

CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP CỦA ĐỀ THI QUỐC GIA

VMO 2001 - Bảng B:

Bài 6: Cho bảng ô vuông kích thước 2000×2001 (hàng $\times$ cột). Hãy tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho ta có thể tô màu k ô vuông con của bảng thỏa mãn điều kiện: hai ô vuông con nào được tô màu cũng không có đỉnh chung.

 (Lời giải chính thức)

Qui ước: Thứ tự của các hàng được tính từ trên xuống dưới và thứ tự của các cột được tính từ trái qua phải.

Kí hiệu $(i; j)$ là ô vuông nằm ở giao của hàng thứ i và cột thứ j . Kí hiệu $k(T)$ là số ô được tô màu ở cách tô màu T .

Xét một cách tô màu T thỏa đk đề bài. Dễ thấy nếu ô $(i; j)$ được tô màu ($1 \leq i \leq 1999$) thì ô $(i+1; j)$ và các ô kề với nó trong cùng hàng đều không được tô màu. Điều này cho phép ta thực hiện phép biến đổi sau đối với T : Xóa màu ở tất cả các ô $(i; j)$ mà $i \equiv 1 \pmod{2}$ và đồng thời tô màu các ô $(i+1; j)$

Rõ ràng sau khi thực hiện phép biến đổi nói trên đối với T , ta sẽ được 1 cách tô màu T' thỏa mãn đk đề bài và:

$$+ k(T') = k(T)$$

+ Tất cả các ô nằm ở các hàng thứ $2i-1$; $i = 1, 2, 3, \dots, 1001$, đều không có màu.

Từ đk của đề suy ra số ô được tô màu trong một hàng không vượt quá 1001. Do đó: $k(T') \leq 1001 \cdot 10^3$.

Vì vậy: $k(T) \leq 1001 \cdot 10^3$, với mọi cách tô màu T thỏa mãn đk đề bài.

Xét cách tô màu sau: Tô màu tất cả các ô $(2i; 2j-1)$, với $i = 1, 2, \dots, 1001$; $j = 1, 2, \dots, 1001$.

Dễ thấy, cách tô màu vừa nêu thỏa đk đề bài và có số ô được tô màu bằng $1001 \cdot 10^3$.

Vậy, số nguyên dương k lớn nhất cần tìm là: $k = 1001 \cdot 10^3$.

VMO 2001 - Bảng A:

Bài 6: Cho số nguyên $n \geq 1$. Xét hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$ của $2n$ số nguyên dương đầu tiên sao cho các số $|a_{i+1} - a_i|$, $i = 1, 2, \dots, 2n-1$, đôi một khác nhau. **CMR:** $a_1 - a_{2n} = n \Leftrightarrow 1 \leq a_{2k} \leq n, \forall k = 1, 2, \dots, n$

 (Lời giải chính thức)

a/ Điều kiện đủ:

Vì $1 \leq a_{2k} \leq n, \forall k = 1, 2, \dots, n$ nên:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{2n-1} |a_{i+1} - a_i| = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = 2(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) - 2(a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) + a_{2n} - a_1 \\ &= 2[(n+1) + (n+2) + \dots + 2n] - 2(1 + 2 + \dots + n) + a_{2n} - a_1 = 2n^2 + a_{2n} - a_1 \quad (10) \end{aligned}$$

Mặt khác, dễ thấy $1 \leq |a_{i+1} - a_i| \leq 2n-1, \forall i = 1, 2, \dots, 2n-1$

$$\text{và do: } |a_{i+1} - a_i| \text{ đôi một khác nhau nên: } T = 1 + 2 + \dots + (2n-1) = 2n^2 - n \quad (11)$$

Từ (10) và (11) ta được: $a_1 - a_{2n} = n$ (đpcm)

b/ Điều kiện cần:

$$\text{Từ các giả thiết ta có: } T_0 = \sum_{i=1}^{2n-1} |a_{i+1} - a_i| + a_1 - a_{2n} = n(2n-1) + n = 2n^2 \quad (12)$$

Mặt khác, sau khi khai triển dấu giá trị tuyệt đối ở các số hạng của T_0 ta có thể viết T_0 dưới dạng:

$$T_0 = \sum_{i=1}^{2n} \delta_i a_i, \text{ trong đó } \delta_i \in \{-2; 0; 2\}, \forall i = 1, 2, \dots, 2n$$

Dễ thấy dãy: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2n}$ có các tính chất:

i/ $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{2n} = 0$

ii/ Nếu trong dãy $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2n}$ ta xóa đi tất cả các số 0 và đồng thời giữ nguyên vị trí của các số khác 0 thì sẽ nhận được 1 dãy mà ở đó các số -2 và 2 xen kẽ nhau.

Kí hiệu $b_1, b_2, \dots, b_n$ (tương ứng $t_1, t_2, \dots, t_n$) lần lượt, theo thứ tự xuất hiện trong hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$, là các số không vượt quá n (tương ứng, vượt quá n) trong hoán vị ấy.

Từ i/ ta được: $T_0 = \sum_{i=1}^{2n} \delta_i(a_i - n) \leq 2 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - n) - 2 \cdot \sum_{i=1}^n (b_i - n) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n t_i - 2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i = 2n^2 = T_0$ (theo (12))

Từ đó suy ra ta phải có $\delta_i = 2$ với mọi i mà $a_i > n$ và đồng thời $\delta_i = -2$ với mọi i mà $a_i \leq n$ (*)

Do $a_1 - a_{2n} = n$ nên $a_{2n} \leq n$. Suy ra $\delta_{2n} = -2$.

Vì thế, theo ii/ ta có $\delta_{2k} = -2, \forall k = 1, 2, \dots, n$.

Do vậy, theo (*), ta phải có: $1 \leq a_{2k} \leq n, \forall k = 1, 2, \dots, n$. (Đpcm)

VMO 2002: (Bảng B) (THTT - Tháng 10, 2002, tr10)

Bài 3: Cho tập S gồm tất cả các số nguyên trong đoạn $[1; 2002]$. Gọi T là tập hợp gồm tất cả các tập con không rỗng của S. Với mỗi tập hợp X thuộc T, kí hiệu $m(X)$ là trung bình cộng của tất cả các số thuộc X. Đặt $m = \frac{\sum m(X)}{|T|}$ ở đây tổng lấy theo tất cả các tập hợp X thuộc T. Hãy tính giá trị của m.



Với mỗi $k \in \{1, 2, \dots, 2002\}$, đặt $m_k = \sum m(X)$ ở đây tổng lấy theo tất cả các tập hợp X thuộc T mà $|X| = k$.

