

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 3; 2)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 5 = 0$. Phương trình nào sau đây là phương trình của đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) ?

- A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $u = (1; -2; 3)$ và $v = (2; -2; 1)$. Tích vô hướng $u \cdot v$ bằng

A. 9. B. 1. C. 3. D. -1.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $x = 0$ B. $z = 0$ C. $y = 0$ D. $x + y = 0$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

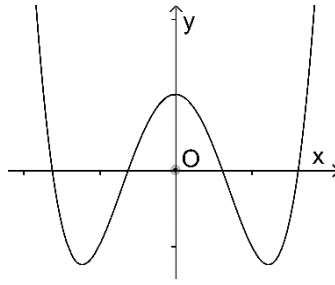
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 5: Trên khoảng $(0; +\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{-\frac{4}{5}}$ là

- A. $-\frac{5}{9}x^{-\frac{9}{5}} + C$. B. $\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}} + C$. C. $5x^{\frac{1}{5}} + C$. D. $-\frac{9}{5}x^{-\frac{9}{5}} + C$.

Câu 6: Hàm số nào dưới đây có đồ thị trong hình vẽ?



A. $y = -x^4 + x^2 + 1$. B. $y = x^4 - 3x^2 - 1$. C. $y = x^4 - 3x^2 + 1$. D. $y = x^4 + x^2 + 1$.

Câu 7: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 3, u_4 = -3$. Công sai d của cấp số cộng đã cho bằng
A. -6. B. -1. C. -9. D. 6.

Câu 8: Cho khối nón có chiều cao $h = 6$ và bán kính đáy $r = 3$. Thể tích khối nón đã cho bằng
A. 18π . B. 36π . C. 54π . D. 6π .

Câu 9: Tính $I = \int 3^x dx$.
A. $I = \frac{3^x}{\ln 3} + C$. B. $I = 3^x \ln 3 + C$. C. $I = 3^x + C$. D. $I = 3^x + \ln 3 + C$.

Câu 10: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là
A. $x = 2$. B. $x = -1$. C. $y = 2$. D. $x = 1$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích của khối chóp đã cho bằng
A. $\frac{2}{3}a^3$. B. $2a^3$. C. $4a^3$. D. $\frac{4}{3}a^3$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; 4)$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	
y'	+	0	-	+	0	-

y	$-\infty$	1	0	2	-1
-----	-----------	---	---	---	----

Phương trình $f(x) + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 0 B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 13: Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_2^1 g(x) dx = 1$ thì $\int_1^2 [f(x) + 2g(x)] dx$ bằng
A. 5. B. 1. C. -1. D. 0.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -3; 5), B(0; 1; -1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 14$. B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 56$.
C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 14$. D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 56$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $M(1, -2, 2), N(2, 0, -1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng MN . Phương trình mặt phẳng (P) là

- A. $x + 2y - 3z - 3 = 0$. B. $x - 2y - 3z + 1 = 0$. C. $x + 2y - 3z + 9 = 0$. D. $x - 2y - 3z - 11 = 0$.

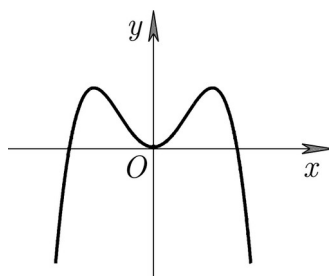
Câu 16: Tập xác định D của hàm số $y = (2-x)^{\frac{1}{3}}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. B. $D = (2; +\infty)$. C. $D = (-\infty; 2)$. D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 17: Môđun của số phức $z = 4 - 3i$ bằng

- A. 5. B. 25. C. 7. D. $\sqrt{7}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(x) = ax^4 + bx^2 + c$ và có đồ thị như trong hình bên



Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 19: Trên đoạn $[1; 5]$, hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

- A. $x = 5$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Câu 20: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq 0$ là:

- A. $\left[-1; \frac{-1}{2}\right]$. B. $[0; +\infty)$. C. $(-1; 0]$. D. $(-\infty; 0]$.

Câu 21: Với mọi số thực dương a , $\log_3^3(a^2)$ bằng

- A. $6\log_3^3 a$. B. $\frac{1}{8}\log_3^3 a$. C. $8\log_3^3 a$. D. $2\log_3^3 a$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 23: Thể tích của khối cầu biết rằng diện tích của mặt cầu bằng 36π là

- A. 9π B. 36π C. $\frac{\pi}{9}$ D. $\frac{\pi}{3}$

Câu 24: Đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2-3x}$ là

- A. $y' = 2^{x^2-3x-1}$ B. $y' = (2x-3)2^{x^2-3x} \ln 2$
C. $y' = 2^{x^2-3x} \ln 2$ D. $y' = (2x-3)2^{x^2-3x-1}$

Câu 25: Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục, ta được thiết diện là một hình vuông có chu vi là 8. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng:

- A. 8π B. $\frac{2}{3}\pi$ C. 2π D. 4π

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 4]$ bằng

- A. $f(3)$ B. $f(1)$ C. $f(4)$ D. $f(2)$

Câu 27: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = 2a$ và $AA' = \sqrt{3}a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

- A. 60° B. 30° C. 45° D. 90°

Câu 28: Với mọi số thực dương a, b thỏa mãn $9^{\log_3 ab} = a$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a^2b = 1$ B. $a^2b = 3$ C. $ab^2 = 1$ D. $ab^2 = 2$

Câu 29: Cho 2 số phức $z_1 = m + i$ và $z_2 = m + (m+2)i$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để $z_1 \cdot z_2$ là một số thuần ảo?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 3 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính bằng

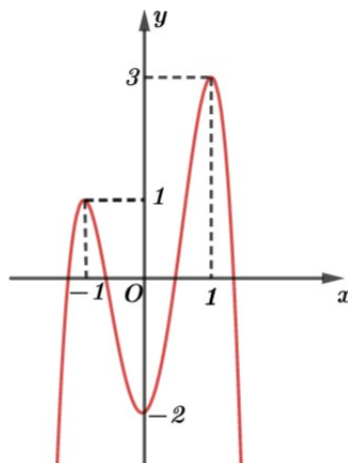
- A. $\sqrt{21}$ B. 4 C. 5 D. 3

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn phương trình $i\bar{z} + (1+i)z = 2+3i$. Điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$ là

- A. $Q(2, -1)$ B. $P(3, -4)$ C. $N(2, 1)$ D. $M(3, 4)$

- Câu 32:** Lớp 12B1 có 22 học sinh gồm 15 nam và 7 nữ. Cần chọn và phân công 4 học sinh lao động trong đó 1 bạn lau bảng, 1 bạn lau bàn và 2 bạn quét nhà. Có bao nhiêu cách chọn và phân công sao cho trong 4 học sinh đó có ít nhất 1 bạn nữ.
- A. 71400. B. 87780. C. 142800. D. 32760.

