình chữ nhật $ABCD$ bằng 22.



Trả lời: bằng 4 hoặc bằng $\frac{24}{5}$

Lời giải

Đặt $IA = x \in (0; 5) \Rightarrow AD = 2x$.

Xét tam giác IAB vuông tại A , ta có: $AB = \sqrt{5^2 - x^2}$.

Chu vi hình chữ nhật $ABCD$ là:

$$2AB + 2AD = 4x + 2\sqrt{5^2 - x^2} = 22 \Leftrightarrow \sqrt{25 - x^2} = 11 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 - 2x \geq 0 \\ 25 - x^2 = 121 - 44x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{11}{2} \\ 5x^2 - 44x + 96 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{11}{2} \\ x = 4 \vee x = \frac{24}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = \frac{24}{5}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai điểm I, A bằng 4 hoặc bằng $\frac{24}{5}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm $\sqrt{2x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 + mx + m - 1}$.

Trả lời: $m \in (-\infty; -1 - 2\sqrt{2}] \cup [-1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{2x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 + mx + m - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 1 = x^2 + mx + m - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + 1 \geq 0 \\ x^2 + (1 - m)x + 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

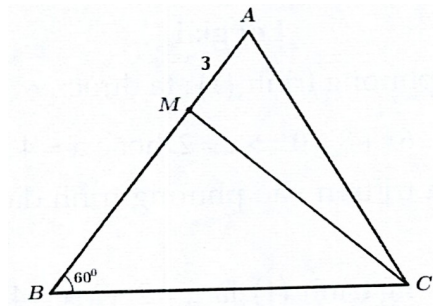
Để thấy $2x^2 + x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (1-m)^2 - 4(2-m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 7 \geq 0$

$$\Leftrightarrow m \geq -1 + 2\sqrt{2} \vee m \leq -1 - 2\sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $m \in (-\infty; -1 - 2\sqrt{2}] \cup [-1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 19: Cho tam giác ABC có cạnh $BC = 10$, góc ABC bằng 60° . Trên cạnh AB ta lấy điểm M sao cho $AM = 3$ (như hình vẽ).



Tính độ dài đoạn thẳng BM biết rằng $CM = \frac{8}{9}CA$ (đáp số gần đúng đến hàng phần trăm).

Trả lời: $BM \approx 25,59$ hoặc $BM \approx 6,99$.

Lời giải

Đặt $BM = x (x \geq 0)$.

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{AN^2 + NC^2 - 2AN \cdot NC \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{x^2 + 100 - 10x}$$

$$\begin{aligned} CM &= \sqrt{BM^2 + BC^2 - 2BM \cdot BC \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{(x+3)^2 + 100 - 10(x+3)} \\ &= \sqrt{x^2 - 4x + 79} \end{aligned}$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } AC = \frac{8}{9}BC \Rightarrow \sqrt{x^2 - 10x + 100} = \frac{8}{9}\sqrt{x^2 - 4x + 79}$$

$$\Rightarrow 81(x^2 - 10x + 100) = 64(x^2 - 4x + 79)$$

$$\Rightarrow 17x^2 - 554x + 3044 = 0 \Rightarrow x \approx 25,59 \text{ hoặc } x \approx 6,99.$$

Vậy $BM \approx 25,59$ hoặc $BM \approx 6,99$.

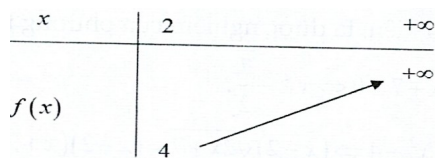
Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x - 2m} = x - 2$ có nghiệm.

Trả lời: $m \geq 2$

Lời giải

$$\sqrt{2x^2 - 2x - 2m} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 2x - 2m = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 2x - 4 = 2m(*) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x - 4, (x \geq 2)$



Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $x \geq 2 \Leftrightarrow 2m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 21: Cho phương trình $\sqrt{2x^2 - 2mx - 4} = x - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình đã cho có nghiệm.