Xét số a bất kì thuộc tập S. Dễ thấy: a có mặt trong C_{2001}^{k-1} tập X thuộc T mà $|X| = k$. Suy ra:

$k \cdot m_k = (1 + 2 + \dots + 2002) C_{2001}^{k-1} = 1001 \cdot 2003 \cdot C_{2001}^{k-1}$. Do đó:

$$\sum m(X) = \sum_{k=1}^{2002} m_k = 1001 \cdot 2003 \cdot \sum_{k=1}^{2002} \frac{C_{2001}^{k-1}}{k} = \left(\frac{2003}{2} \right) \cdot \sum_{k=1}^{2002} C_{2002}^k = \frac{2003(2^{2002} - 1)}{2}$$

Dễ thấy: $|T| = 2^{2002} - 1$. Vì vậy: $m = \left(\frac{\sum m(X)}{|T|} \right) = \frac{2003}{2}$

Bài 3: Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn đk: $C_{2n}^n = (2n)^k$, trong k là số các ước nguyên tố của C_{2n}^n



Giả sử p là một ước nguyên tố của C_{2n}^n . Gọi m là số mũ của p trong phân tích chuẩn của C_{2n}^n . Ta sẽ chứng minh $p^m \leq 2n$

Giả sử ngược lại, $p^m > 2n$. Khi đó $\left[\frac{2n}{p^m} \right] = 0$. Suy ra:

$$m = \left(\left[\frac{2n}{p} \right] - 2 \cdot \left[\frac{n}{p} \right] \right) + \left(\left[\frac{2n}{p^2} \right] - 2 \cdot \left[\frac{n}{p^2} \right] \right) + \dots + \left(\left[\frac{2n}{p^{m-1}} \right] - 2 \cdot \left[\frac{n}{p^{m-1}} \right] \right) \quad (*)$$

Với $x \in \mathbb{R}$ ta có: $2[x] + 2 > 2x \geq [2x] \Rightarrow [2x] - 2[x] \leq 1$.

Do đó, từ (*) suy ra $m \leq m - 1$. Mâu thuẫn. Suy ra đpcm.

Từ kết quả vừa chứng minh ở trên ta được $C_{2n}^n = (2n)^k \Leftrightarrow k = 1$ và $C_{2n}^n = 2n \Leftrightarrow n = 1$

VMO 2002: (Bảng A) (THTT - Tháng 11/2002, tr6)

Cho các số nguyên dương m, n với $m < 2001, n < 2002$. Cho 2001×2002 số thực đôi một khác nhau. Điền các số đã cho vào các ô vuông con của bảng ô vuông kích thước 2001×2002 (2001 hàng; 2002 cột) sao cho mỗi số được điền vào 1 ô và mỗi ô được điền 1 số. Ta gọi 1 ô vuông con của bảng là ô "xấu" nếu số nằm trong ô đó bé hơn ít nhất m số nằm cùng cột với nó và đồng thời bé hơn ít nhất n số nằm cùng hàng với nó. Với mỗi cách điền số nói trên gọi s là số ô "xấu" của bảng số nhận được. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của s ?



Ta sẽ giải bài toán tổng quát của bài, thay 2001 bởi p và 2002 bởi q .

Bằng pp quy nạp theo $p+q$, ta sẽ chứng minh: $s \geq (p-m)(q-n)$ (*)

Dễ dàng kiểm tra được tính đúng của (*) đối với bảng $p \times q$ mà $p+q = 2, 3, 4$.

Giả sử (*) đúng với bảng $p \times q$ mà $p+q = k$.

Xét bảng $p \times q$ mà $p+q = k+1$. Dễ thấy: (*) đúng nếu $m = p$ hoặc $n = q$.

Xét Thợ: $m < p$ và $n < q$. Ta gọi 1 ô vuông con của bảng là ô "xấu theo hàng" ("xấu theo cột") nếu số nằm trong ô đó bé hơn ít nhất n số (tương ứng m số) nằm cùng hàng (tương ứng cùng cột) với nó. Mỗi hàng có $q-n$ số xấu theo hàng, mỗi cột có $p-m$ số xấu theo cột.

Nếu trong bảng $p \times q$, mỗi ô xấu theo hàng cũng đồng thời là ô xấu theo cột và ngược lại, thì $s = (p-m)(q-n)$, trong Thợ này ta có đpcm.

Giả sử, trong bảng $p \times q$ có các ô chỉ xấu theo hàng (không theo cột), hoặc chỉ xấu theo cột (không theo hàng). Gọi a là số nhỏ nhất trong tất cả các số nằm ở các ô như vậy. Không mất tổng quát, giả sử ô chứa a là ô xấu theo hàng. Khi đó, tất cả $(p-m)$ ô xấu theo cột của cột chứa a cũng đồng thời là $(p-m)$ ô xấu của bảng. Bỏ cột chứa a , ta sẽ nhận được bảng $p \times (q-1)$ mà một ô vuông con của bảng này là ô xấu thì nó là ô xấu của bảng $p \times q$. Vì $p+(q-1) = k$ nên theo giả thiết quy nạp ta có số ô xấu của bảng $p \times (q-1)$ không ít hơn $(p-m)(q-1-n)$. Do đó, số ô xấu của bảng $p \times q$ không ít hơn

$$(p-m)(q-1-n) + (p-m) = (p-m)(q-n).$$

Theo nguyên lý quy nạp, (*) được chứng minh.

Bây giờ ta sẽ chỉ ra 1 cách điền số vào bảng sao cho bảng số nhận được có số ô xấu bằng $(p-m)(q-n)$. Sắp xếp $p \times q$ số theo thứ tự tăng dần, rồi theo thứ tự đó, lần lượt điền các số vào các ô của bảng theo quy tắc từ trên xuống dưới, từ trái qua phải.

Dễ thấy, bảng số nhận được nhờ cách điền số vừa nêu có số ô xấu bằng $(p-m)(q-n)$.

$$\text{Vậy } s_{\min} = (p-m)(q-n).$$

Áp dụng kết quả bài toán trên vào bài đã ra ta có: $s_{\min} = (2001-m)(2002-n)$

VMO 2003: (Bảng B) (THTT - Tháng 1/2004/tr8)

Bài 3: Xét số nguyên $n > 1$. Người ta muốn tô màu tất cả các số tự nhiên bởi hai màu xanh, đỏ sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

i/ Mỗi số được tô bởi 1 màu, và mỗi màu đều được dùng để tô vô số số.

ii/ Tổng của n số đôi một khác nhau cùng màu là số có cùng màu đó

Hỏi có thể thực hiện được phép tô màu nói trên hay không, nếu:

1/ $n = 2002$?

