



Đề số 3

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} = y^3 - 6 \\ \sqrt{y+2} = z^3 - 25 \\ \sqrt{z+1} = x^3 + 1 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $a = \sqrt{x+3}$; $b = \sqrt{y+2}$; $c = \sqrt{z+1}$. Ta có $a, b, c \geq 0$ và hệ thành:

$$\begin{cases} a = (b^2 - 2)^3 - 6 \\ b = (c^2 - 1)^3 - 25 \\ c = (a^2 - 3)^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = f(b) \\ b - c = g(c) \\ c - a = h(a) \end{cases} \text{ với } \begin{cases} f(b) = (b^2 - 2)^3 - b - 6 \\ g(c) = (c^2 - 1)^3 - c - 25 \\ h(a) = (a^2 - 3)^3 - a + 1 \end{cases}$$

Mặt khác ta lại có : vì $a, b \geq 0$ nên $(b^2 - 2)^3 \geq 6 > 1^3$ và $(c^2 - 1)^3 \geq 25 > 2^3$ nên $b, c > \sqrt{3}$.

$$\text{Suy ra } (a^2 - 3)^3 + 1 > \sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} a > \sqrt{3} \\ a^2 - 3 > \sqrt[3]{\sqrt{3} - 1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} (*) \end{cases}$$

Ta lại có :

$$\begin{cases} f'(b) = 3(b^2 - 2)^2 \cdot 2b - 1 > 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} - 1 > 0 \forall b > \sqrt{3} \\ g'(c) = 3(c^2 - 1)^2 \cdot 2c - 1 > 3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} - 1 > 0 \forall c > \sqrt{3} \\ h'(a) = 3(a^2 - 3)^2 \cdot 2a - 1 > 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} - 1 > 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot \sqrt{3} > 0 \forall a \text{ như } (*) \end{cases}$$

Suy ra f, g, h đồng biến và $f(2) = g(2) = h(2) = 0$

Ta xét 2 trường hợp:

TH1: $a > 2$: Ta có ngay $c > a > 2$ ($h(a) > 0$), $b > c > 2$ ($g(c) > 0$), $a > b > 2$ ($f(b) > 0$).
Suy ra $a > b > c > a$ (Vô lý)

TH2: $a < 2$: lập luận tương tự ta cũng có điều vô lý.

Vậy $a = 2$ suy ra $c = a + h(a) = 2, b = c + g(c) = 2$ nên $a = b = c = 2$

Suy ra $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Thử lại thấy đúng.

Bài 2. Đa thức $P(x)$ bậc n với hệ số thực có n nghiệm thực phân biệt. Hỏi $P(x)$ có thể có nhiều nhất bao nhiêu hệ số bằng 0?

Lời giải:

Ta gọi $S(n)$ là số hệ số bằng 0 nhiều nhất mà 1 đa thức hệ số thực bậc n với n nghiệm thực phân biệt có thể có, $T(P)$ (P là 1 đa thức) là số hệ số bằng 0 của P

Ta có một số tính chất sau:

- (i) $S(1) = 1$ (do $S(1) \leq 1$ và xét đa thức $P(x) = x$ có 1 hệ số bằng 0)
- (ii) $S(2) = 1$ (do mọi đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) không thể có $b = c = 0$ và có 2 nghiệm phân biệt)
- (iii) Nếu đa thức $P(x)$ bậc 1 có $T(P) = 1$ thì $P(0) = 0$
- (iv) Giả sử $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ thì $P'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$. Nên nếu $T(P) = k$ thì $T(P') = k$ hoặc bằng $k - 1$. $T(P') = k - 1 \Leftrightarrow P(0) = 0$.

