

**Câu 1:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = mx^4 + (m^2 - 4)x^2 + 2$  có đúng một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu?

**A.** 3.

**B.** 0.

**C.** 2.

**D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$

Ta có  $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 4)x$

+) Với  $m = 0$

$$y = -4x^2 + 2$$

Hàm số  $y = -4x^2 + 2$  có 1 điểm cực đại và không có điểm cực tiểu, suy ra  $m = 0$  thỏa mãn.

+) Với  $m \neq 0$

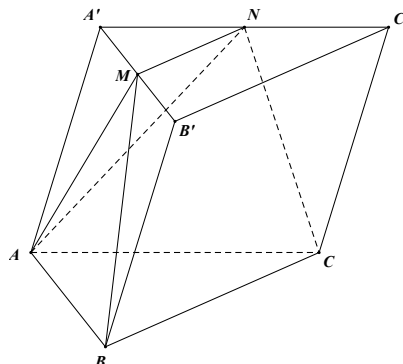
$$y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 4)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-(m^2 - 4)}{2m} \end{cases}$$

Hàm số có một điểm cực đại và không có cực tiểu khi

$$\begin{cases} a = m < 0 \\ -\frac{(m^2 - 4)}{2m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m(m^2 - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -2 \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 0$$

Vậy  $-2 \leq m < 0$ , có 3 giá trị  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 2:** Cho khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = 3a$ ,  $AC = 4a$ ,  $BC = 5a$ , khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $B'C'$  bằng  $2a$ . Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của  $A'B'$  và  $A'C'$ , (tham khảo hình vẽ dưới đây). Thể tích  $V$  của khối chóp  $A.BCNM$  là



**A.**  $V = 7a^3$ .

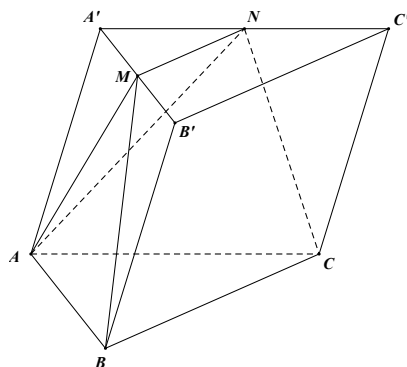
**B.**  $V = 8a^3$ .

**C.**  $V = 6a^3$ .

**D.**  $V = 4a^3$ .

## Lời giải

**Chọn C**



Gọi  $V$  là thể tích khối lăng trụ.

Vì  $BMCN$  là hình thang có hai đáy  $BC, MN$  và  $BC = 2MN$  nên ta có

$$S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} d(B; MN) \cdot MN = \frac{1}{2} d(N; BC) \cdot \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} S_{\triangle BCN}$$

Suy ra 
$$V_{A.BCNM} = V_{A.BMN} + V_{A.BCN} = \frac{3}{2} V_{A.BCN} = \frac{3}{2} V_{N.ABC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} V = \frac{1}{2} V$$

Ta có đáy là tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên:  $S_{\triangle ABC} = 6a^2$ .

Vì  $B'C' \parallel (ABC) \Rightarrow d(AB; B'C') = d(B'C' (ABC)) = d(B'; (ABC)) = 2a = h$

Với  $h$  là chiều cao của khối lăng trụ.

Suy ra 
$$V = h S_{\triangle ABC} = 2a \cdot 6a^2 = 12a^3 \Rightarrow V_{A.BCNM} = \frac{1}{2} V = 6a^3$$

**Câu 3:** Cho hai số phức  $z$  và  $w$  thỏa mãn  $|z| = 4, |w| = 2$ . Khi  $|z + \bar{w} + 5 + 12i|$  đạt giá trị lớn nhất, phần thực của  $z + iw$  bằng

**A.**  $\frac{30}{13}$ .

**B.**  $-\frac{4}{13}$ .

**C.**  $\frac{44}{13}$ .

**D.**  $\frac{58}{13}$ .

## Lời giải

**Chọn C**

Ta có  $|w| = 2 \Rightarrow |\bar{w}| = 2$ .

Ta lại có  $|z + \bar{w} + 5 + 12i| \leq |z + \bar{w}| + |5 + 12i| \leq |z| + |\bar{w}| + 13$ .

