**CHỦ ĐỀ 2:** **NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ**

Cho A và B là các biểu thức. Ta có một số hằng đẳng thức đáng nhớ sau:

| HẰNG ĐẲNG THỨC VIẾT DẠNG TỔNG | HẰNG ĐẲNG THỨC VIẾT DẠNG TÍCH |
| --- | --- |
| **\* Bình phương của tổng**  (A + B)2 = A2 + 2AB + B2  **\* Bình phương của hiệu**  (A – B)2 = A2 – 2AB + B2  **\* Lập phương của tổng**  (A + B)3 = A3 + 3A2B + 3AB2 + B3  **\* Lập phương của hiệu**  (A - B)3 = A3 - 3A2B + 3AB2 - B3 | **\* Hiệu hai bình phương**  A2 – B2 = (A + B)(A – B)  **\* Tổng hai lập phương**  A3 + B3  = (A + B)(A2 – AB + B2)  **\* Hiệu hai lập phương**  A3 - B3  = (A - B)(A2 + AB + B2) |

**\*Chú ý: Các hằng đẳng thức mở rộng**

(A + B + C)2 = A2 + B2 + C2 + 2AB + 2BC + 2AC

(A – B + C)2 = A2 + B2 + C2 – 2AB – 2BC + 2AC

(A – B – C)2 = A2 + B2 + C2 – 2AB + 2BC – 2AC

(A + B – C)2 = A2 + B2 + C2 + 2(AB - AC – BC)

(A + B + C)³ = A³ + B³ + C³ + 3(A + B)(A + C)(B + C)

A4 + B4  = (A + B)(A3 - A2B + AB2 - B3)

A4 - B4  = (A - B)(A3 + A2B + AB2 + B3)

An + Bn = (A + B) (An-1 – An-2 B +  An-3 B2 – An-4 B3 +…….. +(-1)n-1 B n-1)

An - Bn = (A + B) (An-1 + An-2 B +  An-3 B2 + An-4 B3 +…….. + B n-1)

**BÀI TẬP CHUYÊN ĐỀ 2**

**HẲNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ**

**DẠNG 1: Khai triển biểu thức. Đưa biểu thức về dạng hằng đẳng thức.**

**I/ Phương pháp.**

*- Nhận diện số A và số B trong hẳng đẳng thức.*

*- Viết khai triển theo đúng công thức của hằng đẳng thức đã học.*

**II/ Bài tập vận dụng.**

**Bài 1:** Viết các biểu thức sau dưới dạng tổng.

1) (5x + 3yz)2 2) (y2x – 3ab)2 3) (x2 – 6z)(x2 + 6z) 4) (2x – 3)3

5) (a + 2b)3 6) (5x + 2y)2 7) (-3x + 2)2 8)



9) 10) 11) 12)



13) 14) 15) 16) 17) 18) 19)



**Bài 2:** Viết các biểu thức sau dưới dạng tổng.

1) 2) 3) (x – 2y + z)2 4) (2x – y + 3)2



**Bài 3:** Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hay một hiệu:

1) x2 + 2x + 1 2) x2 + 5x + 3) 16x2 – 8x + 1 4) 4x2 + 12xy + 9y2



5) x2 + x + 6) x2 - 3x + 7) + x + 1 8) - x +



**Bài 4:** Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hay một hiệu:

a) x3 + 3x2 + 3x + 1 b) 27y3 – 9y2 + y -



c) 8x6 + 12x4y + 6x2y2 + y3 d) (x + y)3(x – y)3

**Bài 5:** Viết các biểu thức sau dưới dạng tích

a) b) c) d)



**Bài 7** : Viết các biểu thức sau dưới dạng tích

a) b)



c) d)



**Bài 8**: Viết các biểu thức sau dưới dạng tích

a) b)



c) d)



e) g)



**Bài 9** : Viết biểu thức sau dưới dạng tích

a)



b)



c)



d)



