

ĐỀ 28/9/2022

Câu 1.(2 điểm). Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'\left(-2x + \frac{7}{2}\right) = 3x^2 - 12x + 9$. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$

Câu 2.(3 điểm). Cho $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm.

$$-4x^2 + 18x + m - 4 \leq f\left(\frac{-4x^2 + 18x + m - 4}{f\left(\sqrt{16x + m - 4}\right)}\right) = 0$$

Câu 3.(6 điểm).

1. Một hộp có 5 bi xanh, 6 bi đỏ, 7 bi vàng và các viên bi kích cỡ như nhau. Lấy ngẫu nhiên 3 lần mỗi lần 1 viên bi. Tính xác suất để chỉ có lần 2 lấy được bi xanh.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 3 + (y^2 - y - 1)\sqrt{x^2 + 3} - y^3 + y = 0 & (1) \\ 2x + xy + 2 + (x + 2)\sqrt{y^2 + 4x + 4} = 0 & (2) \end{cases}$$

Câu 4.(7 điểm).

1.(3 điểm). Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC . Biết $(AMN) \perp (SBC)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

2.(2 điểm). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC và vuông góc với mặt phẳng (SCD) cắt đường thẳng SD tại E . Gọi V và V_1 lần lượt là thể tích khối chóp $S.ABCD$ và

$D. ACE$, biết $V = 5V_1$. Tính cosin của góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABCD$.

3.(2 điểm).

Cho hình chóp $S.ABCD$, SA là đường cao, đáy là hình chữ nhật với $SA = a, AB = b, AD = c$. Trong mặt phẳng (SDB) lấy G là trọng tâm tam giác SDB , qua G kẻ đường thẳng d cắt cạnh BS tại M , cắt cạnh SD tại N , mp (AMN) cắt SC tại K . Xác định M thuộc SB sao cho V_{SAMKN} đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đó.

Câu 5.(2 điểm).

Xét các số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2b+c}{a} + \frac{2c+a}{b} + \frac{2a+b}{c} + \frac{18abc}{ab+bc+ca}.$$

.....Hết.....

ĐÁP ÁN

Câu 1. Ta cần giải bất phương trình $f'(x) < 0$.

$$\text{Từ } f'\left(-2x + \frac{7}{2}\right) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f'\left(-2x + \frac{7}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

$$\text{Đặt } t = -2x + \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{7-2t}{4}. \text{ Khi đó ta có } f'(t) < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{7-2t}{4} < 3 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < t < \frac{3}{2}.$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 2. Lời giải

$$\text{Nhận xét: } f(-x) = -x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Đặt } g(t) = t \cdot f(t) = t(t + \sqrt{t^2 + 1})$$

$$\text{Có } g'(t) = 2t + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{nên } g(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Khi đó:

$$-4x^2 + 18x + m - 4 \leq f(-4x^2 + 18x + m - 4) + \frac{\sqrt{16x + m - 4}}{\sqrt{16x + m - 4}} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 18x + m - 4 \leq f(-4x^2 + 18x + m - 4) = -\sqrt{16x + m - 4} \quad \text{Đặt}$$

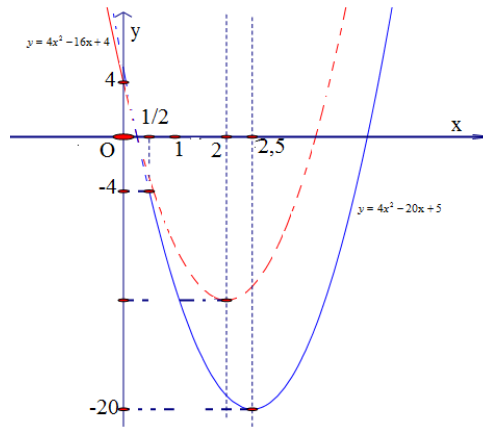
$$\Leftrightarrow -4x^2 + 18x + m - 4 = -\sqrt{16x + m - 4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 18x - m + 4 = \sqrt{16x + m - 4} \quad (2)$$

