|  |  |
| --- | --- |
| UBND TỈNH HÀ NAM**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO****ĐỀ CHÍNH THỨC***(Đề thi gồm 01 trang)* | **KỲ THI CHỌNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH****NĂM HỌC 2022-2023****Môn: Toán***Thời giam làm bài: 150 phút* |

**Câu I: (3,0 điểm)** Cho biểu thức

$$P=\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}+\frac{a^{2}-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} với a>0;a\ne 1$$

**a)** Rút gọn biểu thức *P*.

**b)** Tìm điều kiện của *a* để biểu thức $Q=\frac{8}{P}$ nhận giá trị nguyên.

**Câu II: (4,0 điểm)**

**1.** Giải phương trình $x^{2}-3\sqrt{x^{3}-3x^{2}+4x-2}=0$.

**2.** Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x^{2}-y^{2}+4x-6y-5=0\\\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y}+2x^{2}+x=26\end{array}\right.$

**Câu III: (2,0 điểm)** Cho parabol $\left(P\right):y=\frac{1}{2}x^{2}$ và hai điểm $A(-2;2)$, $B(4;8)$ nằm trên $(P)$. Gọi *M* là điểm thay đổi trên *(P)* và có hoành độ là $m(-2<m<4)$. Tìm  *m* để tam giác *ABM* có diện tích lớn nhất.

**Câu IV: (2,0 điểm)** Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\left(x-2y\right)\left(x+2y\right)+4y=x+x^{3}.$$

**Câu V: (7,0 điểm)**

**1.** Cho đường tròn *(O; R)* đường kính *AB*. Gọi *C* là điểm thoả mãn tam giác *ABC* nhọn. Các đường thẳng *CA, CB* cắt đường tròn *(O)* tại điểm thức hai tương ứng là *D, E*. Trên cung *AB* của *(O)* không chứa *D* lấy điểm *F* ($0<FA\leq FB)$. Đường thẳng *CF* cắt *AB* tại *M*, cắt đường tròn *(O*) tại *N (N* không trùng với *F*) và cắt đường tròn *(O’)* ngoại tiếp tam giác *CDE* tại *P* (*P* không trùng với *C)*.

**a)** Giả sử $\hat{ACB}=60^{°}, $tính *DE* theo *R.*

**b)** Chứng minh $CN.CF=CP.CM$.

**c)** Gọi *I, H* theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng *BD, AB*. Các đường thẳng *IH* và *CD* cắt nhau tại *K*. Tìm vị trí của điểm *F* để biểu thức $\frac{AB}{FH}+\frac{BD}{FI}+\frac{AD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**2.** Cho góc nhọn *xOy* cố định và *A* là điểm cố định trên *Ox*. Đường tròn *(I)* thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với *Ox, Oy* lần lượt tại *E, D*. Gọi *AF* là tiếp tuyến thứ hai kẻ từ *A* đến *(I)* (*F* là tiếp điểm). Chứng minh *DF* luôn đi qua 1 điểm cố định.

**Câu VI: (2,0 điểm)**

Cho 2 số dương *a, b*. Chứng minh $\frac{\left(a+b-1\right)^{2}}{\left(a+b\right)^{2}+1}+\frac{\left(a-b+1\right)^{2}}{\left(a+1\right)^{2}+b^{2}}+\frac{\left(b-a+1\right)^{2}}{\left(b+1\right)^{2}+a^{2}}\geq \frac{3}{5}$.

**---Hết---**

|  |  |
| --- | --- |
| UBND TỈNH HÀ NAM**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO****ĐỀ CHÍNH THỨC** | **KỲ THI CHỌNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH****NĂM HỌC 2022-2023****Môn: Toán***Thời giam làm bài: 150 phút* |

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

*(Hướng dẫn chấm gồm 06 trang)*

**I. HƯỚNG DẪN CHUNG**

* *Hướng dẫn chấm chỉ trình bày sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điẻm theo thang điểm tương ứng.*
* *Đối với bài toán hình học, nếu học sinh chứng minh có sử dụng đến hình vẽ thì yêu cầu phải vẽ hình, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.*
* *Điểm toàn bài không làm tròn.*