2/ $n = 2003$?



1/ Xét $n = 2002$, ta sẽ CM rằng câu trả lời trong trường hợp này là "không"

Thật vậy, giả sử, ngược lại, ta có thể tô tất cả các số tự nhiên bằng 2 màu xanh, đỏ sao cho mỗi số được tô bởi 1 màu, mỗi màu đều được dùng để tô vô số số, và tổng của 2002 số đôi một khác nhau cùng

màu là số có cùng màu đỏ. Khi đó, do có vô số số được tô bởi màu xanh và có vô số số được tô bởi màu đỏ nên:

- + Tồn tại số a_1 mà a_1 được tô bởi màu xanh và số $b_1 = a_1 + 1$ được tô bởi màu đỏ.
- + Tồn tại số $b_2 > b_1$ mà b_2 được tô bởi màu đỏ và số $a_2 = b_2 + 1$ được tô bởi màu xanh.
- + Tồn tại số $a_3 > a_2$ mà a_3 được tô bởi màu xanh và số $b_3 = a_3 + 1$ được tô bởi màu đỏ.
- + Tồn tại số $b_4 > b_3$ mà b_4 được tô bởi màu đỏ và số $a_4 = b_4 + 1$ được tô bởi màu xanh.

...

- + Tồn tại số $a_{2001} > a_{2000}$ mà a_{2001} được tô bởi màu xanh và số $b_{2001} = a_{2001} + 1$ được tô bởi màu đỏ.
- + Tồn tại số $b_{2002} > b_{2001}$ mà b_{2002} được tô bởi màu đỏ và số $a_{2002} = b_{2002} + 1$ được tô bởi màu xanh.

Tóm lại, tồn tại 2002 số $a_1, a_2, \dots, a_{2001}, a_{2002}$ đôi một khác nhau và 2002 số $b_1, b_2, \dots, b_{2001}, b_{2002}$ đôi một khác nhau thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- (i) 2002 số $a_1, a_2, \dots, a_{2001}, a_{2002}$ được tô bởi màu xanh; và 2002 số $b_1, b_2, \dots, b_{2001}, b_{2002}$ được tô bởi màu đỏ
- (ii) $b_{2k-1} = a_{2k-1} + 1$ và $b_{2k} = a_{2k} - 1$ với mọi $k = 1, 2, \dots, 1001$

- Từ điều kiện (i) suy ra số $a = a_1 + a_2 + \dots + a_{2001} + a_{2002}$ được tô bởi màu xanh và số

$b = b_1 + b_2 + \dots + b_{2001} + b_{2002}$ được tô bởi màu đỏ.

- Từ điều kiện (ii) dễ dàng suy ra $a = b$. Do đó a và b phải được tô cùng màu, mâu thuẫn với điều vừa nhận được ở trên. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2/ Với $n = 2003$, xét cách tô màu sau: Tô tất cả các số chẵn bởi màu xanh và tô tất cả các số lẻ bởi màu đỏ. Dễ thấy cách tô vừa nêu thỏa mãn tất cả các yêu cầu bài toán. Vậy, trong trường hợp này, câu trả lời cho câu hỏi của bài ra là "có".

VMO 2003: (Bảng A) (THTT - Tháng 2/2004/tr4)

Bài 3: Với mỗi số nguyên $n > 1$, kí hiệu s_n là số các hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của n số nguyên dương đầu tiên, mà mỗi hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ đều có tính chất: $1 \leq |a_k - k| \leq 2$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$

CMR: $1,75 \cdot s_{n-1} < s_n < 2 \cdot s_{n-1}$



(Đáp án Chính thức)

Trước hết ta sẽ xây dựng một hệ thức truy hồi cho s_n

Với mỗi n tự nhiên khác 0, kí hiệu s_n là tập hợp tất cả các hoán vị $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn các đk đề bài.

Giả sử $n > 4$. Xét hoán vị $A = (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ bất kì thuộc s_{n+1} . Từ các giả thiết suy ra

$$a_{n-1} = n+1 \text{ hoặc } a_n = n+1$$

* **Trường hợp 1:** $a_{n-1} = n+1$, khi đó phải có $a_n = n-1$ hoặc $a_n = n-2$

- Nếu $a_n = n-1$ thì phải có $a_{n+1} = n$. Do đó trong TH này A có dạng:

$$A_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, n+1, n-1, n) \text{ với } (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) \in S_{n-2} \quad (4)$$

- Nếu $a_n = n-2$ thì phải có $a_{n+1} = n-1$ hoặc $a_{n+1} = n$.

+ Nếu $a_{n+1} = n-1$ thì phải có $a_{n-2} = n$. Do đó trong TH này A có dạng:

$$A_2 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, n, n+1, n-2, n-1) \text{ với } (a_1, a_2, \dots, a_{n-3}) \in S_{n-3} \quad (5)$$

+ Nếu $a_{n+1} = n$ thì A có dạng:

$$A_3 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, n+1, n-2, n) \text{ với } \{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n-2, n\} \quad (6)$$

* **Trường hợp 2:** $a_n = n+1$. Khi đó ta có $a_{n+1} = n$ hoặc $a_{n+1} = n-1$

- Nếu $a_{n+1} = n$ thì A có dạng: $A_4 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, n+1, n)$ với $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in S_{n-1}$ (7)

- Nếu $a_{n+1} = n-1$ thì A có dạng: $A_5 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, n+1, n-1)$ với $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n-1\}$ (8)

Từ (4) - (8) suy ra phép đặt tương ứng f:

$$f : A_1 \in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) \in S_{n-2};$$

$$f : A_2 \in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-3}) \in S_{n-3};$$

$$f : A_3 \in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, n, n-2) \in S_n;$$

$$f : A_4 \in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in S_{n-1};$$

$$f : A_5 \in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, n-1) \in S_n;$$

$$\text{xác lập một đơn ánh: } f : S_{n+1} \mapsto S_n \cup S_{n-1} \cup S_{n-2} \cup S_{n-3}$$

$$Dễ thấy: B \notin f(S_{n+1}) \Leftrightarrow B = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, n-2) \in S_n \text{ với } b_{n-1} \neq n$$

$$\Leftrightarrow B = (b_1, b_2, \dots, b_{n-4}, n-1, n, n-3, n-2) \in S_n \text{ với } (b_1, b_2, \dots, b_{n-4}) \in S_{n-4}$$