$$t = \sqrt{16x + m - 4}, \quad t \geq 0. \text{ Ta có } m = t^2 - 16x + 4.$$

$$\text{Phương trình (2) trở thành: } t = 4x^2 - 18x + 4 - (t^2 - 16x + 4) \Leftrightarrow 4x^2 - t^2 = 2x + t$$

$$\Leftrightarrow (2x+t)(2x-t-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2x \\ t=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{16x+m-4}=-2x \\ \sqrt{16x+m-4}=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ m=4x^2-16x+4 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ m=4x^2-20x+5 \end{cases}.$$



Từ đồ thị, phương trình có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 4 \\ m = -20 \end{cases}$.

Câu 3.

1. Trường hợp 1. Lần 1 lấy được bi đỏ, lần 2 lấy được bi xanh, lần 3 lấy được bi đỏ. Xác suất trong trường hợp này là: $\frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{5}{16}$.

Trường hợp 2. Lần 1 lấy được bi đỏ, lần 2 lấy được bi xanh, lần 3 lấy được bi vàng. Xác suất trong trường hợp này là: $\frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{7}{16}$.

Trường hợp 3. Lần 1 lấy được bi vàng, lần 2 lấy được bi xanh, lần 3 lấy được bi đỏ. Xác suất trong trường hợp này là: $\frac{7}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{6}{16}$.

Trường hợp 4. Lần 1 lấy được bi vàng, lần 2 lấy được bi xanh, lần 3 lấy được bi vàng. Xác suất trong trường hợp này là: $\frac{7}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{6}{16}$.

Vậy xác suất cần tìm là:

$$\frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{5}{16} + \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{7}{16} + \frac{7}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{6}{16} + \frac{7}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{6}{16} = \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{1}{16} (5 + 7 + 7 + 7) = \frac{65}{408}.$$

2. Điều kiện: $y^2 + 4x + 4 \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 3 - y\sqrt{x^2 + 3}) + [(y^2 - 1)\sqrt{x^2 + 3} - y(y^2 - 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3}(\sqrt{x^2 + 3} - y) + (y^2 - 1)(\sqrt{x^2 + 3} - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 3} - y)(\sqrt{x^2 + 3} + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + 3} \quad (\text{Do } \sqrt{x^2 + 3} - 1 + y^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$(2) \Leftrightarrow 2x + x\sqrt{x^2 + 3} + 2 + (x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 7} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2) + (x + 2)\sqrt{(x + 2)^2 + 3} = (-x) + (-x)\sqrt{x^2 + 3}$$

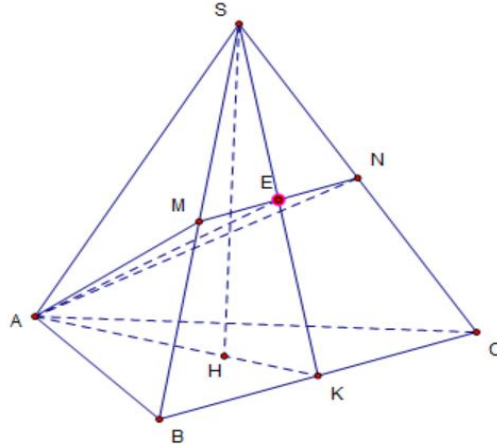
Xét hàm số: $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 3}$ có $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 3} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $(2) \Leftrightarrow f(x+2) = f(-x) \Leftrightarrow x+2 = -x \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$

Câu 4.

1. Lời giải



Gọi E là trung điểm MN , K là trung điểm BC , H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
Ta có: S, E, K thẳng hàng và A, H, K thẳng hàng.