Ta tìm $S(n)$ thông qua quy nạp theo n :

Qua (i), (ii), (iii) ta kiểm chứng được giả thiết quy nạp

$$\text{Giả sử ta có } \begin{cases} S(2k) = k \\ S(2k-1) = k-1 \\ \text{Nếu } \deg P = 2k-1 \text{ và } T(P) = k \text{ thì } P(0) = 0 \end{cases} \quad \forall k = \overline{1; N}.$$

$$\text{Ta sẽ CM } \begin{cases} S(2N+1) = N+1 (*) \\ S(2N+2) = N+1 (**) \\ \text{Nếu } \deg P = 2N+1 \text{ và } T(P) = N+1 \text{ thì } P(0) = 0 (***) \end{cases}$$

_Thật vậy, bắt đầu với (*) và (**): Xét đa thức P thỏa $\deg P = 2N+1$; P có $2N+1$ nghiệm thực phân biệt. Ta có P' là 1 đa thức bậc $2N$ có $2N$ nghiệm thực phân biệt (Giữa 2 nghiệm của P luôn có 1 nghiệm của P' theo định lý Rolle). Nên ta có $T(P) \leq T(P') + 1 \leq S(2N) + 1 = N+1$. Để dấu bằng xảy ra thì theo (iv) $P(0) = 0$

Ta kiểm chứng được sự tồn tại của dấu bằng qua đa thức:

$$P(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 2) \dots (x^2 - N) \text{ Vậy } S(2N+1) = N+1$$

Ta tiếp tục với (**): Xét đa thức P thỏa $\deg P = 2N + 2$; P có $2N + 2$ nghiệm thực phân biệt.

Ta có P' là 1 đa thức bậc $2N + 1$ có $2N + 1$ nghiệm thực phân biệt

Ta có $T(P) \leq T(P') + 1 \leq S(2N) + 1 = N + 2$. Giả sử tồn tại đa thức P như vậy có

$T(P) = N + 2$. Suy ra $\begin{cases} P(0) = 0 \\ T(P') = N + 1 \text{ nên } P'(0) = 0 \end{cases}$ suy ra P có nghiệm kép là 0 (Loại!).

Vậy suy ra $T(P) \leq N + 1$. Ta kiểm chứng được sự tồn tại của dấu bằng qua đa thức:

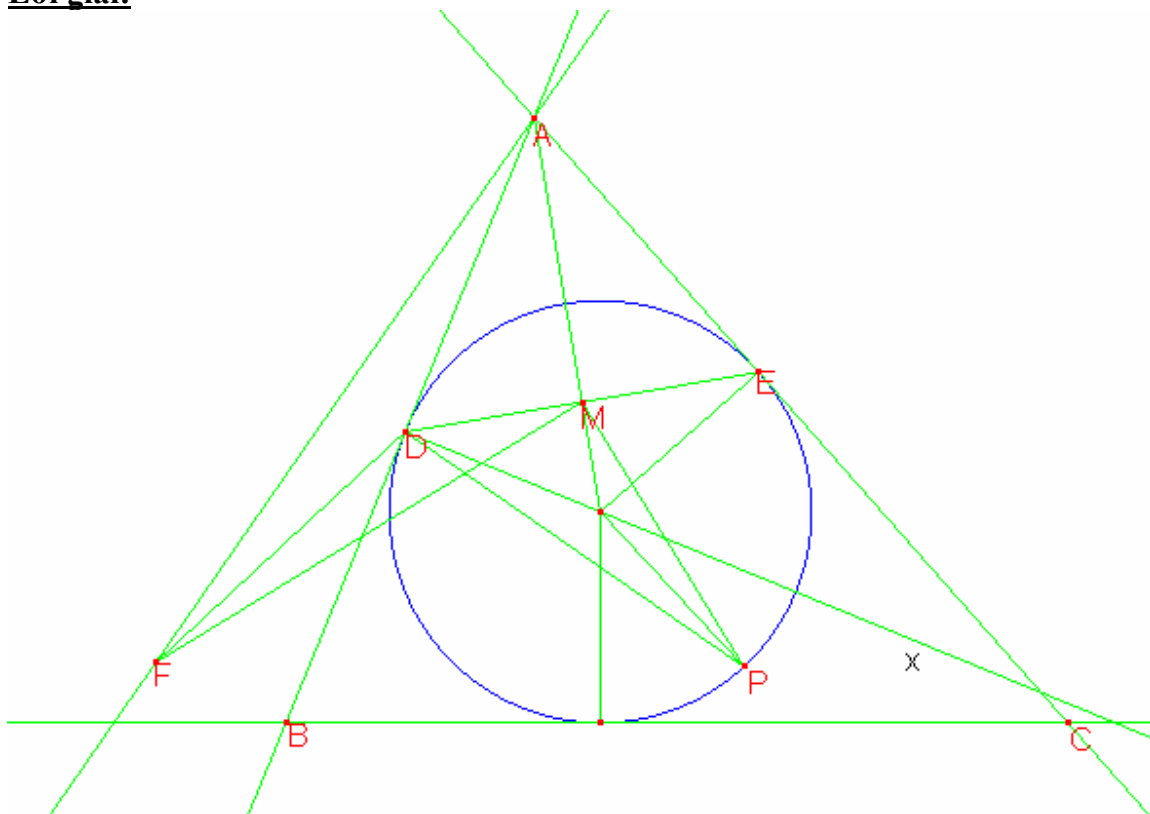
$$P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2) \dots (x^2 - N)(x^2 - N - 1) \text{ Vậy } S(2N + 2) = N + 1$$

