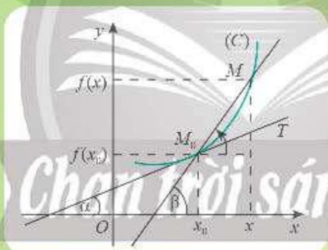
Chân trời sáng tạo

TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
NGÔ HOÀNG LONG – PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

Bài tập TOÁN 11

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
NGÔ HOÀNG LONG – PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

Bài tập TOÁN 11

Chân trời sáng tạo

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Cùng với *Sách giáo khoa Toán 11* và *Sách giáo viên Toán 11* (bộ sách Chân trời sáng tạo), nhóm tác giả biên soạn cuốn **Bài tập Toán 11 (tập một, tập hai)** nhằm giúp học sinh rèn luyện kiến thức và các kĩ năng cơ bản phù hợp với *Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán* của Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành năm 2018.

Nội dung sách **Bài tập Toán 11** thể hiện tinh thần tích hợp, phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh.

Cấu trúc sách tương ứng với Sách giáo khoa Toán 11 (Bộ sách Chân trời sáng tạo). **Bài tập Toán 11, tập hai** bao gồm bốn chương:

– Chương VI. Hàm số mũ và hàm số lôgarit

– Chương VII. Đạo hàm

– Chương VIII. Quan hệ vuông góc trong không gian

– Chương IX. Xác suất

Mỗi chương bao gồm nhiều bài học. Mỗi bài học gồm các phần như sau:

– KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– BÀI TẬP MẪU

– BÀI TẬP

Cuối mỗi chương là phần LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ.

Rất mong nhận được góp ý của quý thầy, cô giáo và các bạn học sinh để Bộ sách ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Chương VI.
HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT
Bài 1. PHÉP TÍNH LUỸ THỪA

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Luỹ thừa với số mũ nguyên

– Luỹ thừa với số mũ nguyên dương:

$a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a}_{n \text{ thừa số}}$ $(a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*)$.

– Luỹ thừa với số mũ nguyên âm, số mũ 0:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a^0 = 1\ (n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}, a \neq 0).$$

2. Căn bậc *n*

Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$.

– Số a là ***căn bậc n*** của số b nếu $a^n = b$.

– Sự tồn tại căn bậc n:

- Nếu n lẻ thì có duy nhất một căn bậc n của b, kí hiệu $\sqrt[n]{b}$.
- Nếu n chẵn thì:
  - $b < 0$: không tồn tại căn bậc n của b.
  - $b = 0$: có một căn bậc n của b là 0.
  - $b > 0$: có hai căn bậc n của b đối nhau, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$ và giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

- Các tính chất:
  - $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
  - $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
  - $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
  - $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$
  - $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

3. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực dương a và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Ta có:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

4. Luỹ thừa với số mũ vô tỉ

Giả sử a là một số dương, α là một số vô tỉ và (r_n) là một dãy số hữu tỉ sao cho $\lim r_n = \alpha$. Khi đó $a^\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n}$.

5. Tính chất của phép tính luỹ thừa

Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

- $a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
- $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$
- $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$
- $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[5]{9} . \sqrt[5]{27}$; b) $\dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$; c) $\sqrt[5]{3\sqrt[3]{9}}$;

d) $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32}$; e) $(\sqrt[5]{3})^6 + \sqrt[4]{\sqrt[5]{81}}$.

Giải

a) $\sqrt[5]{9} . \sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{3^2} . \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{3^2 . 3^3} = \sqrt[5]{3^5} = 3$;

b) $\dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$;

c) $\sqrt[5]{3\sqrt[3]{9}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{3^3 . 3^2}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{3^5}} = \sqrt[5.3]{3^5} = \sqrt[3.5]{3^5} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{3^5}} = \sqrt[3]{3}$;

d) $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3^4 . 2} - \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2} + 3\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$;

e) $(\sqrt[5]{3})^6 + \sqrt[4]{\sqrt[5]{81}} = \sqrt[5]{3^6} + \sqrt[4]{\sqrt[5]{3^4}} = 3\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{3} = 4\sqrt[5]{3}$.

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\dfrac{3^{\pi+1}}{3^{\pi-1}}$;   b) $\left(4^{\sqrt{27}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$;

c) $3^{2+2\sqrt{3}}.3^{2-2\sqrt{3}}$;   d) $\left(a^{\sqrt{3}}b^{-\frac{6}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(a>0,b>0)$.

Giải

a) $\dfrac{3^{\pi+1}}{3^{\pi-1}}=3^{\pi+1-(\pi-1)}=3^2=9$;

b) $\left(4^{\sqrt{27}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\left(4^{3\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}=4^{-3}=\dfrac{1}{4^3}=\dfrac{1}{64}$;

c) $3^{2+2\sqrt{3}}.3^{2-2\sqrt{3}}=3^{2+2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}}=3^4=81$;

d) $\left(a^{\sqrt{3}}b^{-\frac{6}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=a^{\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}}b^{-\frac{6}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}}}=ab^{-2}=\dfrac{a}{b^2}$.

Bài 3. Biết rằng $4^x=5$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{8^x-8^{-x}}{2^x-2^{-x}}$.