Ta có: $\triangle SAB = \triangle SAC \Rightarrow AM = AN \Rightarrow$ tam giác AMN cân tại $A \Rightarrow AE \perp MN$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (AMN) \perp (SBC) \\ (AMN) \cap (SBC) = MN \\ AE \perp MN \\ AE \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC)$$

$$\Rightarrow AE \perp SK$$

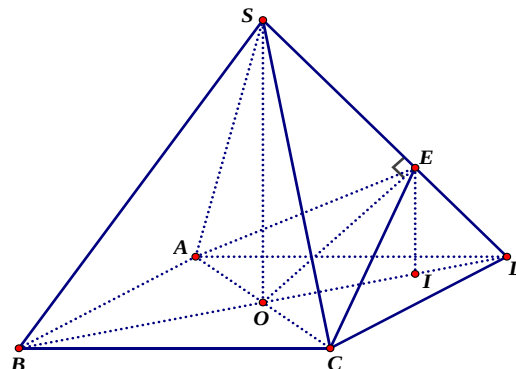
$$\text{Ta có: } \frac{SE}{SK} = \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow E \text{ là trung điểm } SK \Rightarrow \text{tam giác } SAK \text{ cân tại } A$$

$$\Rightarrow AS = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có: } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}, S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Suy ra: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}.$$

2. Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông ABCD $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$ (S.ABCD là hình chóp đều)

Vẽ OH vuông góc với SD tại H.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD \text{ mà } OH \perp SD$$

nên $SD \perp (ACH) \Rightarrow (SCD) \perp (ACH) \Rightarrow H$ trùng với E.

$$\text{Đặt } OA = OB = OC = OD = x, SO = y \Rightarrow SD = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Vẽ } EI \parallel SO \text{ (I thuộc BD)} \Rightarrow EI \perp (ABCD) \text{ và } \frac{DE}{DS} = \frac{EI}{SO}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} V = V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3} SO.AD.CD \\ V_1 = V_{D.ACE} = \frac{1}{3} EI.S_{ACD} = \frac{1}{3} EI.\frac{1}{2} AD.CD \\ V = 5V_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{5}{2} EI \Rightarrow \frac{EI}{SO} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{DS} = \frac{2}{5} \Rightarrow DE = \frac{2}{5} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Ta có: } DO^2 = DE.DS \Rightarrow x^2 = \frac{2}{5} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow y = \frac{x\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Ta có: } OE.SD = OS.OD \Rightarrow OE = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x\sqrt{15}}{5}; CE = \frac{2x\sqrt{10}}{5}; SD = \frac{x\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Ta có: } S_{OCD} = S_{SCD} \cdot \cos \angle SCD, ABCD$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} OC.OD = \frac{1}{2} CE.SD \cdot \cos \angle SCD, ABCD$$

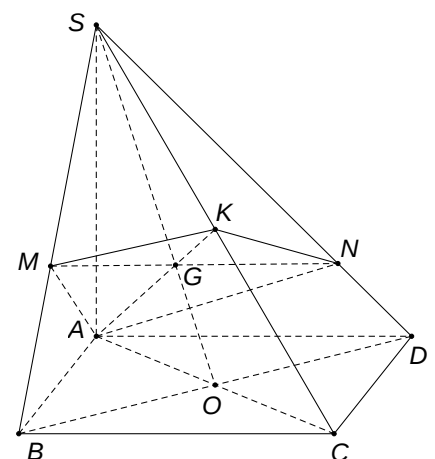
$$\Rightarrow x^2 = \frac{2x\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{x\sqrt{10}}{2} \cdot \cos \angle SCD, ABCD$$

$$\Rightarrow \cos \angle SCD, ABCD = \frac{1}{2}.$$

3. Lời giải

Gọi O là tâm hình chữ nhật ABCD.