Trả lời: $m \in [-1; +\infty)$

Lời giải

$$\sqrt{2x^2 - 2mx - 4} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 2mx - 4 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2(m - 1)x - 5 = 0(*) \end{cases}$$

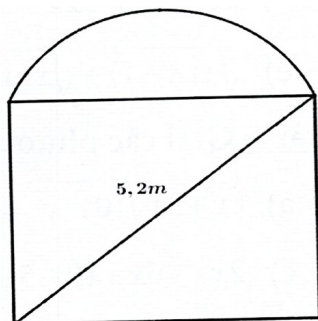
Do pt $(*)$ có $ac = -5 < 0$ nên pt $(*)$ luôn có 2 nghiệm trái dấu.

Nên để pt đã cho có nghiệm thì pt $(*)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 \leq x_2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -5 - 2(m - 1) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $m \in [-1; +\infty)$.

Câu 22: Ông An muốn làm cái cửa bằng nhôm có dạng nửa hình tròn ở phía trên và phía dưới có dạng hình chữ nhật như hình vẽ. Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và đường chéo của hình chữ nhật có độ dài 5,2 mét; diện tích của nửa hình tròn bằng $\frac{3}{10}$ diện tích của phần hình chữ nhật.



Tính số tiền ông An phải trả cho biết $1m^2$ cửa có giá 1300000 đồng (kết quả lấy gần đúng đến hàng phần mười).

Trả lời: 22230000 (đồng).

Lời giải

Gọi $x(m) (x > 0)$ là đường kính của nửa đường tròn.

Khi đó hình chữ nhật có hai kích thước là x và $\sqrt{5,2^2 - x^2}$.

Diện tích nửa hình tròn là $\frac{\pi x^2}{8}$ và diện tích hình chữ nhật là $x\sqrt{5,2^2 - x^2}$.

Theo giả thiết ta có: $\frac{\pi x^2}{8} = \frac{3}{10} x\sqrt{5,2^2 - x^2} \Leftrightarrow \frac{5}{12} \pi x = \sqrt{5,2^2 - x^2}$
 $\Leftrightarrow \frac{25}{144} \pi^2 x^2 = \frac{676}{25} - x^2 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{25}{144} \pi^2 + 1 \right) = \frac{676}{25} \Leftrightarrow x \approx 3,2(m)$.

Diện tích cánh cửa là: $\frac{\pi \cdot 3,2^2}{8} + 3,2\sqrt{5,2^2 - 3,2^2} \approx 17,1(m^2)$.

Do đó số tiền ông An phải trả là: $1300000 \cdot 17,1 = 22230000$ (đồng).

Câu 23: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt $\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + mx + m + 1}$.

Trả lời: $m < 3 - 2\sqrt{2}$ hoặc $m > 3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

$$\text{pt} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 \geq 0 \\ x^2 + x + 1 = 2x^2 + mx + m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 \geq 0 \\ x^2 + (m-1)x + m = 0 \end{cases} (*)$$

Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow (m-1)^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < 3 - 2\sqrt{2}$ hoặc $m > 3 + 2\sqrt{2}$.

Câu 24: Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm phân biệt.

Trả lời: $m \geq \frac{9}{2}$

Lời giải

$$Pt \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2 + (4-m)x - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng $-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = 3x^2 + (4-m)x - 1$ trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Xét hàm số $y = 3x^2 + (4-m)x - 1$ trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{m-4}{6}$

+ TH1: Nếu $\frac{m-4}{6} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m \leq 1$ thì hàm số đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ nên $m \leq 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH2: Nếu $\frac{m-4}{6} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m > 1$:

Ta có bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{m-4}{6}$	$+\infty$
y	$y\left(-\frac{1}{2}\right)$	$y\left(\frac{m-4}{6}\right)$	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y = 3x^2 + (4-m)x - 1$ trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow y\left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0 > y\left(\frac{m-4}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{2m-9}{4} \geq 0 > \frac{1}{12}(-m^2 + 8m - 28)$ (1)

