|  |  |
| --- | --- |
|  | PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN CHƯ SÊKỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆNNĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN***Thời gian làm bài 150 phút******Ngày thi: 12/11/2020*** |

1. (*5.0 điểm*)

a) Tính giá trị biểu thức  với .

b) Tìm các cặp số nguyên  thỏa mãn .

1. (*5.0 điểm*)

a) Chứng minh rằng  không thể biểu diễn dưới dạng  với  là các số hữu tỉ và  dương.

b) Xét các số dương  thỏa mãn . Chứng minh rằng



1. (*3.0 điểm*)

Cho tam giác nhọn  đường cao  là trực tâm của tam giác. Gọi  là một điểm trên  sao cho  theo thứ tự là diện tích các tam giác  và 

a) Chứng minh: 

b) Chứng minh: .

1. (*4.0 điểm*)

Cho tam giác  vuông cân tại , trên cạnh  lấy một điểm  bất kỳ ( không trùng với  và ). Từ  kẻ  vuông góc  tại  vuông góc  tại .

a) Chứng minh rằng khi  di chuyển trên cạnh  thì đường thẳng qua  và vuông góc với  luôn đi qua một điểm cố định .

b) Xác định vị trí của điểm  trên cạnh  để diện tích tam giác  có giá trị nhỏ nhất.

1. (*3.0 điểm*)

Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

🙢**HẾT**🙠

|  |  |
| --- | --- |
|  | HƯỚNG DẪN GIẢIPHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN CHƯ SÊKỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆNNĂM HỌC 2020-2021. MÔN: TOÁN***Thời gian làm bài 150 phút******Ngày thi: 12/11/2020*** |

1. (*5.0 điểm*)

a) Tính giá trị biểu thức  với .

b) Tìm các cặp số nguyên  thỏa mãn .

**Lời giải**

1. Ta có: .

Áp dụng hằng đẳng thức trên ta có:















Khi đó ta có: .

1. Ta có:









Do  là các số nguyên nên ta có các trường hợp sau:

TH1: 

TH2: 

TH3: 

TH4: 

Vậy các cặp số nguyên  cần tìm là 

1. (*5.0 điểm*)

a) Chứng minh rằng  không thể biểu diễn dưới dạng  với  là các số hữu tỉ và  dương.

b) Xét các số dương  thỏa mãn . Chứng minh rằng



**Lời giải**

Giả sử .









+ Nếu  là số chính phương hoặc là số hữu tỉ có dạng 

 với mọi số  là số hữu tỉ.

Điều này vô lý vì  là số vô tỉ.

+ Nếu  không là số chính phương hoặc không là số hữu tỉ có dạng .

 là số vô tỉ  vô lý vì  là số hữu tỉ với mọi số .

Vậy  không thể biểu diễn dưới dạng  với  là các số hữu tỉ và  dương.

b) Với ba số dương  xét biếu thức:

.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho hai bộ ba số  và

 ta có:









.

. (đpcm)

1. (*3.0 điểm*)

Cho tam giác nhọn  đường cao  là trực tâm của tam giác. Gọi  là một điểm trên  sao cho  theo thứ tự là diện tích các tam giác  và 

a) Chứng minh: 

b) Chứng minh: .

**Lời giải**

|  |  |
| --- | --- |
|  | a) Xét  và  co: (cùng phụ với  (1) |

b) Lại có:  vuông ở  có đường cao 

 (Hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2)

Từ (1) và  .

Suy ra  (3)

Thay (3) vào (\*) ta dưọc:



1. (*4.0 điểm*)

Cho tam giác  vuông cân tại , trên cạnh  lấy một điểm  bất kỳ ( không trùng với  và ). Từ  kẻ  vuông góc  tại  vuông góc  tại .

a) Chứng minh rằng khi  di chuyển trên cạnh  thì đường thẳng qua  và vuông góc với  luôn đi qua một điểm có định .

b) Xác định vị trí của điểm  trên cạnh  để diện tích tam giác  có giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

Kẻ .

Gọi  là điểm sao cho tứ giác  là hình vuông.

 cắt  tại .  cắt  tại .

Xét  vuông tại  có .

 vuông cân tại 

|  |  |
| --- | --- |
|  | Tứ giác  có  và  là hình vuông...Xét  và  có: |





 (hai góc tương ứng)

Mà .

Lại có  (hai góc so le trong) nên ta có:





 vuông tại  hay .

Mà  thẳng hàng.

Vây  luôn đi qua một điểm  cố định.

Đặt  (Với )

Ta có: .





 đạt giá trị nhỏ nhất khi  nhỏ nhất.

Ta có: 

Vậy  đạt giá trị nhỏ nhất là .

Khi đó  là trung điểm canh .

1. (*3.0 điểm*)

Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

**Lời giải**

Ta xếp các đoạn thẳng có độ dài tăng dần . Nếu tồn tại ba đoạn thẳng  thỏa mãn  thì ba đọan thẳng này có thể lập thành một tam giác.

Giả sử ngược lại:



Khi đó theo giả thiết:

.

 Mâu thuẫn với giả thiết cho dộ dài mỗi đoạn thẳng nhỏ hơn 100.

Vậy tồn tại 3 đoạn thẳng  mà . Do đó tồn tại 3 đoạn thẳng để có thể ghép thành tam giác.

**🙢 HẾT 🙠**