- Câu 33:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như trong hình bên. Tích phân $\int_0^1 |f'(2x-1)| dx$ bằng



- A. 8. B. 4. C. 2. D. 1.
- Câu 34:** Cho khối trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{3}$ và diện tích xung quanh bằng $32\pi\sqrt{3}$. Gọi A và B là hai điểm lần lượt thuộc hai đường tròn đáy của khối trụ sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30° , khoảng cách AB và trục của hình trụ bằng
- A. $\frac{4\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $4\sqrt{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

- Câu 35:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)+3)=0$ là

- A. 6. B. 3. C. 5. D. 4.
- Câu 36:** Có tất cả bao nhiêu số phức w thỏa mãn điều kiện $2w\overline{w}=1$ và $\frac{w}{w^2}$ là số thuần ảo?
- A. 4. B. 6. C. 3. D. 2.

- Câu 37:** Tập nghiệm của bất phương trình $(4^x - 65 \cdot 2^x + 64)[2 - \log_3(x+3)] \geq 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?
- A. 2 B. 3 C. 4 D. Vô số

- Câu 38:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=-1+2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) , đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d . Phương trình đường thẳng Δ là:

A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$. B. $\frac{x}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{-1}$.
 C. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$. D. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

- Câu 39:** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x \cdot \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=-\frac{121}{225}$, khi đó $F(\pi)$ bằng
- A. $\frac{242}{225}$. B. $\frac{208}{225}$. C. $\frac{121}{225}$. D. $-\frac{363}{225}$.

- Câu 40:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 36$ và $(S'): (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 4$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng $2\pi\sqrt{11}$. Khoảng cách từ $M(2; -1; 3)$ đến (P) bằng
- A. $\frac{19}{3}$. B. $\frac{17}{7}$. C. $\frac{8}{9}$. D. $\frac{19}{2}$.

- Câu 41:** Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - (m+2)z + m^2 = 0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $|z_1|^3 + |z_2|^3 = 16$.
- A. 3. B. 4. C. 5. D. 2.

- Câu 42:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $AB=\sqrt{2}a$, $AD=2a$, $\angle ABC=45^\circ$ và góc giữa hai mặt phẳng (SBC) , (SCD) bằng 30° . Thể tích khối chóp đã cho bằng
- A. $3a^3$. B. a^3 . C. $\frac{3a^3}{4}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

- Câu 43:** Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$; với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1, 2$ và 3 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$.

B. $\frac{71}{9}$.

C. $\frac{71}{6}$.

D. $\frac{64}{9}$.

Câu 44: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x + y > 0; -4 \leq x \leq 4$ và $\log_3 \frac{(x+2y)}{4} + x^2 + 2y^2 + 3xy - 4x - 4y \leq 0$?

A. 11.

B. 10

C. 12.

D. 13.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x^2 + 9x)(x^2 - 9)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 3x| + 2m - m^2)$ có không quá 6 điểm cực trị?

A. 5.

B. 4.

C. 7.

D. 2.

Câu 46: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'; BC; CC'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ đã cho thành 2 phần, phần chứa điểm B có thể tích là V_1 . Tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

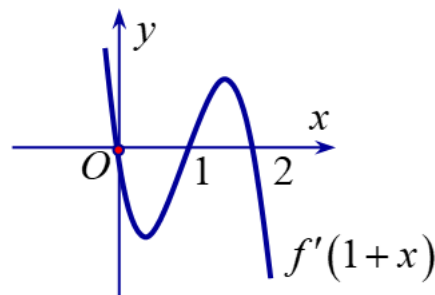
A. $\frac{61}{144}$.

B. $\frac{37}{144}$.

C. $\frac{49}{144}$.

D. $\frac{25}{144}$.

Câu 47: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(1+x)$ có đồ thị như trong hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho hàm số $g(x) = f(-x^2 + 2x - 2022 + m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?



A. 2021.

B. 2023.

C. 2022.

D. 2024.

Câu 48: Cho phương trình $\ln \left(\frac{3x-2}{4y-1} \right) = -3x^2 + 2x(2y-1) + 4y + 1$ với x, y là các số thực dương. Tính

giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{3x}{y^2 + 3}$.

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{9}{7}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. 2.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và các điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(-1;2;3)$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thỏa $d = 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $T = 4x_0 - 3y_0 - 2z_0$ bằng

A. 2. B. 3. C. 8. D. 4.

Câu 50: Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z-i|=1, |z|=|w|$ và $z.w$ là số phức thuần ảo với phần ảo dương. Giá trị nhỏ nhất của $|w-4-4i|$ bằng

A. $\sqrt{29}$. B. 6. C. 4. D. $\sqrt{35}$.

----- HẾT -----

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.A	3.B	4.C	5.C	6.C	7.A	8.A	9.A	10.D
11.A	12.D	13.B	14.A	15.C	16.C	17.A	18.D	19.B	20.C
21.C	22.C	23.B	24.B	25.D	26.D	27.A	28.C	29.A	30.D
31.C	32.A	33.B	34.A	35.B	36.B	37.C	38.C	39.C	40.A
41.A	42.D	43.B	44.C	45.A	46.C	47.B	48.A	49.D	50.C

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 3; 2)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 5 = 0$. Phương trình nào sau đây là phương trình của đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) ?

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Lời giải

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): n_{(P)} = (2; -1; 1)$, nên vectơ chỉ phương của đường thẳng $d: u_d = (2; -1; 1)$.

Mặt khác đường thẳng d qua $M(-1; 3; 2)$, suy ra phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $u = (1; -2; 3)$ và $v = (2; -2; 1)$. Tích vô hướng $u \cdot v$ bằng

A. 9. B. 1. C. 3. D. -1.

Lời giải

Ta có $u \cdot v = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 9$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $x = 0$ B. $z = 0$ C. $y = 0$ D. $x + y = 0$

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình là $z = 0$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 5: Trên khoảng $(0; +\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{-\frac{4}{5}}$ là

- A. $-\frac{5}{9}x^{-\frac{9}{5}} + C$. B. $\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}} + C$. C. $5x^{\frac{1}{5}} + C$ D. $-\frac{9}{5}x^{-\frac{9}{5}} + C$.

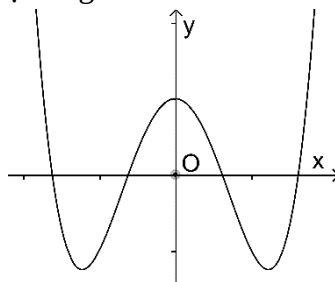
Lời giải

Chọn C

$$\int f(x) dx = \int x^{-\frac{4}{5}} dx = \frac{x^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}} + C = 5x^{\frac{1}{5}} + C$$

Ta có:

Câu 6: Hàm số nào dưới đây có đồ thị trong hình vẽ?



- A. $y = -x^4 + x^2 + 1$. B. $y = x^4 - 3x^2 - 1$. C. $y = x^4 - 3x^2 + 1$ D. $y = x^4 + x^2 + 1$.

Lời giải

+ Đồ thị hàm trùng phương với hệ số $a > 0$

+ Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

+ Đồ thị giao với trục tung tại điểm $(0;1)$

Câu 7: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 3, u_4 = -3$. Công sai d của cấp số cộng đã cho bằng

- A. -6 B. -1 . C. -9 . D. 6 .

Lời giải

$$d = u_4 - u_3 = -3 - 3 = -6$$

- Câu 8:** Cho khối nón có chiều cao $h=6$ và bán kính đáy $r=3$. Thể tích khối nón đã cho bằng
A. 18π . **B.** 36π . **C.** 54π . **D.** 6π .