Suy ra  $|z + \bar{w} + 5 + 12i| \leq 19$ . Dấu "=" xảy ra khi  $\begin{cases} z = k\bar{w} \\ z + \bar{w} = h(5 + 12i) \end{cases} \quad (k, h \in \mathbb{R}; k, h > 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ h = \frac{6}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{w} = \frac{10}{13} + \frac{24}{13}i \\ z = \frac{20}{13} + \frac{48}{13}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = \frac{10}{13} - \frac{24}{13}i \\ z = \frac{20}{13} + \frac{48}{13}i \end{cases} \Rightarrow z + iw = \frac{44}{13} + \frac{58}{13}i$$

Vậy phần thực của  $z + iw$  bằng  $\frac{44}{13}$ .

- Câu 4:** Có bao nhiêu cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $0 \leq x \leq 4000$  và  $5(25^y + 2y) = x + \log_5(x+1)^5 - 4$ ?
- A. 5.                      B. 2.                      C. 4.                      D. 3.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $5(25^y + 2y) = x + \log_5(x+1)^5 - 4 \Leftrightarrow 5\log_5(x+1) + x + 1 = 5^{2y+1} + 5(2y+1)$  (1)

Đặt  $\log_5(x+1) = t \Rightarrow x+1 = 5^t$

Phương trình (1) trở thành:  $5t + 5^t = 5(2y+1) + 5^{2y+1}$  (2)

Xét hàm số  $f(u) = 5u + 5^u$  trên  $\mathbb{R}$ .

$f'(u) = 5 + 5^u \ln 5 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$  nên hàm số  $f(u)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Do đó (2)  $\Leftrightarrow f(t) = f(2y+1) \Leftrightarrow t = 2y+1$

$\Rightarrow \log_5(x+1) = 2y+1 \Leftrightarrow x+1 = 5^{2y+1} \Leftrightarrow x = 5 \cdot 25^y - 1$

Vì  $0 \leq x \leq 4000 \Rightarrow 0 \leq 5 \cdot 25^y - 1 \leq 4000 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq 25^y \leq \frac{4001}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \log_{25} \frac{4001}{5} \approx 2.08$

Do  $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0, 1, 2\}$ , có 3 giá trị của  $y$  nên cũng có 3 giá trị của  $x$

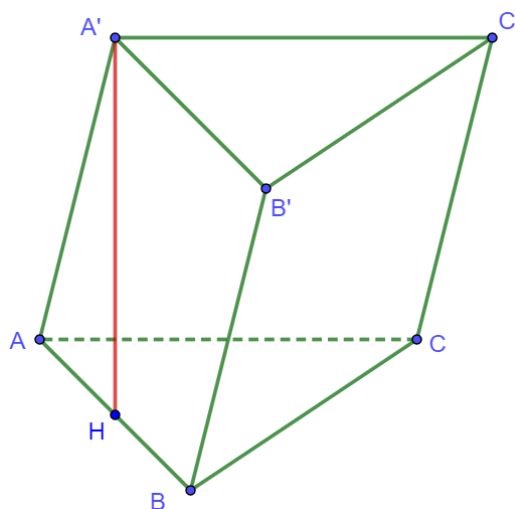
Vậy có 3 cặp số nguyên  $(x; y)$ .

- Câu 5:** Cho khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$  và  $AC = 2a$ . Hình chiếu vuông góc của  $A'$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm  $H$  của cạnh  $AB$  và  $AA' = a\sqrt{2}$ . Tính thể tích  $V$  của khối lăng trụ đã cho.

- A.  $V = a^3\sqrt{3}$                       B.  $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$                       C.  $V = 2a^2\sqrt{2}$                       D.  $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

**Lời giải**

**Chọn D**

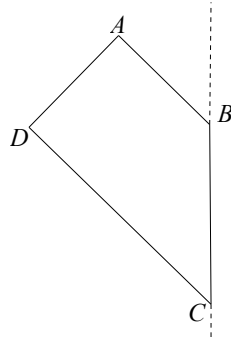


Do tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $B$  và  $AC = 2a$  nên  $AB = BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét tam giác  $AA'H$  ta có:  $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy:  $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

**Câu 6:** Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $D$  có  $CD = 2AB = 2AD = 6$ . Tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang  $ABCD$  khi quay xung quanh đường thẳng  $BC$ .