**DẠNG 2: Rút gọn biểu thức**

**I/ Phương pháp.**

*- Khai triển các hằng đẳng thức có trong biểu thức.*

*- Rút gọn các đơn thức đồng dạng.*

**II/ Bài tập vận dụng.**

**Bài 1:** Rút gọn biểu thức:

a) A = (x + y)2 – (x – y)2

b) B = (x + y)2 – 2(x + y)(x – y) + (x – y)2

c) C = (x + y)3 - (x – y)3 – 2y3

**Bài 2:** Rút gọn biểu thức

a) E = (2x + 3)2 – 2(2x + 3)(2x + 5) + (2x + 5)2

b) F = (x2 + x + 1)(x2 – x + 1)(x2 – 1)

c) G = (a + b – c)2 + (a – b + c)2 – 2(b – c)2

d) H = (a + b + c)2 + (a – b – c)2 + (b – c – a)2 + (c – a – b)2

**Bài 3:** Rút gọn biểu thức.

a) A = (x + y)2 - (x - y)2

b) B = (a + b)3 + (a - b)3 - 2a3

c) C = 98.28 - (184 - 1)(184 + 1)

**DẠNG 3: Điền đơn thức thích hợp vào các dấu \* trong đẳng thức.**

**I/ Phương pháp.**

*- Quan sát 2 vế của đẳng thức, xem đẳng thức thuộc hằng đẳng thức nào đã học.*

*- Từ vị trí số hạng đã biết trong hằng đẳng thức, xác định số hạng cần điền vào dấu \**

**II/ Bài tập vận dụng.**

1) 8x3 + \* + \* + 27y3 = (\* + \*)3

2) 8x3 + 12x2y + \* + \* = (\* + \*)3

3) x3 - \* + \* - \* = (\* - 2y)3

4) (\* – 2)(3x + \*) = 9x2 – 4

5) 27x3 – 1 = (3x – \*)(\* + 3x + 1)

6) \* + 1 = (3x + 1)(9x2 - \* + 1)

7) (2x + 1)2 = \* + 4x + \*

8) (\* - 1)2 = 4x2 - \* + 1

9) 9 - \* = (3 – 4x)(3 + 4x)

10) (4x2 – 3) = (2x - \*)(\* + )



**DẠNG 4: Tính nhanh:**

**I/ Phương pháp.**

*- Đưa tổng, hiệu, tích các số về dạng hằng đẳng thức*

*- Thực hiện phép tính trong hằng đẳng thức.*

**II/ Bài tập vận dụng.**

**Bài 1:** Tính nhanh

1)1532 + 94 .153 + 472

2) 1262 – 152.126 + 5776

3) 38.58 – (154 – 1)(154 + 1)

4) (2 + 1)(22 + 1)(24 + 1) … (220 + 1) + 1

**Bài 2**: Dựa vào các hằng đẳng thức để tính nhanh

a. 252 - 152 b. 2055 - 952 c. 362 - 142

d. 9502 - 8502  e.



**Bài 3**. Tính**:**

a/ A = 12 – 22 + 32 – 42 + … – 20042 + 20052

b/ B = (2 + 1)(22 +1)(24 + 1)(28 + 1)(216 + 1)(232 + 1) – 264

**DẠNG 5: Chứng minh biểu thức dương hoặc âm với mọi giá trị của biến x.**

**I/ Phương pháp.**

*- Đưa biểu thức về dạng hằng đẳng thức, khi đó nếu :*

*+ Biểu thức A có dạng (a ± b)2 thì A ≥ 0*

*+ Biểu thức A có dạng (a ± b)2 + c (c là hằng số dương) thì A > 0*

*+ Biểu thức A có dạng - (a ± b)2 thì A ≤ 0*

*+ Biểu thức A có dạng - (a ± b)2 - c (c là hằng số dương) thì A < 0*

**II/ Bài tập vận dụng**

**Bài 1:** Chứng minh rằng

a) – x2 + 4x – 5 < 0 với mọi x

b) x4 + 3x2 + 3 > 0 với mọi x

c) (x2 + 2x + 3)(x2 + 2x + 4) + 3 > 0 với mọi x

**Bài 2:** Chứng minh các biểu thức sau nhận giá trị dương với mọi giá trị của biến:

a) A = x2 – x + 1

b) B = (x – 2)(x – 4) + 3

c) C = 2x2 – 4xy + 4y2 + 2x + 5

**DẠNG 6: Chứng minh đẳng thức.**

**I/ Phương pháp.**

*- Dùng hằng đẳng thức biến đổi một vế của đẳng thức sao cho bằng vế còn lại*

**II/ Bài tập vận dụng**

**Bài 1:** Chứng minh:(a + b + c)2 = a2 + b2 + c2 + 2ab + 2bc + 2ac

**Bài 2**: Chứng minh:

a) a3 + b3 = (a + b)3 - 3ab(a + b)

b) a3 – b3 = (a - b)3 + 3ab(a – b)