Vậy ta suy ra $S(2n + 1) = n + 1$ và $S(2n + 2) = n + 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$

Hay số hệ số bằng 0 nhiều nhất mà một đa thức hệ số thực bậc n với n nghiệm phân biệt có thể có là $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$

Bài 3. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC tại các điểm D và E tương ứng. Gọi P là một điểm bất kỳ trên cung lớn DE của đường tròn (I), F – là điểm đối xứng với A qua đường thẳng DP và M là trung điểm đoạn DE . Chứng minh rằng góc FMP vuông.

Lời giải:



M là trung điểm DE cũng là giao điểm của DE và IA vì AD, AE là tiếp tuyến của (I)

Mặt khác, $\angle ADF = 360^\circ - 2\angle ADP = 360^\circ - 2(90^\circ + \angle IDP) = 180^\circ - 2\angle IDP = \angle DIP (*)$
 mà tam giác DAF và tam giác IDP cân tại D và I nên theo (*) ta có ngay chúng đồng dạng. Suy ra $\angle FAD = \angle IDP$

Ta có $\angle FDM = \angle FDB + \angle BDM = 2\angle FAD + \angle DAM + \angle DMA$ (Vì tam giác DAF cân tại D)
 $= 2\angle IDP + \angle DAM + 90^\circ = \angle IAD + \angle ADI + \angle IDP + \angle IDP$
 $= \angle AIX + \angle PIX = \angle MIP$ (1)

Mặt khác, ta có $\frac{DM}{DF} = \frac{DM}{DA} = \sin \angle DAM = \cos \angle AID$; $\frac{IM}{IP} = \frac{IM}{ID} = \sin \angle IDM = \cos \angle AID$. Suy ra $\frac{DM}{DF} = \frac{IM}{IP}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có ngay tam giác DMF và tam giác IMP đồng dạng (c-g-c) suy ra $\angle DMF = \angle IMP$ nên $\angle FMP = \angle FMI + \angle IMP = \angle FMI + \angle DMF = \angle DMI = 90^\circ$

Vậy góc FMP vuông.

Bài 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) sao cho

$$\frac{m^4 + n^2}{7^m - 3^n}$$

là một số nguyên.

Lời giải:

Đặt $A = \frac{m^4 + n^2}{7^m - 3^n}$

Để thấy $\begin{cases} 7^m \text{ lẻ} \\ 3^n \text{ lẻ} \end{cases}$ với mọi m, n nguyên dương nên suy ra $7^m - 3^n$ chẵn nên để A nguyên thì m, n cùng tính chẵn lẻ. Ta xét 2 TH

TH1: m, n lẻ, ta có được $7^m \equiv 3^n \equiv (-1) \pmod{4}$ và $m^2 - 1 = (m-1)(m+1) \vdots 4$ nên $m^2 \equiv 1 \pmod{4}$. CMTT, ta có $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$. Suy ra $m^4 + n^2 \equiv 2 \pmod{4}$
 (Loại vì tử không chia hết cho 4 và mẫu chia hết cho 4)