A.  $V = \frac{135\pi\sqrt{2}}{4}$ .

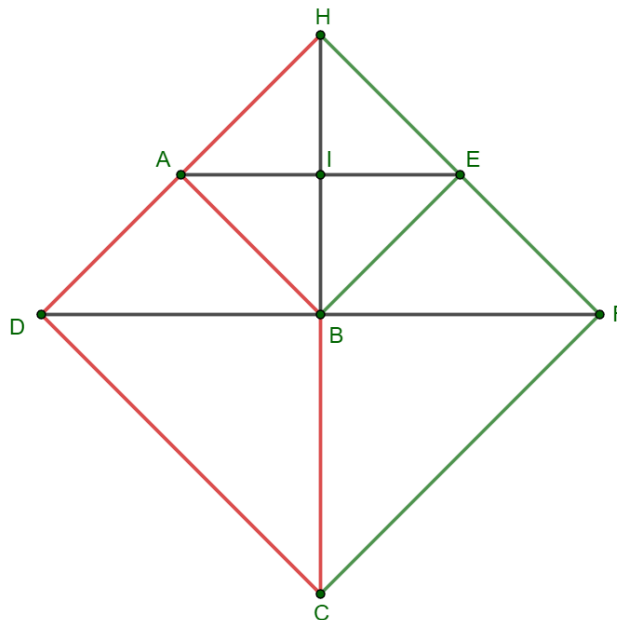
B.  $V = 36\pi\sqrt{2}$ .

C.  $V = \frac{63\pi\sqrt{2}}{2}$ .

D.  $V = \frac{45\pi\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Thể tích khối tròn xoay sinh ra sau khi quay hình thang  $ABCD$  xung quanh cạnh  $BC$  được tính như sau:  $V = 2 \cdot (V_1 - V_2)$  với  $V_1$  là thể tích khối nón có đỉnh là  $C$  có đáy là hình tròn tâm  $B$ ,  $V_2$  là khối nón đỉnh  $H$  có đáy là hình tròn tâm  $I$ .

Tam giác  $BCD$  vuông cân tại  $B$  nên  $BC = BD = AB\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi BC^2 \cdot BD = \frac{1}{3} \pi (3\sqrt{2})^2 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}\pi$$

Nên

Để dàng chứng minh được  $BAHE$  là hình vuông nên  $AE = HB = AB\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow HI = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi IA^2 \cdot IH = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \pi$$

Nên

$$V = 2(V_1 - V_2) = \frac{63\sqrt{2}}{2} \pi$$

Vậy

**Câu 7:** Cho phương trình  $(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - m} = 0$  ( $m$  là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của  $m$  để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

**A.** 47

**B.** 49

**C.** Vô số

**D.** 48

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét phương trình  $(4\log_2^2 x + \log_2 x - 5)\sqrt{7^x - m} = 0$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ m \leq 7^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \log_7 m \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\log_2^2 x + \log_2 x - 5 = 0 \\ 7^x - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2^{\frac{-5}{4}} \\ x = \log_7 m \end{cases}$$

Phương trình tương đương

Để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt:

$$\text{TH1: } \log_7 m \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq 1 \Rightarrow m = 1$$

$$\text{TH2: } 2^{\frac{-5}{4}} \leq \log_7 m < 2 \Leftrightarrow 7^{2^{\frac{-5}{4}}} \leq m < 49 \Rightarrow m \in \{3; 4; \dots; 48\}$$

Vậy có tất cả 47 giá trị  $m$  thỏa mãn.

**Câu 8:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $AB = 4a, BC = 3\sqrt{2}a, \angle ABC = 45^\circ; \angle SAC = \angle BSC = 90^\circ$ ; Sin góc giữa hai mặt

phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$  bằng  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

**A.**  $\frac{a\sqrt{183}}{6}$

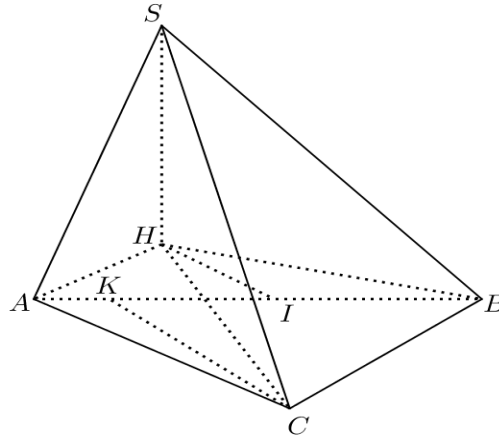
**B.**  $\frac{a\sqrt{183}}{3}$

**C.**  $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$

**D.**  $\frac{3a\sqrt{5}}{12}$

**Lời giải**

**Chọn A**



Do  $SA \perp AC, SB \perp BC$  nên  $S, A, B, C$  nằm trên mặt cầu đường kính  $SC$ ,

Ta có  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \sin 45^\circ = 10a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{10}$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $S$  lên  $(ABC)$ .