**Bài 3:** Chứng minh các đẳng thức sau:

a) (a2 + b2)2 – 4a2b2 = (a + b)2(a – b)2

b) (a2 + b2)(x2 + y2) = (ax – by)2 + (bx + ay)2

c) a3 – b3 + ab(a – b) = (a – b)(a + b)2

d)(a – b)3 + (b – c)3 + (c – a)3 = 3(a – b)(b – c)(c – a)

**DẠNG 7: Tìm x trong phương trình f(x) = 0.**

**I/ Phương pháp**

***Cách 1:***

*- Đưa f(x) về một trong các dạng hằng đẳng thức sau: A2 – B2 ; A3 + B3  ; A3 - B3  ; A4 - B4*

*- Khai triển các hằng đẳng thức trên ta được: f(x) = 0*



*H(x) và K(x) là các đa thức đơn giản chứa x.*

***Cách 2:***

*- Nếu f(x) không đưa được về dạng các hằng đẳng thức như* ***Cách 1*** *thì ta khai triển f(x) thành tổng các đơn thức*

*- Rút gọn các đơn thức đồng dạng sao cho chỉ còn lại* ***a.x = c***

***=>***



***Chú ý: Nếu f(x) = => f(x) = 0 ⬄***



**II/ Bài tập vận dụng.**

**Bài 1 :** Tìm x.

a) 9x2 – 6x – 3 = 0

b) x3 + 9x2 + 27x + 19 = 0

c) x(x + 5)(x – 5) – (x + 2)(x2 – 2x + 4) = 3

Hướng dẫn

a) 9x2 – 6x – 3 = 0

⬄ 9x2 – 2.3x.1 + 1 – 4 = 0

⬄ (3x – 1)2 – 4 = 0 (Hiệu của hai bình phương)

⬄ (3x – 1 + 2)(3x – 1 – 2) = 0

⬄ (3x + 1)(3x – 3) =0

⬄



b) x3 + 9x2 + 27x + 19 = 0

⬄ x3 + 3.x2.3 + 3.x.32 + 33 – 8 =0

⬄ (x + 3)3 – 8 = 0

⬄ (x + 3)3 – 23 = 0 (Hiệu của hai lập phương)

⬄ (x + 3 – 2)[(x + 3)2 + 2(x + 3) + 4] = 0

⬄ (x + 1)(x2 + 6x + 9 + 2x + 6 + 4) =0

⬄ (x + 1)(x2 + 8x + 19) = 0

⬄ (x + 1)[x2 + 2.4x + 16 + 3] = 0

⬄ (x + 1)[(x + 4)2 + 3] = 0

⬄ x + 1 = 0 Vì (x + 4)2 + 3 > 0 , với mọi giá trị của biến x.

⬄ x = -1

c) x(x + 5)(x – 5) – (x + 2)(x2 – 2x + 4) = 3

⬄ x(x2 – 25) – (x3 + 8) – 3 = 0

⬄ x3 – 25x – x3 – 8 – 3 = 0 (Thu gọn đồng dạng)

⬄ - 25x = 11

⬄ x = -



**Bài 2:** Tìm x, y, z biết rằng**:** x2 + 2x + y2 – 6y + 4z2 – 4z + 11 = 0

Hướng dẫn

x2 + 2x + y2 – 6y + 4z2 – 4z + 11 = 0

⬄ (x2 + 2x + 1) + (y2 – 6y + 9) + (4z2 – 4z + 1) = 0

⬄ (x + 1)2 + (y – 3)2 + (2z – 1)2 = 0 (Tổng các bình phương)



**Bài 3:** Giải các phương trình sau:

a) x2 – 4x + 4 = 25

b) (5 – 2x)2 – 16 = 0

c) (x – 3)3 – (x – 3)(x2 + 3x + 9) + 9(x + 1)2 = 15

**Bài 4.** Tìm x, biết:

a) (2x + 1)2 - 4(x + 2)2 = 9

b) (x + 3)2 - (x - 4)( x + 8) = 1

c) 3(x + 2)2 + (2x - 1)2 - 7(x + 3)(x - 3) = 36

d)(x - 3)(x2 + 3x + 9) + x(x + 2)(2 - x) = 1

e) (x + 1)3 - (x - 1)3 - 6(x - 1)2 = -19.