TH2: m, n cùng chẵn, ta có $7^m \equiv 3^n \equiv 1 \pmod{8}$ nên để A nguyên thì $m^4 + n^2 \vdots 8$ mà $m^4 \vdots 16$ do m chẵn nên $n^2 \vdots 8 \rightarrow n \vdots 4$ Vậy $m = 2a$; $n = 4b$ (a, b nguyên dương)

$$A = \frac{16(a^4 + b^2)}{7^{2a} - 9^{2b}}$$

Do A nguyên và A khác 0 nên $|A| \geq 1$. Suy ra $\left| \frac{16(a^4 + b^2)}{(7^a + 9^b)(7^a - 9^b)} \right| \geq 1 \rightarrow \frac{16(a^4 + b^2)}{(7^a + 9^b)} \geq |7^a - 9^b|$

Mặt khác, $7^a - 9^b$ là số nguyên chẵn và $7^a \neq 9^b$ nên $|7^a - 9^b| \geq 2$.
Suy ra $16(a^4 + b^2) \geq 2(7^a + 9^b) > 2(7^a + 7^b)$

Đặt $c = \max\{a, b\}$, ta có :

$$16c^4 + 16c^2 \geq 16(a^4 + b^2) > 2(7^a + 7^b) > 2.7^c (*)$$

Ta CM $2.7^c > 16c^4 + 16c^2 \forall c \geq 4, c \in \mathbb{N}$ bằng quy nạp.

_Dễ dàng kiểm chứng mệnh đề đúng khi $c = 4$

_Giả sử mệnh đề đúng khi $c = N \geq 4$, ta sẽ CM mệnh đề đúng khi $c = N + 1$. Thật vậy :

$$2.7^N > 16N^4 + 16N^2$$

$$\rightarrow 2.7^{N+1} > 7(16N^4 + 16N^2)$$

$$\rightarrow 2.7^{N+1} - 16(N+1)^4 + 16(N+1)^2 > 16(7N^4 + 7N^2 - (N+1)^4 - (N+1)^2)$$

$$\rightarrow 2.7^{N+1} - 16(N+1)^4 + 16(N+1)^2 > 16(N^3(N-4) + N(N^3-6) + N^4 - 2 + 3N^4) > 0$$

(Đúng do $N \geq 5$)

_Vậy $2.7^c > 16c^4 + 16c^2 \forall c \geq 5, c \in \mathbb{N}$

Từ (*) ta suy ra $1 \leq c \leq 3 \rightarrow 1 \leq a, b \leq 3$. Thử các giá trị của bộ (a, b) với $1 \leq a, b \leq 3$, ta nhận $(a, b) = (1, 1)$

Thử lại, ta nhận $(m, n) = (2, 4)$

Bài 5. Sau khi khai trương được đúng 10 ngày, một nhân viên thư viện cho biết :

- 1) Mỗi ngày có đúng 8 người đến đọc sách ;
- 2) Không có người nào đến thư viện 1 ngày quá 1 lần ;
- 3) Trong hai ngày bất kỳ của 10 ngày đó thì có ít nhất là 15 người khác nhau cùng đến thư viện.

Căn cứ đồng thời cả 3 điều kiện mà nhân viên thư viện cung cấp hãy cho biết số người tối thiểu đã đến thư viện trong 10 ngày nói trên là bao nhiêu ?

Lời giải:

Đầu tiên ta chuyển bài toán về ngôn ngữ tập hợp. Vì điều kiện (2) nên ta có thể gọi A_i là tập những người đến thư viện vào ngày thứ i ($i = \overline{1; 10}$). Theo (1) và (3) ta có

$$\text{i. } |A_i| = 8$$

$$\text{ii. } |A_i \cup A_j| \geq 15 \Leftrightarrow |A_i \cap A_j| \leq 1 \forall i \neq j$$

$$\text{Tìm } X_{10} = \min | \bigcup_{i=1}^{10} A_i |$$

Ta giải quyết bài toán tổng quát như sau :