Lời giải

Chọn A

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 6 = 18\pi$$

Thể tích khối nón là:

- Câu 9:** Tính $I = \int 3^x dx$.

- A.** $I = \frac{3^x}{\ln 3} + C$. **B.** $I = 3^x \ln 3 + C$. **C.** $I = 3^x + C$. **D.** $I = 3^x + \ln 3 + C$.

Lời giải

Ta có $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ nên $I = \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

- Câu 10:** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là

- A.** $x=2$. **B.** $x=-1$. **C.** $y=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

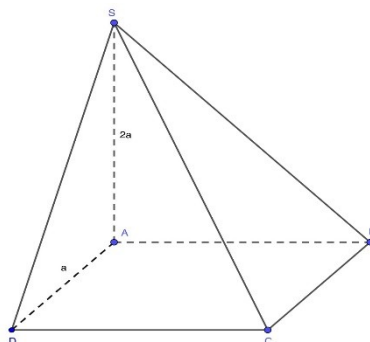
Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $x=1$; $y=2$.

- Câu 11:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A.** $\frac{2}{3}a^3$. **B.** $2a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $\frac{4}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $V = \frac{1}{3} S_{\Delta} S_{ABCD} = \frac{1}{3} 2a \cdot a^2 = \frac{2}{3} a^3$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; 4)$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1	2	3	4	
y'		+	0	-	+	0	-
y	$-\infty$			1		0	
						2	
							-1

Phương trình $f(x) + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 0 B. 3. C. 2. **D. 1.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -1$ (1)

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$.

Từ bảng biến thiên thấy phương trình (1) có 1 nghiệm.

Câu 13: Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int_2^1 g(x)dx = 1$ thì $\int_1^2 [f(x) + 2g(x)]dx$ bằng

- A. 5. **B. 1.** C. -1. D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$\int_1^2 [f(x) + 2g(x)]dx = \int_1^2 f(x)dx + 2 \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 f(x)dx - 2 \int_2^1 g(x)dx = 3 - 2 = 1.$$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -3; 5), B(0; 1; -1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 14$ B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 56$.
C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 14$. D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 56$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu đã cho có tâm là trung điểm $I(1; -1; 2)$ của AB và bán kính $R = IA = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 14$.

- Câu 15:** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $M(1, -2, 2), N(2, 0, -1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng MN . Phương trình mặt phẳng (P) là
A. $x + 2y - 3z - 3 = 0$ **B.** $x - 2y - 3z + 1 = 0$ **C.** $x + 2y - 3z + 9 = 0$ **D.** $x - 2y - 3z - 11 = 0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (1, 2, -3)$

(P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng MN nên suy ra:

$$(P): 1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y+2) - 3 \cdot (z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3z + 9 = 0$$

- Câu 16:** Tập xác định D của hàm số $y = (2-x)^{\frac{1}{3}}$ là
A. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ **B.** $D = (2; +\infty)$ **C.** $D = (-\infty; 2)$ **D.** $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi $2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (-\infty; 2)$.

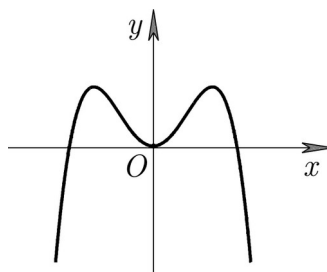
- Câu 17:** Môđun của số phức $z = 4 - 3i$ bằng

- A.** 5 **B.** 25 **C.** 7 **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 18:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(x) = ax^4 + bx^2 + c$ và có đồ thị như trong hình bên



Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A.** 3 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_1 \\ x=0 \ (x_1 < 0 < x_2) \\ x=x_2 \end{cases}$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$			$f(x_2)$	
		$f(x_1)$			$-\infty$

Quan sát bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta thấy hàm số đã cho có 1 điểm cực đại.

- Câu 19:** Trên đoạn $[1;5]$, hàm số $y=x+\frac{9}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm
A. $x=5$. **B.** $x=3$ **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1;5]$.

Ta có: $y'=\left(x+\frac{9}{x}\right)'=1-\frac{9}{x^2}$.

$$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 1-\frac{9}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \in [1;5] \\ x=-3 \notin [1;5] \end{cases}$$

Có $\begin{cases} f(1)=10 \\ f(3)=6 \Rightarrow \min_{[1;5]} y=f(3)=6 \\ f(5)=\frac{34}{5} \end{cases}$.

- Câu 20:** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq 0$ là:

- A.** $\left[-1; \frac{-1}{2}\right]$. **B.** $[0; +\infty)$. **C.** $(-1; 0]$ **D.** $(-\infty; 0]$.

Lời giải

Điều kiện $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Kết hợp với điều kiện $-1 < x \leq 0$.

Câu 21: Với mọi số thực dương a , $\log_3^3(a^2)$ bằng

- A. $6\log_3^3 a$. B. $\frac{1}{8}\log_3^3 a$. **C. $8\log_3^3 a$** . D. $2\log_3^3 a$.

Lời giải

Ta có $\log_3^3(a^2) = (2\log_3 a)^3 = 8\log_3^3 a$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. **C. 2.** D. 3.

Lời giải

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f'(-1)=0$,

$f'(1)$ không xác định nhưng do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $f(1)$

và $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "-" khi đi qua các điểm $x=-1$, $x=1$ nên hàm số đã cho đạt cực đại tại 2 điểm này.

Vậy số điểm cực đại của hàm số đã cho là 2.

Câu 23: Thể tích của khối cầu biết rằng diện tích của mặt cầu bằng 36π là

- A. 9π B. 36π **C. $\frac{\pi}{9}$** D. $\frac{\pi}{3}$

Lời giải

Ta có:

$$S_c = 4\pi R^2 = 36\pi \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3.$$

$$\Rightarrow V_c = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi.$$

Câu 24: Đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2-3x}$ là

- A. $y' = 2^{x^2-3x-1}$. **B. $y' = (2x-3)2^{x^2-3x} \ln 2$** .
- C. $y' = 2^{x^2-3x} \ln 2$. D. $y' = (2x-3)2^{x^2-3x-1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = (2x - 3)2^{x^2 - 3x} \ln 2$.

Câu 25: Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục, ta được thiết diện là một hình vuông có chu vi là 8. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng:

- A. 8π . B. $\frac{2}{3}\pi$. C. 2π . D. 4π .