– Từ đó suy ra f là 1 song ánh từ S_{n+1} đến $(S_n \cup S_{n-1} \cup S_{n-2} \cup S_{n-3}) \setminus (S_{n-4} \times \{(n-1, n, n-3, n-2)\})$

$$\text{Vì thế } s_{n+1} = s_n + s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} - s_{n-4}, \forall n > 4 \quad (9)$$

$$\text{Suy ra: } s_{n+1} - s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} - s_{n-4}, \forall n > 4 \quad (10)$$

$$\text{Do đó: } s_{n+2} - s_{n+1} = s_n + s_{n-1} + s_{n-2} - s_{n-3}, \forall n > 4 \quad (11)$$

$$\text{– Lấy (11) – (10) vế theo vế, ta có: } s_{n+2} - 2.s_{n+1} = s_{n-4} - 2.s_{n-3}, \forall n > 4$$

$$\text{hay: } s_n - 2.s_{n-1} = s_{n-6} - 2.s_{n-5}, \forall n > 6 \quad (12)$$

$$\text{– Dễ CM: } s_{n-5} > s_{n-6}, \forall n > 6.$$

$$\text{Vì thế từ (12) ta có: } s_n < 2.s_{n-1}, \forall n > 6 \quad (13)$$

$$\text{Hơn nữa, từ (9) ta có: } s_n > s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3}, \forall n > 5 \quad (14)$$

Từ (13) và (14) suy ra $\forall n > 8$ ta có:

$$s_n > s_{n-1} + (s_{n-1} / 2) + (s_{n-2} / 2) > s_{n-1} + (s_{n-1} / 2) + (s_{n-1} / 4) = 1,75.s_{n-1}$$

Bằng cách đếm trực tiếp, ta được: $s_1 = 0; s_2 = 1; s_3 = 2; s_4 = 4$. Từ đó, dựa vào (9) ta tính được :

$s_5 = 6; s_6 = 13; s_7 = 24$ và $s_8 = 45$. Các kết quả này cho thấy $s_1 > 1,75.s_6$ và $s_8 > 1,75.s_7$. vì thế, ta có:

$$s_n > 1,75.s_{n-1}, \forall n > 6. \text{ Vậy tóm lại: } 1,75.s_{n-1} < s_n < 2.s_{n-1}, \forall n > 6$$

VMO 2004: (không có câu Tổ hợp trong cả 2 bảng)

VMO 2005: (Bảng A) (có câu hình học Tổ hợp tr 11 THPT tháng 10/2005)

VMO 2005: (Bảng B) (THPT - Tháng 12 /2005/tr11)

Bài 3: Tìm kết quả học tập ở một lớp học, người ta thấy:

Hơn 2/3 số hs đạt điểm giỏi ở môn Toán cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Vật lý;

Hơn 2/3 số hs đạt điểm giỏi ở môn Vật lý cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Văn;

Hơn 2/3 số hs đạt điểm giỏi ở môn Văn cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử;

Hơn 2/3 số hs đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Toán;

CMR trong lớp học nói trên có ít nhất một học sinh đạt điểm giỏi ở cả bốn môn Toán, Vật lý, Văn, Lịch sử.



Gọi T, L, V, S tương ứng là tập hợp các hs đạt điểm giỏi ở môn Toán, Lý, Văn, Sử

$$\text{Kí hiệu: } T_1 = T \cap L; L_1 = L \cap V; V_1 = V \cap S$$

$$\text{Theo giả thiết bài toán, ta có: } |T_1| > \frac{2}{3}|T|; |L_1| > \frac{2}{3}|L|; |V_1| > \frac{2}{3}|V|$$

$$\text{Theo yêu cầu của bài toán, ta cần chứng minh: } |T \cap L \cap V \cap S| > 0$$

Không mất tổng quát, giả sử T là tập có nhiều phần tử nhất

$$Ta\ có: |T_1 \cap L_1| = |T_1| + |L_1| - |T_1 \cup L_1| \quad (1)$$

Vì $T_1 \cup L_1 \subset L$ nên $|T_1 \cup L_1| \leq |L|$. Do đó, từ (1) ta được:

$$|T_1 \cap L_1| > \frac{2}{3}|T| + \frac{2}{3}|L| - |L| = \frac{2}{3}|T| - \frac{1}{3}|L| \geq \frac{1}{3}|T| \quad (do\ |T| \geq |L|) \quad (2)$$

$$- \text{ Lại có: } |T_1 \cap L_1 \cap V_1| = |T_1 \cap L_1| + |V_1| - |(T_1 \cap L_1) \cup V_1| \quad (3)$$

- Vì $L_1 \subset V$ nên $T_1 \cap L_1 \subset V$. Từ đây, với lưu ý rằng $V_1 \subset V$, suy ra: $(T_1 \cap L_1) \cup V_1 \subset V$.

Do đó: $|(T_1 \cap L_1) \cup V_1| \leq |V|$. Vì vậy, từ (2) và (3) ta được:

$$|T_1 \cap L_1 \cap V_1| > \frac{1}{3}|T| + \frac{2}{3}|V| - \frac{1}{3}|V| = \frac{1}{3}|T| - \frac{1}{3}|V| \geq 0 \quad (do\ |T| \geq |V|) \quad (4)$$

Hiển nhiên $T \cap L \cap V \cap S = T_1 \cap L_1 \cap V_1$

Vì thế từ (4) ta có đpcm.

VMO 2006: (Bảng B) (THTT - Tháng 11/2006/tr6)

Bài 3: Một đơn vị kiểm lâm muốn lập lịch đi tuần tra rừng cho cả năm 2006 với các yêu cầu sau:

i/ Số ngày đi tuần tra trong năm nhiều hơn 1 nửa tổng số ngày của năm

ii/ Không có 2 ngày đi tuần tra nào cách nhau đúng một tuần lễ

1/ CMR: có thể lập được lịch đi tuần tra rừng thỏa mãn các yêu cầu nêu trên, biết rằng năm 2006 có 365 ngày;

2/ Hỏi có thể lập được tất cả bao nhiêu lịch đi tuần tra rừng như vậy?



Đánh số ngày của năm 2006 bởi 1, 2, ..., 365. Xét lịch tuần tra sau: tuần tra vào những ngày m mà $m \equiv 0, 1, 2, \dots, 6 \pmod{14}$. Tổng số những ngày này là 183. Con số này vượt quá nửa tổng số ngày của năm, nên phương án tuần tra đó đáp ứng các yêu cầu của bài toán.

- Kí hiệu: $A_i = \{m \leq 365 : m \equiv i \pmod{7}\}$. Ta có $|A_1| = 53$, $|A_i| = 52$ cho mọi $i \neq 1$. Như vậy số ngày tuần

tra trong A_1 không quá 27, số ngày tuần tra trong A_i còn lại không quá 26, và tổng số ngày tuần tra không vượt quá $6 \cdot 26 + 27 = 183$. Vậy mỗi lịch tuần tra thỏa mãn yêu cầu đầu bài phải có 183 ngày.