Ta có: $SG = \frac{2}{3} SO$ và $K = AG \cap SC$ và K là trung điểm SC



$$\frac{V_{SMAK}}{V_{SBAC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SA}{SC} \cdot \frac{SK}{SC} \Rightarrow V_{SMAK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot V_{SBAC} = \frac{1}{4} \frac{SM}{SB} \cdot V_{SBAC} = \frac{1}{12} \frac{SM}{SB} \cdot a.b.c$$

$$\text{Tương tự } V_{SNAK} = \frac{1}{12} \frac{SN}{SC} \cdot a.b.c.$$

$$\text{Do đó: } V_{SAMKN} = \frac{1}{12} \left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SC} \right) a.b.c$$

Trong mp (SBD):

$$\frac{S_{SMN}}{S_{SBD}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{S_{SMG} + S_{SGN}}{2S_{SBO}} = \frac{S_{SMG}}{2S_{SBO}} + \frac{S_{SGN}}{2S_{SBO}} = \frac{SG \cdot SM}{2 \cdot SO \cdot SB} + \frac{SG \cdot SN}{2 \cdot SO \cdot SB} \Rightarrow \frac{SM \cdot SN}{SB \cdot SC} = \frac{1}{3} \left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SC} \right)$$

$$\text{Do M, N lần lượt nằm trên cạnh SB, SD nên: } \frac{SB}{2} \leq SM \leq SB \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{SM}{SB} \leq 1$$

$$\text{Đặt } t = \frac{SM}{SB}, \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \right) \text{ thì } t \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{3} \left(t + \frac{SN}{SC} \right) \Leftrightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{t}{3t-1}.$$

Nhận thấy V_{SAMKN} đạt GTLN, GTNN nếu:

$$f(t) = \frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SC} = t + \frac{t}{3t-1} \text{ với } \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 1 - \frac{1}{(3t-1)^2} = \frac{9t^2 - 6t}{(3t-1)^2}$$

$$\text{Nên } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}, t = 0 \text{ (loại).}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}, f(1) = \frac{3}{2}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Do vậy } V_{SAMKN} = \frac{abc}{8} \text{ là GTLN khi M là trung điểm SB hoặc M}$$

trùng với B.

$$V_{SAMKN} = \frac{abc}{9} \text{ là GTNN.}$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Xét các số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

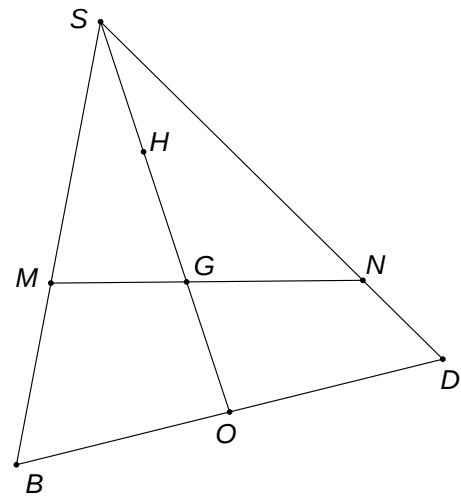
$$P = \frac{2b+c}{a} + \frac{2c+a}{b} + \frac{2a+b}{c} + \frac{18abc}{ab+bc+ca}.$$

$$\text{HD: } P = \frac{2b+c}{a} + 1 + \frac{2c+a}{b} + 1 + \frac{2a+b}{c} + 1 + \frac{18abc}{ab+bc+ca} - 3.$$

$$= \frac{b+3}{a} + \frac{c+3}{b} + \frac{a+3}{c} + \frac{18abc}{ab+bc+ca} - 3$$

$$= \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{18}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} - 3 \geq 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{18}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$\geq 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{18}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}. (1)$$



Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = 3$ (2)

Đặt $t = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$. Xét hàm $f(t) = 3t + \frac{18}{t}$ trên $[3; +\infty)$

Ta có: $f(t) \geq 15 = f(3)$. (3)

Vậy $\min P = 15$ đạt được khi các đẳng thức (1), (2), (3) xảy ra.

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{a}{c} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3, \text{ hay } a = b = c = 1. \\ a = b = c \end{cases}$$