Lời giải

Chọn D

Cạnh của hình vuông là 2

Đường sinh của hình trụ là $l = 2$, bán kính đáy của hình trụ là $r = 1$

Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng: $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 1 \cdot 2 = 4\pi$

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x - 2)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 4]$ bằng

- A. $f(3)$. B. $f(1)$. C. $f(4)$. D. $f(2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có BBT

x	0		1		2		4	
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+	
$f(x)$								

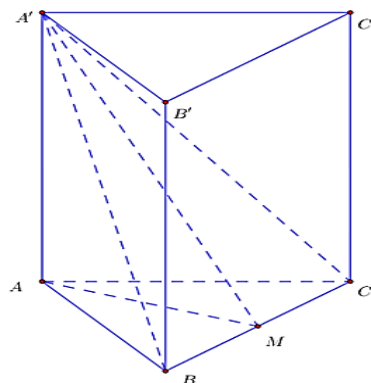
$\nearrow$ $\searrow$ $f(2)$ $\nearrow$

Câu 27: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = 2a$ và $AA' = \sqrt{3}a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC

$$\Rightarrow AM \perp BC \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác } (ABC) \cap (A'BC) = BC \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $(\overline{ABC}); (\overline{A'BC}) = \overline{A'MA}$.

$$\tan \widehat{A'MA} = \frac{AA'}{AM} = \frac{AA'}{\frac{1}{2}BC} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{1}{2} \cdot 2a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{A'MA} = 60^\circ$$

Xét tam giác $A'MA$ vuông tại A có

Câu 28: Với mọi số thực dương a, b thỏa mãn $9^{\log_3 ab} = a$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a^2b = 1$. B. $a^2b = 3$. C. $ab^2 = 1$! D. $ab^2 = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$9^{\log_3 ab} = a \Leftrightarrow \log_3 ab = \log_3 a \Leftrightarrow 2 \log_3 ab = \log_3 a \Leftrightarrow (ab)^2 = a \Leftrightarrow ab^2 = 1$$

Phát hành từ website Tailieuchuan.vn

Câu 29: Cho 2 số phức $z_1 = m + i$ và $z_2 = m + (m + 2)i$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để $z_1 \cdot z_2$ là một số thuần ảo?

- A. 1! B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$z_1 z_2 = (m + i)(m + (m + 2)i) = m^2 - m - 2 + (m(m + 2) + m)i$$

$$\text{Để } z_1 z_2 \text{ là số thuần ảo thì } m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

Vậy có 1 giá trị dương của tham số m để $z_1 z_2$ là một số thuần ảo.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 3 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính bằng

- A. $\sqrt{21}$. B. 4. C. 5. D. 3!

Lời giải

Chọn D

Từ phương trình $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ ta có tâm $I(1, -2, 3)$, bán kính $R = 5$

$$d(I, (P)) = \frac{|1 + 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 4$$

Ta có :

$$\text{Suy ra : bán kính đường tròn là } r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn phương trình $i\bar{z} + (1+i)z = 2+3i$. Điểm biểu diễn số phức $\bar{z}$ là
A. $Q(2, -1)$. **B.** $P(3, -4)$. **C.** $N(2, 1)$. **D.** $M(3, 4)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$

$$i\bar{z} + (1+i)z = 2+3i \Leftrightarrow i(a-bi) + (1+i)(a+bi) = 2+3i$$

$$\Leftrightarrow ai + b + a + bi + ai - b = 2 + 3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \bar{z} = 2 + i$$

Câu 32: Lớp 12B1 có 22 học sinh gồm 15 nam và 7 nữ. Cần chọn và phân công 4 học sinh lao động trong đó 1 bạn lau bảng, 1 bạn lau bàn và 2 bạn quét nhà. Có bao nhiêu cách chọn và phân công sao cho trong 4 học sinh đó có ít nhất 1 bạn nữ.

A. 71400 **B.** 87780 **C.** 142800 **D.** 32760

Lời giải

Chọn 4 học sinh: có C_{22}^4 cách chọn.

Từ 4 học sinh đã được chọn ta chọn ra 1 bạn làm nhiệm vụ lau bảng: có C_4^1 cách chọn.

Tiếp theo chọn 1 bạn trong số 3 bạn còn lại để làm nhiệm vụ lau bàn: có C_3^1 cách chọn.

Hai bạn còn lại sẽ làm nhiệm vụ quét nhà.

Khi đó tổng số cách chọn và sắp xếp công việc là $C_{22}^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$.

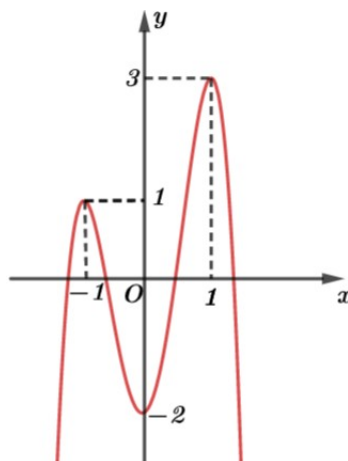
Gọi biến cố A : “ Trong 4 học sinh đó có ít nhất 1 bạn nữ”.

Khi đó $\bar{A}$: “ 4 học sinh được chọn đều là nam”.

Tương tự như trên ta có $n(\bar{A}) = C_{15}^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$.

Vậy $n(A) = C_{22}^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 - C_{15}^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 71400$.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như trong hình bên. Tích phân $\int_0^1 f'(2x-1)dx$ bằng



A. 8.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

+ Dựa vào đồ thị hàm số ta có nhận xét $f'(x) \leq 0, \forall x \in [-1; 0]$ và $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0; 1]$.

+ Xét $\int_0^1 f'(2x-1)dx$.

Đặt $t = 2x - 1 \Rightarrow \frac{1}{2}dt = dx$.

Đổi cận:

x	0	1
t	-1	1

+ Khi đó $\int_0^1 f'(2x-1)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f'(t)dt = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 f'(t)dt + \int_0^1 f'(t)dt \right] = \frac{1}{2} \left[- \int_{-1}^0 f'(t)dt + \int_0^1 f'(t)dt \right]$

$$= \frac{1}{2} \left[-f(t) \Big|_{-1}^0 + f(t) \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{2} \left[-f(0) + f(-1) + f(1) - f(0) \right] = \frac{1}{2} \left[-(-2) + 1 + 3 - (-2) \right] = 4$$

Câu 34: Cho khối trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{3}$ và diện tích xung quanh bằng $32\pi\sqrt{3}$. Gọi A và B là hai điểm lần lượt thuộc hai đường tròn đáy của khối trụ sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30° , khoảng cách AB và trục của hình trụ bằng

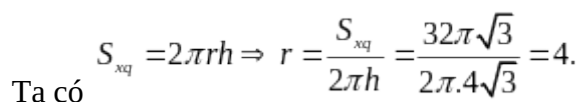
A. $\frac{4\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $4\sqrt{3}$.

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Kẻ đường sinh $AA' \Rightarrow AA' \parallel OO' \Rightarrow OO' \parallel (ABA')$

$$\Rightarrow d(OO', AB) = d(OO', (ABA')) = d(O', (ABA')).$$

Gọi H là trung điểm $A'B \Rightarrow \begin{cases} O'H \perp A'B \\ O'H \perp AA' \end{cases} \Rightarrow O'H \perp (ABA') \Rightarrow d(O', (ABA')) = O'H.$

Lại có $\angle(OO', AB) = \angle(AA', AB) = \angle BAA' = 30^\circ$.

Trong tam giác vuông ABA' có $BA' = AA' \cdot \tan \angle BAA' = 4\sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ = 4$.

Suy ra tam giác $A'BO'$ đều, có cạnh bằng 4 nên $d(OO', AB) = O'H = \frac{4\sqrt{3}}{2}$.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)+3)=0$ là

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$.

$$f'(f(x)+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+3=1 \\ f(x)+3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=-2 \\ f(x)=-4 \end{cases}$$

Phương trình $f(x) = -2$ có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = -4$ có một nghiệm.

Vậy số nghiệm phân biệt của phương trình $f'(f(x)+3)=0$ là 3.