**DẠNG 8: Dùng hằng đẳng thức so sánh hai số.**

**I/ Phương pháp.**

*- Vận dụng hằng đẳng thức A2 – B2 = (A – B)(A + B)*

*- Biến đổi số phức tạp về dạng:* ***kN – 1 => Khi đó số kN – 1 < kN***

**II/ Bài tập vận dụng.**

**Bài 1:** So sánh hai số sau:

a) 2003.2005 và 20042

b) 716 – 1 và 8(78 + 1)(74 + 1)(72 + 1)

Hướng dẫn

a) 2003.2005 và 20042

Ta có: 2003.2005 = (2004 – 1)(2004 + 1) = 20042 – 1 < 20042

b) 716 – 1 và 8(78 + 1)(74 + 1)(72 + 1)

Ta có: 716 – 1 = (78)2 – 1 = (78 + 1)(78 – 1)

= (78 + 1)(74 + 1)(74 – 1) = (78 + 1)(74 + 1)(72 + 1)(72 – 1)

= (78 + 1)(74 + 1)(72 + 1)(7 + 1)(7 – 1)

= (78 + 1)(74 + 1)(72 + 1)8.6 > (78 + 1)(74 + 1)(72 + 1).8

**Bài 2:** So sánh hai số A và B biết :

A = 20162 và B = 2015 . 2017

**Bài 3:** So sánh hai số M và N biết :

M = 216 và N = (2 + 1)(22 + 1) (24 + 1) (28 + 1)

Hướng dẫn

Ta có: N = (2 – 1) (2 + 1) (22 + 1) (24 + 1) (28 + 1)

= (22 – 1) (22 + 1)(24 + 1) (28 + 1)

= (24 – 1) (24 + 1) (28 + 1)

= (28 – 1)(28 + 1)

= 216 – 1

Suy ra : N = 216 – 1 < 216

Vậy : N < M

**Bài 4:** So sánh hai số M và N biết :

M = 22016 và N = (2 + 1)(22 + 1) (24 + 1) …(21008 + 1)

Hướng dẫn

Ta có: N = (2 – 1) (2 + 1) (22 + 1) (24 + 1) …(21008 + 1)

= (22 – 1) (22 + 1)(24 + 1) …(21008 + 1)

= (24 – 1) (24 + 1) …(21008 + 1)

= (28 – 1)…(21008 + 1)

= 22016 – 1

Suy ra : N = 22016 – 1 < 22016 . Mà: M = 22016 . Vậy : N < M

**Bài 5:** So sánh hai số P và Q biết :

P = 4(32 + 1)(34 + 1) …(364 + 1) và Q = 3218 – 1

Hướng dẫn

Ta có : P = 4.(32 + 1).(34 + 1) …(364 + 1) = .(32 - 1). (32 + 1).(34 + 1) …(364 + 1)



= .(34 - 1).(34 + 1) …(364 + 1) = .(364 - 1).(364 + 1)



= .(3128 – 1)



Mà < 1 => .(3128 – 1) < 3128 – 1



Vậy P < Q.

**DẠNG 9:** **Tìm giá trị nhỏ nhất hay giá trị lớn nhất.**

**I/ Phương pháp:**

*\* Nếu biểu thức A ≤* ***m*** *với ∀x ∈ thuộc điều kiện và có giá trị x = xo thỏa mãn điều kiện (Nếu có) để A =* ***m***

*=> A đạt GTLN = m khi x = xo*

*\* Nếu biểu thức A ≥* ***m*** *với ∀x ∈ thuộc điều kiện và có giá trị x = xo thỏa mãn điều kiện (Nếu có) để A =* ***m***

*=> A đạt GTNN = m khi x = xo*

*\* Dùng hằng đẳng thức biến đổi A về dạng:*

*- Nếu A = (kx + c)2 + d ≥ d => Amin = d ⬄ kx + c = 0*

*- Nếu A = - (kx + c)2 + d ≤ d => Amax = d ⬄ kx + c = 0*

**II/ Bài tập vận dụng.**

**Bài 1:** Tìm GTNN hoặc GTLN của các biểu thức sau:

a/ A = x2 – 4x + 7

b/ B = x2 + 8x

c/ C = - 2x2 + 8x – 15

Hướng dẫn

a/ A = x2 – 4x + 7 = x2 – 4x + 4 + 3 = ( x - 2)2 + 3 > 3

Dấu “ =” xảy ra ⇔ x – 2 = 0 ⇔ x = 2

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là 3 khi x = 2.

b/ B = x2 + 8x = (x2 + 8x + 16 ) – 16 = (x – 4)2 – 16 > - 16

Dấu “ =” xảy ra ⇔ x – 4 = 0 ⇔ x = 4

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là -16 khi x = 4.

c/ C = - 2x2 + 8x – 15 = – 2(x2 – 4x + 4) – 7 = – 2( x - 2)2 – 7 < - 7

Dấu “ =” xảy ra ⇔ x – 2 = 0 ⇔ x = 2

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là - 7 khi x = 2.