- Bây giờ ta xác định các tập hợp 183 ngày thỏa mãn yêu cầu đầu bài. Số cách chọn các ngày trong A_1 được xác định duy nhất (chỉ gồm các ngày dạng $14k + 1$). Và với mỗi $i \neq 1$, có đúng 27 cách chọn 26 ngày trong A_i không thuộc vào 2 tuần liên tiếp nhau, đặc trưng bởi dãy: $(0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ (trong đó tại

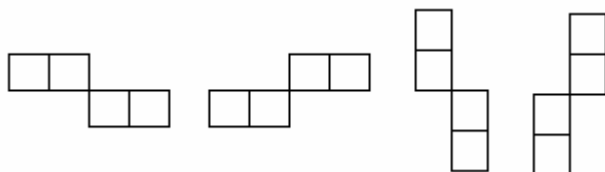
26

vị trí 0 là các ngày dạng $14k + i$ và tại vị trí 1 là các ngày dạng $14k + 7 + i$). Như vậy, có thể lập được tất cả 27^6 lịch tuần tra khác nhau thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

VMO 2006: (Bảng A) (THTT - Tháng 12/2006/tr9)

Bài 3: Cho m và n là các số nguyên lớn hơn 3 và bảng ô vuông kích thước $m \times n$ (m hàng và n cột)

Cho phép đặt bi vào các ô vuông con của bảng theo cách sau: mỗi lần, đặt 4 viên bi vào 4 ô vuông con (mỗi ô 1 viên) mà 4 ô đó tạo thành 1 trong các hình dưới đây:



Hỏi bằng cách trên ta có thể đặt bi vào các ô vuông con của bảng sau cho số bi trong mỗi ô vuông con đều bằng nhau hay không, nếu:

1/ $m = 2004$ và $n = 2006$?

2/ $m = 2005$ và $n = 2006$?



1/ Nhận thấy: bằng cách thực hiện 2 lần phép đặt bi, ta có thể đặt vào mỗi ô vuông con của bảng 4×2 một viên bi. Có thể phân chia bảng 2004×2006 thành các bảng 4×2 . Từ đó, bằng cách thực hiện 1 số hữu hạn lần phép đặt bi của đề bài ta có thể đặt bi vào tất cả các ô vuông con của bảng 2004×2006 sau cho số bi trong mỗi ô đều bằng nhau (bằng 1)

2/ Bằng phản chứng, ta chứng minh câu trả lời cho bài toán là "không". Thật vậy, giả sử ngược lại, sau 1 số hữu hạn lần thực hiện phép đặt bi của đề bài, ta đã đặt được vào mỗi ô vuông con của bảng 2005×2006 là k viên bi.

- Tô tất cả các ô vuông con thuộc các hàng lẻ của bảng bởi màu đen và coi các ô không được tô màu có màu trắng. Khi đó, số ô màu đen bằng 2.10032 và số ô màu trắng bằng 2006.1002 .

Ta thấy, ở mỗi lần đặt bi, ta đều đặt đúng 2 viên bi vào các ô màu đen và đúng 2 viên bi vào các ô màu trắng. Do đó, sau mỗi lần đặt bi, số bi trong các ô màu đen và số bi trong các ô màu trắng luôn bằng nhau.

Suy ra, khi ở mỗi ô có k viên bi, ta phải có $2.10032.k = 2006.1002.k$, hay $k = 0$. Điều vô lý này chứng tỏ giả sử ban đầu là sai, vì thế ta có điều muốn chứng minh.

Bài 6: Xét tập hợp số S có 2006 ptử. T gọi một tập con T của S là tập con "bướng bình" nếu với 2 số u và v tùy ý (u có thể bằng v) thuộc T luôn có $u + v$ không thuộc T . CMR:

1/ Nếu S là tập gồm 2006 số nguyên dương đầu tiên thì mỗi tập con "bướng bình" của S đều có không quá 1003 ptử

2/ Nếu S là tập gồm 2006 số nguyên dương tùy ý thì tồn tại 1 tập con "bướng bình" của S có 669 ptử.



1/ Xét A là tập con "bướng bình" có x phần tử $a_1 < a_2 < \dots < a_x$ của $S = \{1, 2, \dots, 2006\}$. Khi đó,

$B = \{a_2 - a_1; a_3 - a_1; \dots; a_x - a_1\}$ là tập con gồm $x-1$ ptử của tập S . Do A là tập con "bướng bình" cho nên $A \cap B = \emptyset \Rightarrow x + (x-1) \leq 2006 \Rightarrow x \leq 1003$

2/ Giả sử tập hợp đã cho là $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{2006}\}$. Gọi P là tích của tất cả các ước số lẻ của $\prod_{i=1}^{2006} a_i$. Dễ

thấy tồn tại số nguyên tố p có dạng $p=3r+2$ là ước của $3P+2$. Số nguyên tố p này nguyên tố cùng nhau với tất cả các số a_i đã cho. Với mỗi số $a \in S$, dãy $a, 2a, \dots, (p-1)a$ là một hoán vị của $1, 2, \dots, p-1$ theo mod p nên tồn tại tập hợp A_a gồm $r+1$ số nguyên $x \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ để $x.a$ theo mod p thuộc

$A = \{r+1, r+2, \dots, 2r+1\}$. Với mỗi $x \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, kí hiệu $S_x = \{a \in S : xa \in A\}$, ta có:

$|S_1| + |S_2| + \dots + |S_{p-1}| = \sum_{a \in S} |A_a| = 2006.(r+1)$. Do đó tồn tại x_0 sao cho: $|S_{x_0}| \geq \frac{2006.(r+1)}{3r+1} > 668$

Chọn B là tập con gồm 669 ptử của S_{x_0} , khi đó B là một tập con "bướng bình" của S .

Thật vậy, nếu chọn $u, v, w \in B$ (u có thể bằng v), thì $x_0 u, x_0 v, x_0 w \in A$.

Kiểm tra thấy $x_0 u + x_0 v \not\equiv x_0 w \pmod{p}$, cho nên $u + v \neq w$

VMO 2007: (THTT - Tháng 10/2007, trang 10)

Bài 4: Cho một đa giác đều 2007 đỉnh. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất thỏa mãn tính chất: Trong mỗi cách chọn k đỉnh của đa giác luôn tồn tại 4 đỉnh tạo thành một tứ giác lồi mà 3 trong số 4 cạnh của nó là 3 cạnh của đa giác đã cho.