Phát hành từ website Tailieuchuan.vn

- Câu 36:** Có tất cả bao nhiêu số phức w thỏa mãn điều kiện $2w\bar{w}=1$ và $\frac{w}{w^2}$ là số thuần ảo?
A. 4. B. 6. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Đặt $w = x + yi$.

Điều kiện: $\bar{w}^2 \neq 0 \Leftrightarrow w \neq 0$

Ta có: $2w\bar{w}=1 \Leftrightarrow |w|^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$.

Ta có: $\frac{w}{w^2} = \frac{w^3}{|w|^4} = \frac{(x+yi)^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{3x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^2}i$

Để $\frac{w}{w^2}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $x^3 - 3xy^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3y^2 \end{cases}$

Với $x=0 \Rightarrow y = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$.

Với $x^2 = 3y^2 \Rightarrow 4y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pm\sqrt{2}}{4}$, với mỗi giá trị y ta được 2 giá trị x nên có 4 cặp (x, y) .

Vậy có tất cả 6 số phức w cần tìm.

- Câu 37:** Tập nghiệm của bất phương trình $(4^x - 65 \cdot 2^x + 64)[2 - \log_3(x+3)] \geq 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?
A. 2 B. 3 C. 4 D. Vô số

Lời giải

Ta có $(4^x - 65 \cdot 2^x + 64)[2 - \log_3(x+3)] \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^x - 65 \cdot 2^x + 64 \leq 0 \\ 2 - \log_3(x+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq 2^x \leq 64 \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \geq 64 \\ 2^x \leq 1 \\ -3 < x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq 0 \\ -3 < x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ -3 < x \leq 0 \end{cases}$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0; 6\}$$

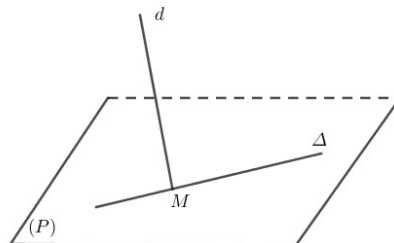
Vậy tập nghiệm của bất phương trình có 4 giá trị nguyên.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = -1+2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$.

Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) , đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d . Phương trình đường thẳng Δ là:

A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$. B. $\frac{x}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{-1}$.
 C. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$. D. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

Lời giải



Xét phương trình $1+t - 2(2-t) + (-1+2t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại $M(2;1;1)$.

Gọi $u_d = (1; -1; 2)$ và $n_p = (1; -2; 1)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) . Khi đó một vectơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $u_\Delta = [u_d, n_p] = (3; 1; -1)$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x \cdot \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=-\frac{121}{225}$, khi đó $F(\pi)$ bằng

A. $\frac{242}{225}$. B. $\frac{208}{225}$. C. $\frac{121}{225}$. D. $-\frac{363}{225}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\cos x \cdot \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Có } \int f'(x) dx &= \int \cos x \cdot \cos^2 2x dx = \int \cos x \cdot \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \int \frac{\cos x}{2} dx + \int \frac{\cos x \cdot \cos 4x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x dx + \frac{1}{4} \int (\cos 5x + \cos 3x) dx = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{20} \sin 5x + \frac{1}{12} \sin 3x + C \end{aligned}$$

Suy ra $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{20} \sin 5x + \frac{1}{12} \sin 3x + C, \forall x \in \mathbb{R}$. Mà $f(0)=0 \Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{20} \sin 5x + \frac{1}{12} \sin 3x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó:

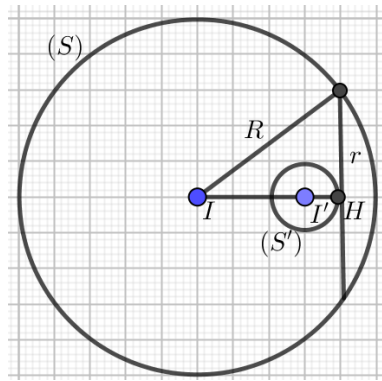
$$\begin{aligned} F(\pi) - F(0) &= \int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{20} \sin 5x + \frac{1}{12} \sin 3x \right) dx \\ &= \left(-\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{100} \cos 5x - \frac{1}{36} \cos 3x \right) \Big|_0^\pi = \frac{242}{225} \\ \Rightarrow F(\pi) &= F(0) + \frac{242}{225} = -\frac{121}{225} + \frac{242}{225} = \frac{121}{225} \end{aligned}$$

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 36$ và $(S'): (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 4$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng $2\pi\sqrt{11}$. Khoảng cách từ $M(2; -1; 3)$ đến (P) bằng

A. $\frac{19}{3}$ B. $\frac{17}{7}$. C. $\frac{8}{9}$. D. $\frac{19}{2}$.

Lời giải

Lời giải



(S) $I(1; -1; 2)$ $R=6$ (S') $I'(-1; 0; 0)$
 Mặt cầu có tâm , bán kính , mặt cầu có tâm , bán kính
 $R'=2$

Vì $II'=3 < R - R'=4$ (S') (S)
 nên mặt cầu nằm trong mặt cầu .

(P) (S') $\Rightarrow d(I', (P)) = R' = 2$ (P) (S)
 Mặt phẳng tiếp xúc ; cắt theo giao tuyến là một
 đường tròn có chu vi bằng $2\pi\sqrt{11}$ nên $d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = 5$.

$d(I, (P)) - d(I', (P)) = II'$ (P) (S')
 Nhận thấy nên tiếp điểm H của và cũng là tâm đường
 tròn giao của (P) (S) (P) $II' = (-2; 1; -2)$
 và . Khi đó, là mặt phẳng đi qua H , nhận làm
 vecto pháp tuyến.

$$IH = \frac{5}{3}II' \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\frac{7}{3} \\ y_H = \frac{2}{3} \\ z_H = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

Ta có:

(P) $-2\left(x + \frac{7}{3}\right) + \left(y - \frac{2}{3}\right) - 2\left(z + \frac{4}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2z + 8 = 0$
 Phương trình mặt phẳng :

Khoảng cách từ M đến (P) $d(M, (P)) = \frac{19}{3}$.

Câu 41: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - (m+2)z + m^2 = 0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $|z_1|^3 + |z_2|^3 = 16$.

A. 3. B. 4. C. 5. D. 2.

Lời giải

Ta có $\Delta = -3m^2 + 4m + 4$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{2}{3} \\ m > 2 \end{cases}$$

TH 1:

Phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$.

Khi đó $|z_1|^3 + |z_2|^3 = 16 \Leftrightarrow 2|z_1|^3 = 16 \Leftrightarrow |z_1| = 2 \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 = 4$.

Theo Vi-ét ta có $m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$. Kết hợp điều kiện ta được $m = -2$.

TH 2: $\Delta > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < 4$. Vì

$$\begin{aligned} |z_1|^3 + |z_2|^3 &= |z_1 + z_2|^3 - 3|z_1 z_2|(|z_1| + |z_2|) \\ &= |z_1 + z_2|^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2) \\ &= (m+2)^3 - 3m^2(m+2) \\ &= -2m^3 + 12m + 8 \end{aligned}$$

nên

$$-2m^3 + 12m + 8 = 16 \Leftrightarrow -2m^3 + 12m - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 + \sqrt{3} \\ m = -1 - \sqrt{3} \\ m = 2 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $m = 2; m = -1 + \sqrt{3}$.