**II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM**

**Câu I: (3,0 điểm)** Cho biểu thức

$$P=\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}+\frac{a^{2}-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} với a>0;a\ne 1$$

a) Rút gọn biểu thức *P*

$$P=\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{\left(\sqrt{a}\right)^{3}-1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}+\frac{\left(1-a\right)\left(-1-a+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{a}\left(1-a\right)}$$

$$=\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{a+\sqrt{a}+1 }{\sqrt{a}}+\frac{-1-a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

$$=\frac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$$

b) Tìm điều kiện của *a* để biểu thức $Q=\frac{8}{P}$ nhận giá trị nguyên.

Có $P=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}+2\geq 2\sqrt{\sqrt{a}.\frac{1}{\sqrt{a} }}+2=4$ (Theo BĐT Côsi)

$$P=4⇔\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a}}⇔a=1 (loại do a\ne 1)$$

Vậy $P>4∀a>0, a\ne 1.$

$$⇒0<\frac{8}{P}<2⇒0<Q<2$$

Do đó đề $Q\in Z⇔Q=1 ⇔P=8⇔\left(\sqrt{a}\right)^{2}-6\sqrt{a}+1=0$

$$⇔\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{\sqrt{a}=3-2\sqrt{2}}{\sqrt{a}=3+2\sqrt{2}}⇔\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{a=17-12\sqrt{2}}{a=17+12\sqrt{2}} \left(thoả mãn điều kiện\right)\right.\right.$$

Vậy $a=17\pm 12\sqrt{2}$ là các giá trị cần tìm.

**Câu II: (4,0 điểm**)

1. Giải phương trình $x^{2}-3\sqrt{x^{3}-3x^{2}+4x-2}=0$.

Điều kiện $x^{3}-3x^{2}+4x-2\geq 0$

Có $x^{3}-3x^{2}+4x-2=(x-1)(x^{2}-2x+2)$

Nên $x^{3}-3x^{2}+4x-2\geq 0⇔x\geq 1 vì x^{2}-2x+2=\left(x-1\right)^{2}+1>0∀x$

$$\left(1\right)⇔2\left(x-1\right)+\left(x^{2}-2x+2\right)-3\sqrt{\left(x-1\right)\left(x^{2}-2x+2\right)}=0$$

$$⇔2.\frac{x-1}{x^{2}-2x+2}-3.\sqrt{\frac{x-1}{x^{2}-2x+2}}+1=0$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x-1}{x^{2}-2x+2}}, t\geq 0$ ta được phương trình $2t^{2}-3t+1=0⇔\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{t=1}{t=\frac{1}{2}}\right.$

$$t=1⇔\sqrt{\frac{x-1}{x^{2}-2x+2 }}=1⇔\frac{x-1}{x^{2}-2x+2}=1⇔x^{2}-3x+3=0 (vô nghiệm)$$

$$t=\frac{1}{2}⇔\sqrt{\frac{x-1}{x^{2}-2x+2}}=\frac{1}{2}⇔\frac{x-1}{x^{2}-2x+2}=\frac{1}{4}$$

$⇔x^{2}-6x+6=0⇔x=3\pm \sqrt{3}$ (thoả mãn điều kiện)

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=3\pm \sqrt{3}$

2. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x^{2}-y^{2}+4x-6y-5=0 \left(1\right)\\\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y}+2x^{2}+x=26 \left(2\right)\end{array}\right.$

Điều kiện $\left\{\begin{array}{c}x\geq -\frac{3}{2}\\y\geq 0\end{array} \right.$

$$\left(1\right)⇔\left(x+2\right)^{2}=\left(y+3\right)^{2}⇔\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x+2=y+3}{x+2=-y-3}\right.$$

+) $x+2=-y-3⇔\left(x+5\right)+y=0 $vô nghiệm

Vì $\left(x+5\right)+y>0∀x\geq -\frac{3}{2}, y\geq 0$

+) $x+2=y+3⇔y=x-1 $thay vào (2) ta được

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{2(x-1)}+2x^{2}+x=26$$

$$⇔\left(\sqrt{2x+3}-3\right)+\left(\sqrt{2x-2}-2\right)+2x^{2}+x-21=0$$

$$⇔\frac{2x+3-9}{\sqrt{2x+3}-3}+\frac{2x-2-2}{\sqrt{2x-2}+2}+\left(x-3\right)\left(2x+7\right)=0$$

$$⇔\left(x-3\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{2x-2}+2}+2x+7\right)=0$$

$$⇔x=3, do \left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{2x-2}+2}+2x+7\right)>0∀x\geq 1$$

+) $x=3⇒y=2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=(3;2)$.