Ta có  $CA \perp SA$  và  $CA \perp SH$  nên  $CA \perp HA$ .

Tương tự:  $CB \perp HB$ .

Khi đó  $ABCH$  nội tiếp đường tròn đường kính  $HC$  nên  $HC = \frac{AC}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{5}a$ .

Ta có:  $HB = \sqrt{HC^2 - BC^2} = a\sqrt{2}$

Gọi  $K, I$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  và của  $H$  lên  $AB$ . Khi đó  $\triangle CKB$  và  $\triangle HIB$  vuông cân

nên  $CK = \frac{3\sqrt{2}a}{\sqrt{2}} = 3a$  và  $HI = \frac{HB}{\sqrt{2}} = a$ .

Do đó  $\frac{d(H, (SAB))}{d(C, (SAB))} = \frac{HI}{CK} = \frac{1}{3}$

Ta có  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{d(C, (SAB))}{CB} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow d(C, (SAB)) = CB \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3a}{2} \Rightarrow d(H, (SAB)) = \frac{a}{2}$ .

Khi đó  $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{d^2(H, (SAB))} - \frac{1}{HI^2} = \frac{4}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow SH^2 = \frac{a^2}{3}$

Vậy  $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + 20a^2} = \frac{a\sqrt{183}}{3}$ , suy ra bán kính mặt cầu  $R = \frac{a\sqrt{183}}{6}$ .

**Câu 9:** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình  $z^2 + 2mz - m + 12 = 0$  ( $m$  là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| + |z_2| = \sqrt{2}|z_1 - z_2|$ ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

**Chọn B**

Phương trình đã cho có  $\Delta' = m^2 + m - 12$ .

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 3 \end{cases}$$

**Trường hợp 1:**

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm thực  $z_1, z_2$  phân biệt.

$$\text{Do đó, } |z_1| + |z_2| = \sqrt{2} |z_1 - z_2|$$

$$\Leftrightarrow (|z_1| + |z_2|)^2 = (\sqrt{2} |z_1 - z_2|)^2$$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2|z_1 z_2| = 2(z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2)$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 + 2|z_1 z_2| = 2[(z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2]$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 6z_1 z_2 - 2|z_1 z_2| = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 6(-m + 12) - 2|-m + 12| = 0 (*)$$

$$\text{Nếu } m < -4 \text{ hoặc } 3 < m < 12 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow 4m^2 - 8(-m + 12) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 4 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } m \geq 12 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow 4m^2 - 4(-m + 12) = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 = 0$$

**Trường hợp 2:**  $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 3$

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $z_1, z_2$  là hai số phức liên hợp:

$$-m + i\sqrt{-m^2 - m + 12} \text{ và } -m - i\sqrt{-m^2 - m + 12}$$

$$\text{Do đó, } |z_1| + |z_2| = \sqrt{2} |z_1 - z_2|$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 + (-m^2 - m + 12)} = 2\sqrt{-m^2 - m + 12}$$

$$\Leftrightarrow -m + 12 = -m^2 - m + 12$$

$$\Leftrightarrow m = 0$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn đề bài.

**Câu 10:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = |3x^4 - mx^3 + 6x^2 + m - 3|$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ ?

A. 5

B. 6

C. 4

D. 7

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Đặt } f(x) = 3x^4 - mx^3 + 6x^2 + m - 3$$

Do  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 - mx^3 + 6x^2 + m - 3) = +\infty > 0$

Nên  $y = |f(x)|$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 \geq 0 \\ 12x^3 - 3mx^2 + 12x \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 4x + \frac{4}{x}, \forall x \in (0; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq \min_{x \in (0; +\infty)} \left( 4x + \frac{4}{x} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq m \leq 8$$

Vậy  $3 \leq m \leq 8$ .