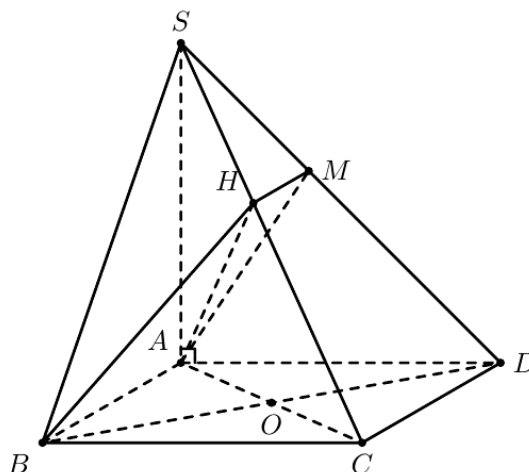
Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 42: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $AB = \sqrt{2}a$, $AD = 2a$, $\angle ABC = 45^\circ$ và góc giữa hai mặt phẳng (SBC) , (SCD) bằng 30° . Thể tích khối chóp đã cho bằng

- A. $3a^3$. B. a^3 . C. $\frac{3a^3}{4}$. D. $\frac{2a^3}{3}$!

Lời giải

Chọn D



Trong ΔABC có $AC = \sqrt{BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos 45^\circ} = a\sqrt{2}$ suy ra ΔABC vuông cân tại A .

Ta có $\left. \begin{matrix} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{matrix} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAC)$. Kẻ $AH \perp SC (H \in SC)$ và $HM \parallel CD (M \in SD)$.

Ta có $\left. \begin{matrix} SC \perp AH \\ SC \perp HM \end{matrix} \right\} \Rightarrow SC \perp (ABHM)$. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(SBC), (SCD)$ bằng góc

giữa $(BH, HM) \Rightarrow \begin{cases} \angle BHM = 30^\circ \\ \angle BHM = 150^\circ \end{cases}$.

Ta có $\left. \begin{matrix} SC \perp AH \\ CD \perp AH \end{matrix} \right\} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow AH \perp HM$ hay góc $\angle AHM = 90^\circ \Rightarrow \angle BHM > 90^\circ$.

Do đó $\angle BHM = 150^\circ \Rightarrow \angle BHA = 60^\circ$.

Trong ΔABH vuông tại A có $AH = \frac{AB}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Trong ΔSCA vuông tại A có $\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Leftrightarrow SA = a$.

Vậy thể tích khối chóp là $V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = \frac{2}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 43: Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - x$; với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1, 2$ và 3 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$.

B. $\frac{71}{9}$ **!**

C. $\frac{71}{6}$.

D. $\frac{64}{9}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + 3$ và $g'(x) = 3mx^2 + 2nx - 1$.

$h(x) = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1, 2$ và 3 khi

$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $-1, 2$ và 3

$$\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = t(x+1)(x-2)(x-3) \quad (t=4a) (*)$$

Thay $x=0$ vào hai vế của $(*)$ ta được:

$$f'(0) - g'(0) = 6t \Leftrightarrow 3 - (-1) = 6t \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ là

$$S = \int_{-1}^3 \left| \frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3) \right| dx = \frac{71}{9}.$$

- Câu 44:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x + y > 0; -4 \leq x \leq 4$ và $\log_3 \frac{(x+2y)}{4} + x^2 + 2y^2 + 3xy - 4x - 4y \leq 0$?
- A. 11. B. 10 C. 12. D. 13.

Lời giải

+ Điều kiện: $x + 2y > 0$

+ Do $x + y > 0$ nên

$$\log_3 \frac{(x+2y)}{4} + x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y \leq 0$$

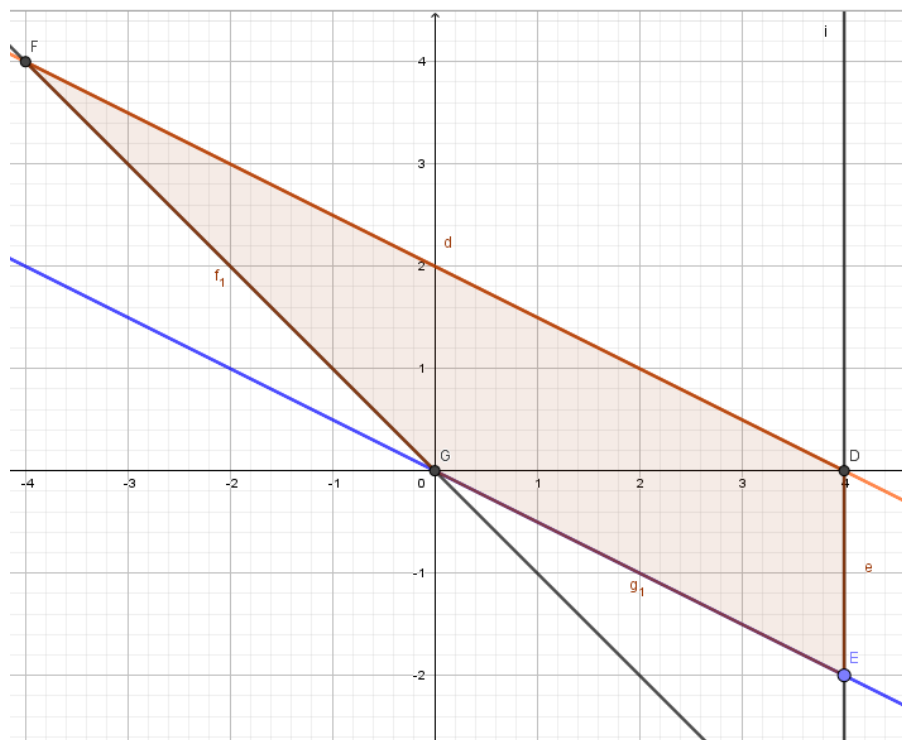
$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{(x+y)(x+2y)}{4(x+y)} + x^2 + 2y^2 + 3xy - 4x - 4y \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x^2 + 3xy + 2y^2) + x^2 + 2y^2 + 3xy \leq \log_2 4(x+y) + 4(x+y) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$, ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(x^2 + 2y^2 + 3xy) \leq f[4(x+y)] \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 3xy \leq 4(x+y)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x+2y-4) \leq 0 \Leftrightarrow x+2y-4 \leq 0.$$



Biểu diễn miền nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x+y > 0 \\ x+2y > 0 \\ x+2y-4 \leq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$$
, tìm được 12 cặp số nguyên thỏa mãn.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x^2 + 9x)(x^2 - 9)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 3x| + 2m - m^2)$ có không quá 6 điểm cực trị?

A. 5.

B. 4.

C. 7.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$g(x) = f(|x^3 + 3x| + 2m - m^2) \Rightarrow g'(x) = \frac{3x(x^2 + 3)(x^2 + 1)}{|x^3 + 3x|} \cdot f'(|x^3 + 3x| + 2m - m^2)$$

Ta có:

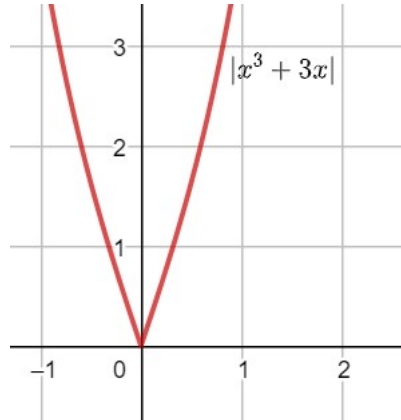
Để thấy $g'(x)$ không xác định tại $x = 0$ và khi qua $x = 0$ thì $g'(x)$ đổi dấu nên $x = 0$ là một điểm cực trị của hàm số $g(x)$.