**Câu III: (2,0 điểm)** Cho parabol $\left(P\right):y=\frac{1}{2}x^{2}$ và hai điểm $A(-2;2)$, $B(4;8)$ nằm trên $(P)$. Gọi *M* là điểm thay đổi trên *(P)* và có hoành độ là $m(-2<m<4)$. Tìm  *m* để tam giác *ABM* có diện tích lớn nhất.



Có $M\left(m;\frac{m^{2}}{2}\right)$

Gọi $A^{'}\left(-2;0\right), M^{'}\left(m;0\right), B'(4;0)$

$$S\_{ABB^{'}A^{'}}=\frac{\left(AA^{'}+BB^{'}\right)A^{'}B}{2}=30$$

$$S\_{AMM^{'}A^{'}}=\frac{\left(AA^{'}+MM^{'}\right)A^{'}M^{'}}{2}=\frac{\left(4+m^{2}\right)\left(2+m\right)}{4}$$

$$S\_{MBB'M'}=\frac{\left(MM^{'}+BB^{'}\right)M'B'}{2}=\frac{(16+m^{2})(4-m)}{4}$$

$$S\_{ABM}=S\_{ABA^{'}B^{'}}-S\_{AMM^{'}A^{'}}-S\_{MBB^{'}M^{'}}=30-\frac{6m^{2}-12m+72}{4}=\frac{27}{2}-\frac{3\left(m-1\right)^{2}}{2}$$

$$S\_{ABM}\leq \frac{27}{2}∀m$$

Vậy $m=1$ là giá trị cần timg.

**Câu IV: (2,0 điểm)** Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\left(x-2y\right)\left(x+2y\right)+4y=x+x^{3}.$

$$\left(x-2y\right)\left(x+2y\right)+4y=x+x^{3}.⇔\left(x+1\right)\left(x^{2}+1\right)=\left(2y-1\right)^{2} (1)$$

$y\in Z⇒\left(2y-1\right)^{2}$ là số nguyên dương lẻ

$⇒(x+1)(x^{2}+1)$ là số nguyên dương lẻ

$⇒x+1, x^{2}+1$ cùng lẻ và $1+x\geq 0$

Giả sử $\left(1+x, 1+x^{2}\right)=d⇒d$ là số lẻ.

Do $(1+x)\vdots d⇒(1-x^{2})\vdots d$

Lại có $\left(1+x^{2}\right)\vdots d⇒\left[\left(1+x^{2}\right)+\left(1-x^{2}\right)\right]\vdots d⇒2\vdots d⇒d=1$ (Do *d* lẻ)

Mặt khác, (1)$ ⇒(x+1)(x^{2}+1)$ là số chính phương

$1+x, 1+x^{2}$ là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $1+x, 1+x^{2}$ dều là số chính phương

Do $x^{2}, x^{2}+1$ là 2 số nguyên liên tiếp và cùng là số chính phương nên $x=0$

$x=0⇒4y^{2}+4y=0⇔\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{y=0}{y=1}.\right. $Vậy $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)hoặc \left(x;y\right)=(0;1)$

**Câu V: (7,0 điểm)**

1. Cho đường tròn *(O; R)* đường kính *AB*. Gọi *C* là điểm thoả mãn tam giác *ABC* nhọn. Các đường thẳng *CA, CB* cắt đường tròn *(O)* tại điểm thức hai tương ứng là *D, E*. Trên cung *AB* của *(O)* không chứa *D* lấy điểm *F* ($0<FA\leq FB)$. Đường thẳng *CF* cắt *AB* tại *M*, cắt đường tròn *(O*) tại *N (N* không trùng với *F*) và cắt đường tròn *(O’)* ngoại tiếp tam giác *CDE* tại *P* (*P* không trùng với *C)*.