(**Đáp án Chính thức**)

Gọi các đỉnh của đa giác đều đã cho là: $A_1, A_2, \dots, A_{2007}$.

Chú ý là tứ giác (tạo từ 4 trong số các đỉnh của đa giác) có 3 cạnh là 3 cạnh của đa giác khi và chỉ khi 4 đỉnh của tứ giác đó là 4 đỉnh liên tiếp của đa giác.

Gọi A là tập các đỉnh: $\{A_1, A_2, A_3, A_5, A_6, \dots, A_{2005}, A_{2006}\}$ (bỏ đi các đỉnh A_{4i} , $i = 1, \dots, 501$ và A_{2007})

Kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập A . Hiển nhiên $|A| = 1505$ và trong A không chứa 4 đỉnh liên tiếp nào của đa giác. Dễ thấy, mọi tập con của A đều không chứa 4 đỉnh liên tiếp của đa giác. Vậy $k \geq 1506$. Ta sẽ CM mọi cách chọn 1506 đỉnh tùy ý của đa giác thì sẽ tồn tại 4 đỉnh liên tiếp của đa giác trong 1506 đỉnh đó. Thật vậy, giả sử T là một tập gồm 1506 đỉnh tùy ý của đa giác. Phân hoạch tập các đỉnh của đa giác thành các tập hợp:

$$B_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}; B_2 = \{A_5, A_6, A_7, A_8\}; \dots; B_{501} = \{A_{2001}, A_{2002}, A_{2003}, A_{2004}\}; B_{502} = \{A_{2005}, A_{2006}, A_{2007}\}$$

Giả sử T không chứa 4 đỉnh liên tiếp của đa giác. Lúc đó với mỗi $i = 1 \dots 501$, tập B_i không thuộc T , tức là mỗi tập B_i đó sẽ có ít nhất một đỉnh không thuộc T . Khi đó $|T| \leq 3 \cdot 501 = 1503$.

Do $|T| = 1506$ nên $B_{502} \subset T$ và mỗi tập B_i ($i = 1, \dots, 501$) có đúng 3 phần tử thuộc T

Ta có: $A_{2005}, A_{2006}, A_{2007} \in T$ suy ra $A_1 \notin T$

$$\Rightarrow A_2, A_3, A_4 \in T \Rightarrow A_5 \notin T \Rightarrow A_6, A_7, A_8 \in T \dots \Rightarrow A_{2002}, A_{2003}, A_{2004} \in T$$

Khi đó 4 đỉnh liên tiếp $A_{2002}, A_{2003}, A_{2004}, A_{2005} \in T$. Mâu thuẫn.

Vậy $k = 1506$.

Lời bàn: Có thể giải ngắn gọn hơn bằng cách xét $2007 - 1506 = 501$ điểm còn lại chia đường tròn ngoại tiếp đa giác đều đã cho không quá 501 cung, và phải có một cung trong chúng chứa không ít

hơn $\frac{1506}{501} > 3$ đỉnh liên tiếp.

VMO 2008: (THTT - Tháng 1/2009, trang 5)

Bài 5: Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số gồm tối đa 2008 chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số 9?



(**Đáp án Chính thức**)

Giả sử X là tập tất cả các số TN thỏa đề

Theo đề, ta cần tìm $|X|$, ta kí hiệu:

$$A^* = \{a \in \mathbb{N} / a \text{ có không quá 2008 chữ số}\};$$

$$A = \{a \in A^* / a \equiv 0 \pmod{9}\};$$

$$A_k = \{a \in A / \text{trong các chữ số của } a, \text{ có đúng } k \text{ chữ số } 9\}; k = \overline{0, 2008}$$

Xét số a bất kì thuộc A^* ; giả sử a có m chữ số. Do khi viết thêm các chữ số 0 vào ngay trước 1 số TN ta không làm thay đổi số đó nên bằng cách viết thêm 2008 - m chữ số 0 vào ngay trước số a , ta có một biểu diễn của a , mà trong biểu diễn đó có đúng 2008 chữ số. Ta gọi biểu diễn như vậy là biểu diễn (*). Để kí hiệu biểu diễn (*) của a gồm 2008 chữ số, được kí hiệu lần lượt (từ trái qua phải) bởi

$a_1, a_2, \dots, a_{2008}$, ta viết $a_1 a_2 \dots a_{2008}$. Khi đó:

$A_k = \overline{\{a_1.a_2...a_{2008} / \text{trong các chữ số } a_1, a_2, ..., a_{2008} \text{ có đúng } k \text{ chữ số } 9 \text{ và } \sum_{i=1}^{2008} a_i \equiv 0 \pmod{9}\}}, k = 0, 2008$

Có thể giải tiếp bằng 1 trong 2 cách:

Cách 1: *Tacó:* $X = A \setminus (A_0 \cup A_1)$. Từ đó, vì $A_0, A_1 \subset A$ và $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ nên: $|X| = |A| - (|A_0| + |A_1|)$ (1)

Ta có các nhận xét:

Nhận xét 1.1: $|A_0| = 9^{2007}$

Chứng minh: Theo đn A_0 , dễ thấy: $\overline{a_1.a_2...a_{2008}} \in A_0 \Leftrightarrow a_i \in \{0; 1; 2; ...; 8\}, \forall i = 1, 2007$ và $a_{2008} = 9 - r$

Trong đó r là số nguyên thuộc đoạn $[1; 9]$ mà $r \equiv \sum_{i=1}^{2007} a_i \pmod{9}$. Suy ra, $|A_0|$ chính bằng số dãy 2007

chữ số có thể lập được từ các chữ số 0, 1, 2, ..., 8. Vì thế: $|A_0| = 9^{2007}$

Nhận xét 1.2: $|A_1| = 2008.9^{2006}$

Chứng minh: Dễ thấy, số (trong dạng biểu diễn (*)) thuộc A_1 có thể được tạo ra từ việc thực hiện liên tiếp hai bước sau:

* Bước 1: Từ 0, 1, ..., 8 lập dãy gồm 2007 chữ số thỏa tổng các chữ số trong dãy chia hết cho 9

* Bước 2: Với dãy lập được ở bước 1, ghi chữ số 9 vào ngay trước chữ số đầu tiên hoặc vào ngay sau chữ số cuối cùng hoặc vào giữa 2 chữ số liền nhau của dãy.

