

Người làm: Hoàng Thị Ngọc Trà

Zalo: Ngọc Trà - số đt zalo: 0888578889

Email: hoangtraht@gmail.com.

CD3: CÁC BÀI TOÁN VỀ LŨY THỪA SỐ TỰ NHIÊN**Dạng 1. So sánh hai lũy thừa****Dạng 2. So sánh biểu thức lũy thừa với một số (so sánh hai biểu thức lũy thừa)****B. Tự luận****Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường TH&THCS Trần Đức Thông 2022 - 2023)**

Cho biểu thức: $P = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh rằng: $P < \frac{3}{16}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Xét } 3P &= 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}} \\
 \Rightarrow 3P + P &= 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{3}{3^2} - \frac{2}{3^2} \right) + \left(\frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^3} \right) + \dots + \left(\frac{99}{3^{98}} - \frac{98}{3^{98}} \right) + \left(\frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{99}} \right) - \frac{100}{3^{100}} \\
 \Rightarrow 4P &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} \\
 \text{Vì } \frac{3}{16} - \frac{403}{16 \cdot 3^{100}} &< \frac{3}{16} \\
 \Rightarrow P &< \frac{3}{16}
 \end{aligned}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Bình Lăng 2022 - 2023)

Chứng minh tổng: $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$ không phải là một số nguyên

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} > \frac{1}{2 \cdot 2},$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} > \frac{1}{3 \cdot 3},$$

$$\frac{1}{3 \cdot 4} > \frac{1}{4 \cdot 4},$$

...

$$\frac{1}{2018 \cdot 2019} > \frac{1}{2019 \cdot 2019},$$

$$\frac{1}{2019 \cdot 2020} > \frac{1}{2020 \cdot 2020},$$

Do đó ta có:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019} + \frac{1}{2019 \cdot 2020} > 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$$

$$\Rightarrow A < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}$$

$$\Rightarrow A < 1 + 1 - \frac{1}{2020} = 1 + \frac{2019}{2020} \quad (1)$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{2019}{2020} < 1 \quad \text{nên} \quad 1 < 1 + \frac{2019}{2020} < 2$$

Vậy suy ra: $1 < A < 2$

Chứng tỏ A không phải là một số nguyên.

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Bắc Sơn 2022 - 2023)

Cho $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right)$. So sánh D với $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Vì D là tích của 99 số âm nên:

$$- D = \left(1 - \frac{1}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{9} \right) \left(1 - \frac{1}{16} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2} \right)$$

$$- D = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \frac{9999}{100^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{99 \cdot 101}{100^2}$$

$$- D = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 98 \cdot 99}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 99 \cdot 100} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 100 \cdot 101}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 99 \cdot 100}$$

$$- D = \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2} = \frac{101}{200} > \frac{100}{200}$$

$$- D > \frac{1}{2}$$

$$D < -\frac{1}{2}.$$

Vậy

Câu 4. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Thái Hưng 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} + \frac{1}{3^{2019}} < \frac{1}{2}$

Lời giải

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} + \frac{1}{3^{2019}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2019}}$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{2019}}$$

$$\Rightarrow B = \left(1 - \frac{1}{3^{2019}}\right) : 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^{2019} \cdot 2} < \frac{1}{2}$$

Vậy $B < \frac{1}{2}$

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Văn Lang 2022 - 2023)

Cho $A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$. Hãy so sánh A với $-\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có:

$$A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$$

A là tích của 99 thừa số âm nên ta có

$$-A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right)$$

$$-A = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \dots \frac{9999}{100^2} = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \dots \frac{99.101}{100^2}$$

$$-A = \frac{1.3.2.4 \dots 98.99}{2.3.4.5 \dots 99.100} \cdot \frac{3.4.5.6 \dots 99.100.101}{2.3.4 \dots 99.100}$$

$$-A = \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2} = \frac{101}{200} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A < -\frac{1}{2}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)

$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2016}} + \frac{1}{3^{2017}}$. Chứng minh: $B < \frac{1}{2}$

Lời giải

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2016}} + \frac{1}{3^{2017}}$$

Ta có:

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2016}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2017}}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2017}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B < \frac{1}{2}$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Diệp Nông 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} < \frac{1}{40}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } A &= \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} \\ A &= \frac{1}{5.5.5} + \frac{1}{6.6.6} + \frac{1}{7.7.7} + \dots + \frac{1}{2020.2020.2020} \\ A &< \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2019.2020.2021} \\ A &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2019.2020} - \frac{1}{2020.2021} \right) \\ A &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2020.2021} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} \right) \\ \text{Vì } \frac{1}{2020.2021} > 0 \text{ nên } \frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} &< \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} \right) < \frac{1}{40} \\ \text{hay } A &< \frac{1}{40} . \\ \text{Vậy } \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} &< \frac{1}{40} . \end{aligned}$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Tam Điệp, tỉnh Ninh Bình, trường 2022 - 2023)

Cho dãy số $a_1; a_2; \dots; a_n$ được xác định như sau:

$$a_1 = 1; a_2 = 1 + \frac{1}{2}; a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \dots; a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} .$$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$, với mọi số tự nhiên $n > 1$

Lời giải

Với mọi $k \geq 2$ ta có: $\frac{1}{ka_k^2} < \frac{1}{ka_{k-1}a_k}$ (vì $a_k > a_{k-1}$)

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} \cdot a_k} = \frac{1}{ka_{k-1} \cdot a_k}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$$

Với $k \in \{2; 3; 4; 5; 6; \dots; n\}$ ta có:

$$\frac{1}{2 \cdot a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2};$$

$$\frac{1}{3 \cdot a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3};$$

...

$$\frac{1}{n \cdot a_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$$

Cộng từng vế theo vế ta được:

$$\frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$$

Câu 9. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường 2021 - 2022)

Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}$. Chứng minh $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$

Lời giải

Ta có $A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9}$

$$\Rightarrow A < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow A < 1 - \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow A < \frac{8}{9} \quad (1)$$

Ta có $A > \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{9.10}$

$$\Rightarrow A > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow A > \frac{4}{10}$$

$$\Rightarrow A > \frac{2}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$

Câu 10. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ, tỉnh Thái Bình, trường 2021 - 2022)

Cho $A = 1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022}$. Chứng tỏ rằng A không phải là số nguyên

Lời giải

Ta có:

$$A = 1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}A = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022} \right]$$

$$= \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023}$$

$$\Rightarrow A + \frac{2}{3}A = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \Rightarrow A = \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \right] \cdot \frac{3}{5}$$

$$\text{Vì } \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} > 0 \Rightarrow 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} > 0 \quad \text{mà } \frac{3}{5} > 0 \quad \text{nên } A > 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } 0 < \frac{2}{3} < 1 &\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} < \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} < 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \\ \Rightarrow A &= \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023}\right] \cdot \frac{3}{5} < \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $0 < A < 1$ nên A không là số nguyên.

Câu 10. (HSG 7 huyện Lục Ngạn, tỉnh Bắc Ninh, trường 2021 - 2022)

Cho $C = \frac{2020}{2019^2 + 1} + \frac{2020}{2019^2 + 2} + \frac{2020}{2019^2 + 3} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019}$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức C không phải là số nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{2020}{2019^2 + 1} < \frac{2020}{2019^2},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2} < \frac{2020}{2019^2},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 3} < \frac{2020}{2019^2},$$

...

$$\frac{2020}{2019^2 + 2019} < \frac{2020}{2019^2}.$$

Từ đó suy ra

$$C < \frac{2020}{2019^2} + \frac{2020}{2019^2} + \frac{2020}{2019^2} + \dots + \frac{2020}{2019^2}$$

$$C < \frac{2020}{2019^2} \cdot 2019 = \frac{2020}{2019} < 2$$

$$\Rightarrow C < 2$$

(1)

$$\text{Ta có: } \frac{2020}{2019^2 + 1} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 3} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

...

$$\frac{2020}{2019^2 + 2018} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2019} = \frac{2020}{2019^2 + 2019}$$

Từ đó suy ra

$$C > \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019}$$

$$C > \frac{2020}{2019^2 + 2019} \cdot 2019 = \frac{2020 \cdot 2019}{2019(2019 + 1)} = 1$$

$$\Rightarrow C > 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < C < 2$ nên C không là số nguyên.

Câu 10. (HSG 7 huyện Quan Hóa, tỉnh Thanh Hóa , trường 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

Lời giải

$$A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$$

Đặt :

$$49.A = 49. \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-6}} - \frac{1}{7^{4n-4}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \right)$$

Ta có:

$$49.A = 1 - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{4n-4}} - \frac{1}{7^{4n-2}} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>