a) Giả sử $\hat{ACB}=60^{°}, $tính *DE* theo *R.*

Xét đường tròn *(O)*

$\hat{BAC}=\frac{sd\overparen{BFA}-sd \overparen{DNE}}{2}$ (Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn)

$$\hat{BAC}=\frac{180^{°}-sd\overparen{DNE}}{2}⇒sd\overparen{DNE}=60^{°}⇒\hat{EOD}=60^{°}$$

$∆OED$ có $OD=OE⇒∆OED $cân tại O

Mà $\hat{OED}=60^{°}⇒∆ODE là tam giác đều$

$$⇒OD=OE⇒ED=R$$

b) Chứng minh $CN.CF=CP.CM$

$\hat{CPE}=\hat{CDE}$(2 góc nội tiếp chắn cung *CE* của đường tròn *(O’)*)

Mà $\hat{CBM}=\hat{CDE}$ (Vì tứ giác ABED nội tiếp đường tròn *(O)*)

$⇒\hat{CBM}=\hat{CPE} $nên tam giác CPE đồng dạng với tam giác CBM

$$⇒\frac{CE}{CP}=\frac{CM}{CB}⇒CE.CB=CM.CP (1)$$

Tương tự chứng minh tam giác CNE đồng dạng với tam giác CBF

$$\frac{CE}{CN}=\frac{CF}{CB}⇒CE.CB=CN.CF (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CN.CF=CP.CM$

c) Gọi *I, H* theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng *BD, AB*. Các đường thẳng *IH* và *CD* cắt nhau tại *K*. Tìm vị trí của điểm *F* để biểu thức $\frac{AB}{FH}+\frac{BD}{FI}+\frac{AD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tứ giác BIHF, BDAF nội tiếp $\hat{FHK}=\hat{FAK}$ $(=\hat{FBD})$, suy ra tứ giác AKFH nội tiếp nên $\hat{FKA}=90^{°}$

Xét $∆DFK$ và $∆BFH$ có $\hat{FKD}=\hat{FHB}=90^{°}$

Và $\hat{FBH}=\hat{FDA}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{AF}$ của đường tròn (O))

$$⇒∆DFK∽∆BFH⇒\frac{DK}{FH}=\frac{BH}{FH} (1)$$

Tương tự tam giác IDF đồng dạng với tam giác HAF $⇒\frac{ID}{IF}=\frac{HA}{HF}$

Tương tự tam giác AFK đồng dạng tam giác BFI nên: $\frac{AK}{FK}=\frac{BI}{FI} (2)$

(1), (2)$ ⇒\frac{DK}{FK}-\frac{AK}{FK}=\frac{BH}{FH}-\frac{BI}{FI} hay\frac{DA}{FK}=\frac{BH}{FH}-\frac{BI}{FI}$

$$⇒\frac{DA}{FK}+\frac{BD}{FI}=\frac{BH}{FH}+\frac{BD}{FI}-\frac{BI}{FI}=\frac{BH}{FH}+\frac{ID}{FI}$$

Mà $\frac{ID}{FI}=\frac{HA}{FH} suy ra:\frac{DA}{FK}+\frac{BD}{FI}=\frac{BH}{FH}+\frac{HA}{FH}=\frac{AB}{FH}$

Vậy: $\frac{AB}{FH}+\frac{BD}{FI}+\frac{AD}{FK}=\frac{2AB}{FH}$

Nên $\frac{AB}{FH}+\frac{BD}{FI}+\frac{AD}{FK}$ nhỏ nhất khi *FH* lớn nhất khi *F* là trung điểm cung *AB*

2. Cho góc nhọn *xOy* cố định và *A* là điểm cố định trên *Ox*. Đường tròn *(I)* thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với *Ox, Oy* lần lượt tại *E, D*. Gọi *AF* là tiếp tuyến thứ hai kẻ từ *A* đến *(I)* (*F* là tiếp điểm). Chứng minh *DF* luôn đi qua 1 điểm cố định.