Cho $2n + 2$ tập A_i ($i = \overline{1; 2n+2}$) thỏa mãn tính chất sau :

$$\text{i. } |A_i| = 8$$

$$\text{ii. } |A_i \cup A_j| \geq 15 \Leftrightarrow |A_i \cap A_j| \leq 1$$

Tìm $X_{2n+2} = \min | \bigcup_{i=1}^{2n+2} A_i |$

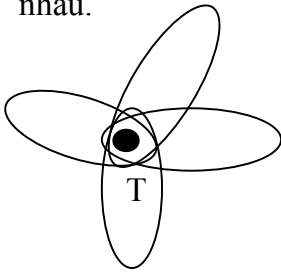
Ta giải quyết bài toán tổng quát bằng truy hồi :

Do số cách lập $2n+2$ phần tử trên là hữu hạn (nói cách khác là có hữu hạn các sơ đồ Ven) nên tồn tại cách lập sao cho $| \bigcup_{i=1}^{2n+2} A_i |$ là nhỏ nhất

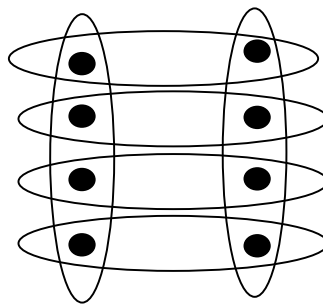
Xét trường hợp mà $| \bigcup_{i=1}^{2n+2} A_i |$ là nhỏ nhất.

TH1: Nếu $|A_i \cap A_j| = 1$ với mọi $i \neq j$, ta gọi $\{T\} = A_1 \cap A_2$. Vì $\forall i \geq 3, |A_i \cap A_1| = 1, |A_i \cap A_2| = 1$ nên $T \in A_i \forall i = \overline{1; 2n+2}$ Trong TH này, $| \bigcup_{i=1}^{2n+2} A_i | = 1 + (2n+2)(2n-1)$ (Hình 1)

TH2: Nếu tồn tại $i \neq j$ sao cho $|A_i \cap A_j| = 0$, không mất tính tổng quát, ta giả sử $|A_1 \cap A_2| = 0$ Xét Hình 2: Các tập $A_i (i \geq 3)$ không giao với nhau và có phần giao với A_1 và A_2 đôi một khác nhau.



Hình 1



Hình 2

$| \bigcup_{i=1}^{2n+2} A_i | = 2.2n + 2n.(2n-2) = 4n^2 < 1 + (2n-1)(2n+2)$ Vậy trường hợp 1, $| \bigcup_{i=1}^{2n+2} A_i |$ chưa là nhỏ nhất. Ta loại TH1 và chỉ xét tiếp TH2

Ta sẽ CM $\exists a \in A_1, b \in A_2$ mà $\{a, b\} \cap A_i = \emptyset \forall i \geq 3$. Thật vậy, giả sử tồn tại a, b như thế, ta xét $A'_1 = (A_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}$, ta thấy bộ $(B_1, B_2, \dots, B_{2n+2}) = (A'_1, A_2, \dots, A_{2n+2})$ là một bộ thỏa yêu cầu đề bài có $| \bigcup_{i=1}^{2n+2} B_i | = | \bigcup_{i=1}^{2n+2} A_i | - 1 < | \bigcup_{i=1}^{2n+2} A_i |$ (Vô lý vì bộ $(A_1, A_2, \dots, A_{2n+2})$ có $| \bigcup_{i=1}^{2n+2} A_i |$ nhỏ nhất)

Vậy $\exists a \in A_1, b \in A_2$ mà $\{a, b\} \cap A_i = \emptyset \forall i \geq 3$. Vậy, không mất tính tổng quát, ta giả sử $\forall a \in A_1, \exists! i: A_i \cap A_1 = \{a\}$

Mặt khác, ta CM $|A_i \cap A_2| = 1 \forall i \geq 3$. Thật vậy, giả sử $A_k \cap A_2 = \emptyset, \{a\} = A_k \cap A_1$. Vì $A_k \cap A_2 = \emptyset$ và ngoài A_1, A_2 ra còn có $2n$ tập nữa, số phần tử của A_2 cũng là $2n$ nên suy ra $\exists b \in A_2$ mà $\{b\} \cap A_i = \emptyset \forall i \geq 3$