Vì $-m^2 + 8m - 28 = -(m-4)^2 - 12 < 0, \forall m$ nên (1) $\Leftrightarrow 2m-9 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}$ (thỏa mãn $m > 1$)

Vậy $m \geq \frac{9}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 25: Tìm điều kiện của m để phương trình $\sqrt{x^2 + 2x - m} = 2x - 1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

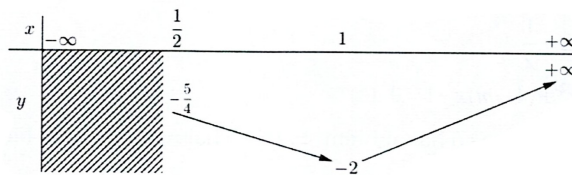
Trả lời: $\frac{5}{4} \leq m < 2$

Lời giải

$$\sqrt{x^2 + 2x - m} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x - m = (2x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 6x + 1 = -m(*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $-2 < -m \leq -\frac{5}{4}$
 $\Leftrightarrow \frac{5}{4} \leq m < 2$.

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình: $\sqrt{2x^2 + mx + 5} - x = 3$ có đúng một nghiệm.

Trả lời: $m > \frac{23}{3}$

Lời giải

Ta có $\sqrt{2x^2 + mx + 5} - x = 3 \quad (1) \quad \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx + 5} = x + 3$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 2x^2 + mx + 5 = (x + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + (m - 6)x - 4 = 0 \end{cases}$

Vì phương trình (2) có $a.c = -4 < 0$ nên luôn có hai nghiệm $x_1 < 0 < x_2$.

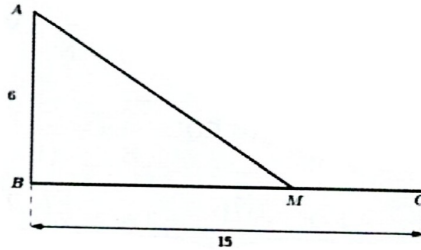
Vì $x_2 \geq -3$ nên x_2 là một nghiệm của (1). Do đó để (1) có nghiệm duy nhất thì

$$x_1 < -3 \Leftrightarrow \frac{-m + 6 - \sqrt{\Delta}}{2} < -3 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} > 12 - m$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 12m + 52} > 12 - m \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - m < 0 \\ \begin{cases} 12 - m \geq 0 \\ m^2 - 12m + 52 > (12 - m)^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 12 \\ \begin{cases} m \leq 12 \\ m > \frac{23}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{23}{3}.$$

Câu 27: Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng cách $AB = 6\text{ km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 15 km .

Để nhận lương thực và các nhu yếu phẩm mỗi tháng người canh hải đăng phải đi xuống máy từ A đến bến tàu M trên bờ biển với vận tốc 10 km/h rồi đi xe gắn máy đến C với vận tốc 30 km/h (xem hình vẽ).



Tính tổng quãng đường người đó phải đi biết rằng thời gian đi từ A đến C là $1\text{ h } 14$ phút.

Trả lời: $17(\text{km})$

Lời giải

Ta có $1\text{ h } 14$ phút $= \frac{37}{30}(\text{h})$. Gọi $AM = x(\text{km})(x > 6)$ Suy ra thời gian đi từ A đến M là $\frac{x}{10}(\text{h})$. Khi đó $BM = \sqrt{x^2 - 36}$ và $CM = 15 - \sqrt{x^2 - 36}$.

Thời gian đi từ M đến C là $\frac{15 - \sqrt{x^2 - 36}}{30}$.

Theo giả thiết ta có phương trình: $\frac{x}{10} + \frac{15 - \sqrt{x^2 - 36}}{30} = \frac{37}{30}$.

Giải phương trình ta được $x = 10(\text{km})$

Do đó tổng quãng đường phải đi là $AM + MC = 10 + (15 - \sqrt{10^2 - 36}) = 17(\text{km})$