Lập luận tương tự phần chứng minh NX1.1. ta thấy có 9^{2006} cách thực hiện bước 1. Từ đó, do có 2008 cách thực 5 hiện bước 2 nên có 2008.9^{2006} phương án thực hiện liên tiếp 2 bước nêu trên. Mỗi phương án cho 1 số thuộc A_1 , hai phương án khác nhau cho hai số khác nhau. Vì thế: $|A_1| = 2008.9^{2006}$

* Từ các nhận xét trên và do: $|A| = 1 + \frac{10^{2008} - 1}{9}$ nên từ (1) ta được $|X| = \frac{10^{2008} - 2017.9^{2007} + 8}{9}$

Cách 1: Ta có: $X = \bigcup_{k=2}^{2008} A_k$, và vì $A_0, A_1, ..., A_{2008}$ đôi một rời nhau nên: $|X| = \sum_{k=2}^{2008} |A_k|$ (2)

Ta có nhận xét sau:

Nhận xét 2: $|A_{2008}| = 1$ và $|A_k| = 9^{2007-k} \cdot C_{2008}^k, \forall k = 0, 2007$

Chứng minh:

Hiển nhiên ta có $|A_{2008}| = 1$

Xét $k \in \{0, 1, 2, ..., 2007\}$

Dễ thấy, số (trong dạng (*)) thuộc A_k có thể được tạo ra từ việc thực hiện liên tiếp hai bước sau:

* Bước 1: Chọn k vị trí trong dãy gồm 2008 vị trí trống rồi điền vào mỗi vị trí 1 chữ số 9;

* Bước 2: Với $2008 - k$ vị trí trống còn lại, điền vào mỗi vị trí một chữ số khác 9 sao cho tổng các chữ số được điền (ở bước này) chia hết cho 9

Tương tự phần chứng minh Nhận xét 1.1 ở cách 1, ta CM được: có $9^{2008-k-1}$ cách thực hiện bước 2. Từ đó, do có C_{2008}^k cách thực hiện bước 1 nên có $9^{2008-k-1} \cdot C_{2008}^k$ phương án thực hiện liên tiếp hai bước nêu trên. Mỗi phương án cho ta 1 số thuộc A_k , hai phương án khác nhau cho ta jai số khác nhau.

Vì thế: $|A_k| = 9^{2007-k} \cdot C_{2008}^k, \forall k = 0, 2007$

Từ nhận xét trên và (2) ta được:

$$\begin{aligned} |X| &= 1 + \sum_{k=2}^{2007} 9^{2007-k} \cdot C_{2008}^k = 1 + \frac{1}{9} \left(\sum_{k=0}^{2008} 9^{2008-k} \cdot C_{2008}^k - \sum_{k=0}^1 9^{2008-k} \cdot C_{2008}^k - 1 \right) \\ &= 1 + \frac{1}{9} (10^{2008} - 9^{2008} - 2008.9^{2007} - 1) = \frac{10^{2008} - 2017.9^{2007} + 8}{9} \end{aligned}$$

Lời bàn: Dựa trên ý tưởng CM các NX1 và 2, có thể CM được kết quả tổng quát sau:

"Cho k và n là các số nguyên thỏa mãn $1 \leq k \leq n$. Gọi T là tập hợp tất cả các số tự nhiên chia hết cho 9 mà mỗi số gồm tối đa n chữ số và trong đó có ít nhất k chữ số 9. ta có $|T| = 1$, nếu $k = n$ và $|T| = 9^{n-k-1} \cdot C_n^k$, nếu $k < n$ ". Dựa vào kết quả trên, có thể tìm $|X|$ theo công thức: $|X| = \sum_{k=2}^{2008} |A_k|$

VMO 2009: (THTT - Tháng 2/2010, trang 30)

Bài 5. Cho số nguyên dương n . Kí hiệu T là tập hợp gồm $2n$ số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập con S của T có tính chất: trong S không tồn tại các số a, b mà $|a - b| \in \{1; n\}$?

(Lưu ý: Tập rỗng được coi là tập con có tính chất nêu trên)



(Đáp án Chính thức)

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, kí hiệu d_n là số cần tìm theo yêu cầu của đề bài. Xét bảng ô vuông kích thước $2 \times n$. Điền vào các ô vuông con của bảng, lần lượt từ trên xuống dưới, từ trái qua phải, các số từ 1 đến $2n$.

1	2	...	$n-1$	n
$n+1$	$n+2$	...	$2n-1$	$2n$

Gọi ô thứ n của hàng 1 và ô thứ 1 của hàng 2 là hai ô đặc biệt. Khi đó hai số $a, b \in T$ thỏa $|a - b| \in \{1; n\}$ khi và chỉ khi chúng nằm ở hai ô kế nhau hoặc ở 2 ô đặc biệt

Vì thế, d_n chính bằng số cách chọn 1 số ô của bảng (kể cả số ô được chọn bằng 0) mà ở mỗi cách không có 2 ô kế nhau hoặc 2 ô đặc biệt được chọn.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, kí hiệu

+ k_n là số cách chọn mà ở mỗi cách không có hai ô kế nhau được chọn

+ s_n là số cách chọn mà trong các ô được chọn ở mỗi cách có hai ô đặc biệt và không có hai ô kế nhau

Ta có: $d_n = k_n - s_n$

* **Tính k_n :**

Dễ thấy, tất cả các cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) bao gồm:

+ k_{n-1} cách chọn mà ở mỗi cách không có ô nào thuộc cột thứ 1 của bảng được chọn

+ $2 \cdot t_{n-1}$ cách chọn mà ở mỗi cách đều có ô thuộc cột thứ 1 của bảng được chọn; trong đó t_n là số cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết đơn $2 \times n$ (hình 2)

		...		
x		...		

H.2

Do đó: $k_n = k_{n-1} + 2 \cdot t_{n-1}$ (1)

Lại có, tất cả các cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết đơn $2 \times n$ bao gồm:

+ k_{n-1} cách chọn mà ở mỗi cách ô đánh dấu "x" không được chọn

+ t_{n-1} cách chọn mà ở mỗi cách ô đánh dấu "x" đều được chọn

Vì thế: $t_n = k_{n-1} + t_{n-1}$

Từ đó và (1) suy ra: $k_n = k_{n-1} + 2 \cdot (k_{n-2} + t_{n-2}) = 2k_{n-1} + k_{n-2}, \forall n \geq 3$ (2)

Bằng cách đếm trực tiếp, ta có $k_1 = 3$ và $k_2 = 7$ (3)

Hệ thức truy hồi (1) có PT đặc trưng: $x^2 - 2x - 1 = 0$

Suy ra: $k_n = C_1(1 + \sqrt{2})^n + C_2(1 - \sqrt{2})^n, \forall n \geq 1$ (4)

Theo (3), ta tìm được: $C_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ và $C_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

Vậy $k = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2}$

* Tính s_n :

Để thấy, $s_1 = 0, s_2 = s_3 = 1$ và với $n \geq 4$ ta có: $s_n = h_{n-2}$, trong đó h_n là số cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết kép $2 \times n$ (h.3)

Do $s_3 = 1$, đặt $h_1 = 1$. Bằng cách đếm trực tiếp, ta có $h_2 = 4$.