**Bài 2:** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) M = x2 – 4x + 7 = x2 – 4x + 4 + 3 = (x – 2)2 + 3

b) N = (x2 – 4x – 5)(x2 – 4x – 19) + 49

Hướng dẫn

a) M = x2 – 4x + 7 = x2 – 4x + 4 + 3 = (x – 2)2 + 3

Ta thấy: (x – 2)2 ≥ 0 nên M ≥ 3

Hay GTNN của M bằng 3

Giá trị này đạt được khi (x – 2)2 = 0 x – 2 = 0 x = 2



b) N = (x2 – 4x – 5)(x2 – 4x – 19) + 49

= (x2 – 4x – 5 )(x2 – 4x – 5 – 14) + 49

= (x2 – 4x – 5)2 – 14(x2 – 4x – 5) + 49

= (x2 – 4x – 5)2  - 2.7(x2 – 4x – 5 ) + 72

= (x2 – 4x – 5 – 7 )2 = (x2 – 4x – 12 )2

Ta thấy : (x2 – 4x – 12)2 ≥ 0 nên N ≥ 0

Hay GTNN của N bằng 0

Giá trị này đạt được khi x2 – 4x – 12 = 0 (x – 6)(x + 2) = 0



x = 6 ; hoặc x = -2



c) P = x2 – 6x + y2 – 2y + 12 = x2 – 6x + 9 + y2 – 2y + 1 + 2 = (x – 3)2 + (y – 1)2 + 2

Ta thấy: (x – 3)2 ≥ 0; và (y – 1)2 ≥ 0 nên P ≥ 2

Hay GTNN của P bằng 2

Giá trị này đạt được khi x – 3 = 0 và y – 1 = 0

x = 3 và y = 1



**Bài 3:** Tìm GTNN của biểu thức A = (x2 + 1)2 + 4 nếu có.

**Bài 4**: Cho x và y là các số hữu tỉ và x ≠ y .Tìm GTNN của biểu thức B = (x – y)2 + 2 nếu có.



**Bài 5:** Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) A = x2 – 4x + 9

b) B = x2 – x + 1

c) C = 2x2 – 6x

Hướng dẫn

a) A = x2 – 4x + 9

Ta có : A = x2 – 4x + 4 + 5 = (x – 2)2 + 5

Ta thấy (x – 2)2 ≥ 0, nên (x – 2)2 + 5 ≥ 5

Hay GTNN của A bằng 5 , giá trị này đạt được khi (x – 2)2 = 0

x – 2 = 0 x = 2



b) B = x2 – x + 1

Ta có: B = x2 – 2.x + = (x - )2 +



Vậy GTNN của B bằng , giá trị này đạt được khi x =



c) C = 2x2 – 6x = 2(x2 – 3x) = 2[(x2 – 2.x + ] = 2(x - )2 -



Vậy GTNN của C bằng - , giá trị này đạt được khi x =



**Bài 4:** Tìm GTLN của các đa thức:

a) M = 4x – x2+ 3

b) N = x – x2

c) P = 2x – 2x2 – 5

Hướng dẫn

a) M = 4x – x2+ 3 = - x2 + 4x – 4 + 7 = 7 – (x2 – 4x + 4) = 7 – (x – 2)2

Ta thấy: (x – 2)2 ≥ 0 ; nên - (x – 2)2 ≤ 0 .

Do đó: M = 7 – (x – 2)2 ≤ 7

Vậy GTLN của biểu thức M bằng 7, giá trị này đạt được khi x = 2

b) N = x – x2 = - x2 + 2.x - = 2



Vậy GTLN của N bằng , giá trị này đạt được khi x =



c) P = 2x – 2x2 – 5 = 2( - x2 + x – 5) = 2[( - x2 + 2. x – ) – ] = - - (x - )2 ≤ -



Vậy GTLN của biểu thức P bằng - , giá trị này đạt được khi x =