Xét $A'_2 = (A_2 \setminus \{b\}) \cup \{a\}$, thì bộ sau $(B_1, B_2, \dots, B_{2n+2}) = (A_1, A'_2, \dots, A_{2n+2})$ là một bộ thỏa yêu cầu đề bài có $| \bigcup_{i=1}^{2n+2} B_i | = | \bigcup_{i=1}^{2n+2} A_i | - 1 < | \bigcup_{i=1}^{2n+2} A_i |$ (Vô lý vì bộ $(A_1, A_2, \dots, A_{2n+2})$ có $| \bigcup_{i=1}^{2n+2} A_i |$ nhỏ nhất)

Vậy $|A_i \cap A_2| = 1 \forall i \geq 3$

Tiếp theo, ta xét bộ gồm $2n$ tập hợp $B_i (i = \overline{1; 2n}); |B_i| = 2n - 2$ được xác định như sau :

$$B_i = A_i \setminus [A_i \cap (A_1 \cup A_2)]$$

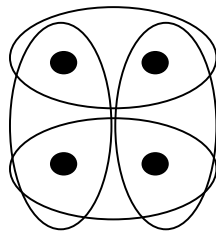
Ta có $|B_i \cap B_j| \leq 1 \forall i \neq j$. Suy ra $|\bigcup_{i=1}^{2n} B_i| \leq X_{2n}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\forall a \in A_1, \exists! i: A_i \cap A_1 = \{a\}, \forall b \in A_2, \exists! i: A_i \cap A_2 = \{b\}$
(Giống Hình 2 nhưng $A_i (i \geq 3)$ có thể có giao với nhau)

Khi ấy, ta có $X_{2n+2} = X_{2n} + 2.2n$ (Vì phải thêm vào $2.2n$ phần tử của 2 tập A_1, A_2)

Áp dụng:

Ta có $X_{10} = X_0 + 2.8 = \dots = 2.(2 + 4 + 6 + 8)$ Vì trong TH có 4 tập, mỗi tập 2 phần tử thì $X_4 = 2.4$ (Hình 3)



Hình 3

Lời giải đáp án

Gọi x_i là số người đến đọc sách được i ngày ($i = 1, 2, \dots, K$) và $K \leq 10$. Gọi n là số người đã đến thư viện trong 10 ngày đó thì ta có:

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_K \quad (1)$$

$$80 = x_1 + 2x_2 + \dots + Kx_K \quad (2)$$

Gọi y là số cách chọn 2 ngày sao cho không có người nào đến thư viện quá 1 lần trong hai ngày đó.

Vì trong 2 ngày bất kỳ của 10 ngày có ít nhất là 15 người khác nhau cùng đến thư viện, nên trong hai ngày bất kỳ của 10 ngày đó có không quá 1 người đến thư viện trong cả hai ngày đó.

$$\text{Nên ta có: } C_{10}^2 = C_2^2 x_2 + C_3^2 x_3 + \dots + C_K^2 x_K + y \quad (3)$$

$$\text{Nhận xét rằng: } x_i - \frac{2}{3}ix_i + \frac{1}{3}C_i^2 x_i = \frac{(i-2)(i-3)}{6}x_i \geq 0$$

Lấy (1) trừ $(2/3) \times (2)$ cộng $(1/3) \times (3)$ ta có

$$n \geq \left\lceil \frac{115}{3} \right\rceil + 1 \Rightarrow n \geq 39.$$

Vậy số người tối thiểu đi đến thư viện trong 10 ngày là 39. Bảng số liệu dưới đây cho thấy giá trị này có thể đạt được (A_i là tập hợp chỉ số của những người đến thư viện vào ngày thứ i).

$$A_1 = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}; A_2 = \{1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\},$$

$$A_3 = \{1, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23\}; A_4 = \{2, 3, 10, 17, 24, 25, 26, 27\}$$

$$A_5 = \{2, 4, 11, 18, 28, 29, 30, 31\}; A_6 = \{2, 5, 12, 19, 32, 33, 34, 35\}$$

$$A_7 = \{6, 13, 20, 32, 28, 24, 36, 37\}, A_8 = \{7, 14, 21, 33, 29, 39, 26, 38\}$$

$$A_9 = \{8, 15, 22, 34, 30, 39, 25, 36\}, A_{10} = \{9, 16, 23, 35, 31, 27, 38, 37\}$$