Xét $n \geq 3$: Để thấy, tất cả các cách chọn ô thỏa (*) từ bảng khuyết kép $2 \times n$ bao gồm:

- + k_{n-2} cách chọn mà ở mỗi cách cả 2 ô A và B đều không được chọn
- + $2.t_{n-2}$ cách chọn mà ở mỗi cách có đúng 1 trong 2 ô A, B được chọn;
- + h_{n-2} cách chọn mà ở mỗi cách cả 2 ô A và B cùng được chọn

$$\text{Do đó: } h_n = k_{n-2} + 2.t_{n-2} + h_{n-2} = k_{n-1} + h_{n-2}, \forall n \geq 3 \quad (6)$$

Từ (2) và (6) suy ra:

$$2.h_n - k_n = 2.h_{n-2} - k_{n-2}, \forall n \geq 3$$

$$\text{Dẫn tới: } 2.h_n - k_n = (-1)^n, \forall n \geq 1$$

$$\text{Vì thế: } s_n = h_{n-2} = \frac{k_{n-2} + (-1)^{n-2}}{2}, \forall n \geq 3$$

$$* \text{ Vậy: } d_1 = 3, d_2 = 6 \text{ và } d_n = \frac{2.k_n - k_{n-2} + (-1)^{n-3}}{2}, \forall n \geq 3$$

(k_n tính theo (5))



VMO 2010:

Bài 5. Cho bảng 3×3 và n là một số nguyên dương cho trước. Tìm số các cách tô màu không như nhau khi tô mỗi ô bởi 1 trong n màu. (Hai cách tô màu gọi là như nhau nếu 1 cách nhận được từ cách kia bởi 1 phép quay quanh tâm)

Giải. (Tham khảo từ các diễn đàn)

B1	A1	B2
A4	C	A2
B4	A3	B3

Ta đánh số các ô vuông như hình vẽ. Ta nhận thấy chỉ có 3 phép quay biến hình vuông thành hình vuông là các phép quay các góc 90° , 180° và 270° theo chiều kim đồng hồ (phép quay 360° giữ nguyên hình vuông).

Qua các phép quay nói trên thì C luôn không đổi.

Với phép quay 90° thì $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_1$ và $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_1$.

Tương tự với phép quay 270° thì $A_1 \rightarrow A_4 \rightarrow A_3 \rightarrow A_2 \rightarrow A_1$ và $B_1 \rightarrow B_4 \rightarrow B_3 \rightarrow B_2 \rightarrow B_1$.

Do đó các phép quay này sẽ tạo ra một phép tô giống như cũ khi và chỉ khi các ô A được tô cùng màu và các ô B được tô cùng màu.

Với phép quay 180° thì $A_1 \leftrightarrow A_3, A_2 \leftrightarrow A_4, B_1 \leftrightarrow B_3, B_2 \leftrightarrow B_4$ do đó phép quay này tạo ra một phép tô giống như cũ khi và chỉ khi các cặp ô $(A_1, A_3), (A_2, A_4), (B_1, B_3), (B_2, B_4)$ được tô cùng màu.

Bây giờ ta bắt đầu **đếm số cách tô**. Có n cách tô màu ô C. Trong số các cách tô màu 8 ô xung quanh, ta chia làm 3 loại.

Loại 1. Gồm các cách tô mà các ô A được tô cùng màu và các ô B được tô cùng màu. Có n cách chọn màu để tô các ô A và n cách chọn màu để tô các ô B. Suy ra có n^2 cách tô loại 1. Với loại này thì các phép quay nói trên không tạo ra cách tô mới nên số các cách tô loại 1 không thu được từ nhau qua các phép quay là n^2 .

Loại 2. Gồm các cách tô mà các cặp ô $(A_1, A_3), (A_2, A_4), (B_1, B_3), (B_2, B_4)$ được tô cùng màu nhưng các cách tô này không thuộc loại 1. Dễ thấy Có $n^4 - n^2$ cách tô như vậy (chưa kể đến sự trùng nhau qua phép quay). Với loại này thì phép quay các góc 90° và 270° sẽ tạo ra các cách tô mới (sẽ phải loại đi bớt) nhưng hai cách tô này trùng nhau. Như vậy có $\frac{n^4 - n^2}{2}$ số cách tô loại 2 không thu được từ nhau qua phép quay.

Loại 3. Gồm các cách tô mà ít nhất 2 ô trong 4 cặp nói trên được tô khác màu. Dễ thấy có $n^8 - n^4$ cách tô như vậy. Tuy nhiên, mỗi một cách tô sẽ tương ứng thêm với 3 cách tô khác thu được qua phép quay $90^\circ, 180^\circ$ và 270° . Như vậy số cách tô loại 3 không thu được từ nhau qua phép quay là $\frac{n^8 - n^4}{4}$.

Như vậy, số cách tô cần tìm là:
$$N = n \left(n^2 + \frac{n^4 - n^2}{2} + \frac{n^8 - n^4}{4} \right) = \frac{n^9 + n^5 + 2n^3}{4}.$$

Nhận xét. Bài này có thời gian và bình tĩnh thì không khó. Tuy nhiên trong áp lực phòng thi thì phải rất bản lĩnh mới dám làm. Và đây cũng thuộc dạng bài dễ sai đáp số.

Về dạng bài tương tự thì có một số bài sau (*tuy nhiên dễ hơn bài VMO của mình khá nhiều*).

(AIME 1996) Hai ô của hình vuông 7×7 được tô bằng màu vàng. Các ô còn lại được tô bằng màu đỏ. Hai cách tô được coi là tương đương nhau nếu chúng có thể thu được từ nhau bằng một phép quay trên mặt phẳng của hình vuông. Đếm số các cách tô màu không tương đương.

(Kvant, trong bài báo viết về định lý nhỏ Fermat của Senderov và Spivak). Đường tròn được chia thành p cung bằng nhau, trong đó p là số nguyên tố. Hỏi có bao nhiêu cách tô các cung bằng a màu. Hai cách tô được coi là giống nhau nếu có thể thu được từ nhau bằng một phép quay.

Đáp số bài AIME là $\frac{C_{49}^2 - 24}{4} + \frac{24}{2} = 300$ (bạn có thấy có nét giống?).

Đáp số bài Kvant là $\frac{a^p - a}{p} + a$. Chú ý từ kết quả này ta suy ra định lý nhỏ Fermat.