Để $g(x)$ có không quá 6 điểm cực trị thì phương trình $f'(|x^3 + 3x| + 2m - m^2) = 0$ có thể có tối đa 5 nghiệm bội lẻ khác $x = 0$.

$$f'(|x^3 + 3x| + 2m - m^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 3x| + 2m - m^2 = 0 \\ |x^3 + 3x| + 2m - m^2 = -9 \\ |x^3 + 3x| + 2m - m^2 = -3 \\ |x^3 + 3x| + 2m - m^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 3x| = m^2 - 2m \\ |x^3 + 3x| = m^2 - 2m - 9 \\ |x^3 + 3x| = m^2 - 2m - 3 \\ |x^3 + 3x| = m^2 - 2m + 3 \end{cases}$$

Có:

Dựa vào hình ảnh đồ thị hàm số $|x^3 + 3x|$:



Để $g(x)$ có không quá 6 điểm cực trị thì: $m^2 - 2m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$

Vậy có 5 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 46: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'; BC; CC'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ đã cho thành 2 phần, phần chứa

điểm B có thể tích là V_1 . Tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

A. $\frac{61}{144}$.

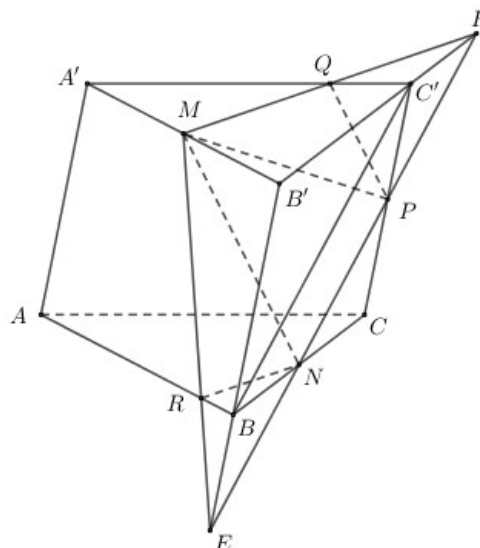
B. $\frac{37}{144}$.

C. $\frac{49}{144}$.

D. $\frac{25}{144}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi S và h lần lượt là diện tích đáy và chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C' \Rightarrow V = Sh$.

Gọi $NP \cap BB' = E, NP \cap B'C' = F, MF \cap A'C' = Q, ME \cap AB = R$

Suy ra mặt phẳng (MNP) cắt khối lăng trụ theo thiết diện là $MRNPQ$.

Ta có $BEPC'$ là hình bình hành $\Rightarrow BE = PC' = \frac{1}{2}CC' = \frac{1}{2}BB'$, tương tự ta có $BNFC'$ là hình bình hành $\Rightarrow C'F = BN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}B'C'$.

$$+) S_{MB'F} = \frac{1}{2} \cdot B'M \cdot B'F \cdot \sin \angle MB'F = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot B'C' \cdot \sin \angle A'B'C' = \frac{3}{4}S$$

$$+) d(E, (A'B'C')) = \frac{3}{2} d(B, (A'B'C')) = \frac{3}{2}h$$

$$\Rightarrow V_{E.B'MF} = \frac{1}{3} \cdot d(E, (A'B'C')) \cdot S_{B'MF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}h \cdot \frac{3}{4}S = \frac{3}{8}V.$$

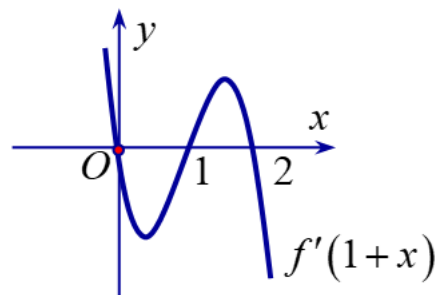
$$\text{Lại có } \frac{V_{E.BNR}}{V_{E.B'MF}} = \left(\frac{EB}{EB'} \right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow V_{E.BNR} = \frac{1}{27} \cdot \frac{3}{8}V = \frac{1}{72}V$$

$$\text{Ta cũng có } \frac{V_{F.C'PQ}}{V_{F.B'EM}} = \frac{FC'}{FB'} \cdot \frac{FP}{FE} \cdot \frac{FQ}{FM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \Rightarrow V_{F.C'PQ} = \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{8}V = \frac{1}{48}V.$$

$$\text{Suy ra } V_1 = V_{E.B'MF} - (V_{E.BNR} + V_{F.C'PQ}) = \frac{49}{144}V.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V} = \frac{49}{144}.$$

Câu 47: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(1+x)$ có đồ thị như trong hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho hàm số $g(x) = f(-x^2 + 2x - 2022 + m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?



A. 2021.

B. 2023.

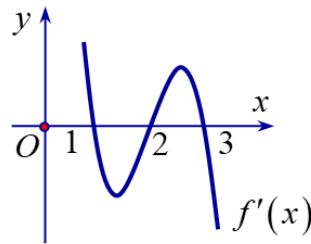
C. 2022.

D. 2024.

Lời giải

Chọn B

Tính tiến đồ thị hàm số $y = f'(1+x)$ sang phải 1 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



$$g'(x) = (-2x+2)f'(-x^2+2x-2022+m)$$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow f'(-x^2+2x-2022+m) \geq 0, \forall x \in (0;1) \quad (\text{vì } -2x+2 > 0, \forall x \in (0;1))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+2x-2022+m \leq 1, \forall x \in (0;1) \\ 2 \leq -x^2+2x-2022+m \leq 3, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq x^2-2x+2022, \forall x \in (0;1) \\ \begin{cases} m-2 \geq x^2-2x+2022, \forall x \in (0;1) \\ m-3 \leq x^2-2x+2022, \forall x \in (0;1) \end{cases} \end{cases} (*)$$

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2x + 2022$ trên khoảng $(0;1)$.

$h'(x) = 2x - 2 < 0, \forall x \in (0;1)$ nên hàm số $h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq h(1) \\ m-2 \geq h(0) \\ m-3 \leq h(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 2021 \\ m-2 \geq 2022 \\ m-3 \leq 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2022 \\ m = 2024 \\ m \leq 2024 \end{cases}$$

Do đó

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; \dots; 2022; 2024\}$.

Câu 48: Cho phương trình $\ln \left(\frac{3x-2}{4y-1} \right) = -3x^2 + 2x(2y-1) + 4y + 1$ với x, y là các số thực dương. Tính

giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{3x}{y^2+3}$.