Kéo dài *DF* cắt *OI* tại *J*

Chứng minh được 4 điểm *A, E, I, F* cùng thuộc 1 đường tròn.

Chứng minh được $\hat{JFE}=\hat{JIE }⇒$ 4 điểm *J, F, I, E* cùng thuộc 1 đường tròn

Do đó 5 điểm *A, E, I, F, J* cùng thuộc 1 đường tròn

Góc $\hat{AJI}=90^{°}⇒J$ là điểm cố định

**Câu VI: (2,0 điểm)**

Cho 2 số dương *a, b*. Chứng minh $\frac{\left(a+b-1\right)^{2}}{\left(a+b\right)^{2}+1}+\frac{\left(a-b+1\right)^{2}}{\left(a+1\right)^{2}+b^{2}}+\frac{\left(b-a+1\right)^{2}}{\left(b+1\right)^{2}+a^{2}}\geq \frac{3}{5}$. (1)

(1)$⇔\frac{\left(a+b-1\right)^{2}}{\left(a+b\right)^{2}+1}+\frac{\left(\frac{a+1}{b}-1\right)^{2}}{\left(\frac{a+1}{b}\right)^{2}+1}+\frac{\left(\frac{b+1}{a}-1\right)^{2}}{\left(\frac{b+1}{a}\right)^{2}+1}\geq \frac{3}{5} (\*)$

Đặt $x=\frac{a}{a+b+1};y=\frac{b}{a+b+1};z=\frac{1}{a+b+1}$

Ta được $\frac{b+1}{a}=\frac{1}{x}-1;\frac{a+1}{b}=\frac{1}{y}-1;a+b=\frac{1}{z}-1$

Vì $a;b>0⇒x;y;z>0$

Ta lại có $x+y+z=1 ⇒0<x;y;z<1$

Thay vào (\*) ta được $\frac{\left(1-2z\right)^{2}}{z^{2}+\left(1-z\right)^{2}}+\frac{\left(1-2y\right)^{2}}{y^{2}+\left(1-y\right)^{2}}+\frac{\left(1-2x\right)^{2}}{x^{2}+\left(1-x\right)^{2}}\geq \frac{3}{5}$

$$⇔\frac{4z^{2}-4z+1}{2z^{2}-2z+1}+\frac{4y^{2}-4y+1}{2y^{2}-2y+1}+\frac{4x^{2}-4x+1}{2x^{2}-2x+1}\geq \frac{3}{5}$$

$$⇔\frac{1}{2z^{2}-2z+1}+\frac{1}{2y^{2}-2y+1}+\frac{1}{2x^{2}-2x+1}\leq \frac{27}{5}$$

Ta có $\frac{1}{2t^{2}-2t+1}\leq \frac{9}{5}+\frac{54}{25}\left(t-\frac{1}{3}\right)$ (\*) với mọi t thuộc khoảng (0; 1)

Thật vậy (\*) $⇔\frac{1}{2t^{2}-2t+1}\leq \frac{9}{5}+\frac{18\left(3t-1\right)}{25}$

$$⇔\frac{18\left(3t-1\right)}{25}+\frac{9}{5}-\frac{1}{2t^{2}-2t+1}\geq 0$$

$$⇔\frac{18\left(3t-1\right)}{25}+\frac{18t^{2}-18t+4}{5\left(2t^{2}-2t+1\right)}\geq 0$$

$$⇔\frac{9\left(3t-1\right)}{5}+\frac{\left(3t-2\right)\left(3t-1\right)}{2t^{2}-2t+1}\geq 0$$

$$⇔\left(3t-1\right)\left[\frac{9}{5}+\frac{3t-2}{2t^{2}-2t+1}\right]\geq 0$$

$⇔(3t-1)(18t^{2}-3t-1)\geq 0$ luôn đúng với mọi $t$ thoả mãn $0<t<1$

Dấu bằng xảy ra khi $t=\frac{1}{3}$

Sử dụng (\*) 3 lần cho $x;y;z$ rồi cộng từng vế 3 bất đẳng thức cùng chiều ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ hay $a=b=1 $