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{9}{7}$

C. $\frac{7}{3}$

D. 2.

Lời giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ y > \frac{1}{4} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{3x-2}{4y-1} \right) &= -3x^2 + 2x(2y-1) + 4y + 1 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{3x-2}{4y-1} \right) = (x+1)(4y-3x+1) \\ \text{Theo bài ra} \quad \Leftrightarrow \ln \left[\frac{(x+1)(3x-2)}{(x+1)(4y-1)} \right] &= (x+1)[(4y-1) - (3x-2)] \quad (\text{Do } x+1 > 0) \\ \Leftrightarrow \ln \left[\frac{(x+1)(3x-2)}{(x+1)(4y-1)} \right] &= (x+1)(4y-1) - (x+1)(3x-2) \\ \Leftrightarrow \ln [(x+1)(3x-2)] + (x+1)(3x-2) &= \ln [(x+1)(4y-1)] + (x+1)(4y-1) \\ \Leftrightarrow f[(x+1)(3x-2)] &= f[(x+1)(4y-1)] \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$, với $t > 0$. Vì $f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0$ với mọi t nên hàm số $y = f(t)$ luôn đồng biến.

Suy ra

$$f[(x+1)(3x-2)] = f[(x+1)(4y-1)] \Leftrightarrow (x+1)(3x-2) = (x+1)(4y-1) \Leftrightarrow 3x = 4y + 1$$

$$\text{Khi đó} \quad S = \frac{3x}{y^2+3} = \frac{4y+1}{y^2+3}$$

$$\text{Ta có} \quad S - \frac{4}{3} = \frac{4y+1}{y^2+3} - \frac{4}{3} = \frac{-(2y-3)^2}{3(y^2+3)} \leq 0 \Rightarrow S \leq \frac{4}{3}$$

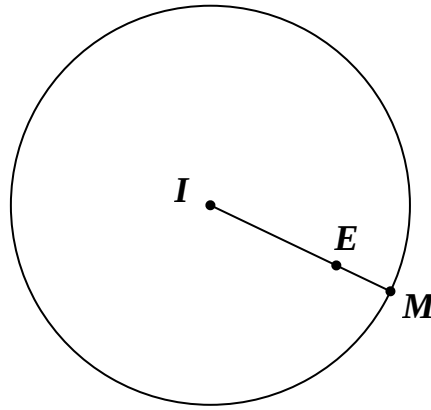
$$\text{Dấu bằng xảy ra khi} \quad \begin{cases} 3x = 4y + 1 \\ 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy} \quad S_{\text{Max}} = \frac{4}{3} \quad \text{khi} \quad \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và các điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(-1;2;3)$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thỏa $d = 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $T = 4x_0 - 3y_0 - 2z_0$ bằng

A. 2. B. 3. C. 8. **D. 4**

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R=5$.

Gọi điểm E thỏa mãn $3EA + 2EB - EC = 0$. Khi đó $E\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } d &= 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 \\ &= 3(ME + EA)^2 + 2(ME + EB)^2 - (ME + EC)^2 \\ &= 4ME^2 + 2ME(3EA + 2EB - EC) + 3EA^2 + 2EB^2 - EC^2 = 4ME^2 + 3EA^2 + 2EB^2 - EC^2. \end{aligned}$$

d đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $IE = \frac{\sqrt{209}}{4} < R$. Do đó điểm E nằm trong mặt cầu (S) .

$$\text{Khi đó } ME_{\min} = R - IE = \frac{20 - \sqrt{209}}{4}.$$

M là giao điểm của đường thẳng IE và mặt cầu (S) .

$$\text{Phương trình đường thẳng } IE: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = 3 - 13t \end{cases}. \text{ Gọi } M(1 - 2t; -2 + 6t; 3 - 13t).$$

$$\text{Vì } M \in (S) \text{ nên ta có } (1 - 2t - 1)^2 + (-2 + 6t + 2)^2 + (3 - 13t - 3)^2 = 25 \Leftrightarrow t = \pm \frac{5}{\sqrt{209}}.$$

$$\text{Suy ra } M_1\left(1 - \frac{10}{\sqrt{209}}; -2 + \frac{30}{\sqrt{209}}; 3 - \frac{65}{\sqrt{209}}\right), M_2\left(1 + \frac{10}{\sqrt{209}}; -2 - \frac{30}{\sqrt{209}}; 3 + \frac{65}{\sqrt{209}}\right).$$

$$\text{Mà } ME_{\min} = \frac{20 - \sqrt{209}}{4} \text{ do đó nhận } M\left(1 - \frac{10}{\sqrt{209}}; -2 + \frac{30}{\sqrt{209}}; 3 - \frac{65}{\sqrt{209}}\right).$$

Khi đó $T = 4x_0 - 3y_0 - 2z_0 = 4$.

Câu 50: Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z - i| = 1, |z| = |w|$ và $z.w$ là số phức thuần ảo với phần ảo dương. Giá trị nhỏ nhất của $|w - 4 - 4i|$ bằng

A. $\sqrt{29}$.

B. 6.

C. 4.

D. $\sqrt{35}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$ và $w = x + yi$, với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$

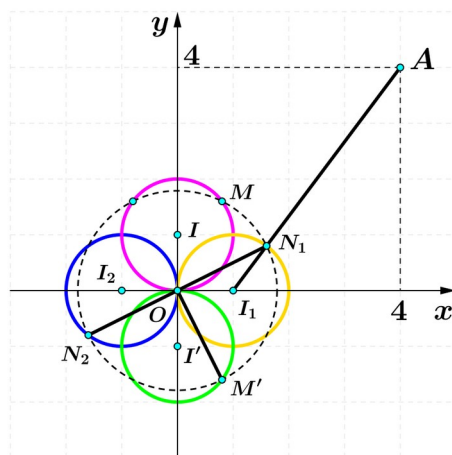
Ta có $|z - i| = 1 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(0;1)$, bán kính $R = 1$

$z.w = (a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i$ là số thuần ảo với phần ảo dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 0 \\ ay + bx > 0 \end{cases}$$

Gọi M' là điểm đối xứng với M qua trục Ox thì $M'(a; -b)$ và M' thuộc đường tròn (C') có tâm $I'(0; -1)$, bán kính $R' = 1$.

Mà $ax - by = 0$ nên $OM' \cdot ON = 0$ hay $OM' \perp ON$



✓ **Trường hợp 1:** $N = Q_{(O, 90^\circ)}(M') \Rightarrow N \in (C_1)$ có tâm $I_1(1;0)$, bán kính $R_1 = 1$.

Khi đó với $A(4;4)$ thì $|w - 4 - 4i| = NA \geq I_1A - R_1 \Leftrightarrow |w - 4 - 4i| \geq 4$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x; y) = \left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$ và $(a; b) = \left(\frac{4}{5}; \frac{8}{5}\right)$ thỏa mãn $ay + bx > 0$

✓ **Trường hợp 2:** $N = Q_{(O, -90^\circ)}(M') \Rightarrow N \in (C_2)$ có tâm $I_2(-1;0)$, bán kính $R_2 = 1$.

Khi đó với $A(4;4)$ thì $|w - 4 - 4i| = NA \geq I_2 A - R_2 \Leftrightarrow |w - 4 - 4i| \geq \sqrt{41} - 1$, do dấu đẳng thức xảy ra không thỏa điều kiện $ay + bx > 0$ nên trường hợp này loại

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|w - 4 - 4i|$ bằng 4.

----- HẾT ----- Xem thêm tại Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>