Giải

$$\frac{8^x-8^{-x}}{2^x-2^{-x}}=\frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}=\frac{(2^x-2^{-x})(2^{2x}+2^x2^{-x}+2^{-2x})}{2^x-2^{-x}}=2^{2x}+2^x2^{-x}+2^{-2x}$$

$$=4^x+1+4^{-x}=4^x+1+\frac{1}{4^x}=5+1+\frac{1}{5}=\frac{31}{5}.$$

Bài 4. Biết rằng $5^x=10^y=2$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$.

Giải

Ta có: $5^x=2\Rightarrow 5=2^{\frac{1}{x}}$; $10^y=2\Rightarrow 10=2^{\frac{1}{y}}$.

Từ đó, $2^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=2^{\frac{1}{x}}:2^{\frac{1}{y}}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}=2^{-1}\Rightarrow\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-1$.

C. BÀI TẬP

1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^0$;   b) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$;   c) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-4}$;

d) $(-55)^0$;   e) $2^{-8}.2^5$;   g) $\dfrac{3^4}{(3^{-2})^{-3}}$.

2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{0,001}$; b) $\sqrt[5]{-32}$; c) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$;

d) $-\sqrt[6]{100^3}$; e) $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}$; g) $\sqrt[5]{(2-\sqrt{5})^5}$.

3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[4]{125}\,.\,\sqrt[4]{5}$; b) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$; c) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}}$;

d) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$; e) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$; g) $(-\sqrt[6]{4})^3$

4. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{135}-5\sqrt[3]{5}$; b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}+3\sqrt[3]{3}$;

c) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{16}}+\sqrt[5]{64}+2\sqrt[5]{2}$; d) $(\sqrt[4]{5})^5-\sqrt{\sqrt[4]{25}}$.

5. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $8^{-\frac{2}{3}}$; b) $32^{-\frac{2}{5}}$; c) $81^{1,25}$;

d) $1000^{-\frac{5}{3}}$; e) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$; g) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

6. Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng một luỹ thừa ($a > 0$):

a) $\sqrt[4]{2^{-3}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$; c) $(\sqrt[5]{3})^4$;

d) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$; e) $\sqrt[3]{a}\,.\sqrt[4]{a^3}:(\sqrt[6]{a})^5$; g) $a^{\frac{1}{3}}:a^{-\frac{3}{2}}.a^{-\frac{2}{3}}$.

7. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư):

a) $15^{\frac{2}{5}}$; b) $20^{-\frac{1}{2}}$;

c) $5,7^{2,4}$; d) $0,45^{-2,38}$.

8. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $2^{\sqrt{3}+1} : 2^{\sqrt{3}-1}$; b) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$; c) $[(\sqrt{7})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{8}}$;

d) $a^{2\sqrt{5}+1} : a^{2\sqrt{5}-2}$; e) $3^{3+\sqrt{2}} \,.\, 3^{-1+\sqrt{2}} \,.\, 9^{1-\sqrt{2}}$; g) $(a^{-\sqrt{3}} b^{\frac{1}{\sqrt{3}}})^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

9. Cho $a > 0$, $b > 0$. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}\right)$;

b) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$.

10. Biết rằng $5^{2x} = 3$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^{x} + 5^{-x}}$.

11. Biết rằng $3^{\alpha} + 3^{-\alpha} = 3$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{\frac{-\alpha}{2}}$; b) $3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha}$.

12. Biết rằng $4^{x} = 25^{y} = 10$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

13. Cường độ ánh sáng tại độ sâu h (m) dưới một mặt hồ được tính bằng công thức $I_h = I_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{h}{4}}$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ đó.

a) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt hồ?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 m gấp bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu 6 m?

Bài 2. PHÉP TÍNH LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm lôgarit

Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Số thực α thoả mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là ***lôgarit cơ số a của b*** và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$$

Chú ý:

- Từ định nghĩa, ta có:

  $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^b = b$; $a^{\log_a b} = b$.

- $\log_{10} b$ được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$;

  $\log_e b$ được viết là $\ln b$.

2. Tính chất

Với $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, ta có:

- $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ (lôgarit của một tích)
- $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ (lôgarit của một thương)
- $\log_a M^{\alpha} = \alpha \log_a M$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ (lôgarit của một luỹ thừa)

Chú ý: Đặc biệt, ta có:

- $\log_a \dfrac{1}{N} = -\log_a N$;
- $\log_a \sqrt[n]{M} = \dfrac{1}{n}\log_a M$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Công thức đổi cơ số

Cho các số dương a, b, N, $a \neq 1$, $b \neq 1$, ta có $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$.

Đặc biệt, ta có:

- $\log_a N = \dfrac{1}{\log_N a}$ $(N \neq 1)$;
- $\log_{a^{\alpha}} N = \dfrac{1}{\alpha}\log_a N$ $(\alpha \neq 0)$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_3 9^{\frac{1}{5}}$; b) $\log \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$; c) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}}$.

Giải

a) $\log_3 9^{\frac{1}{5}} = \log_3 3^{\frac{2}{5}} = \dfrac{2}{5}$;

b) $\log \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}} = \log 10^{-\frac{1}{3}} = -\dfrac{1}{3}$;

c) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}} = (5^{-2})^{\log_5 \frac{1}{3}} = 5^{-2\log_5 \frac{1}{3}} = (5^{\log_5 \frac{1}{3}})^{-2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9.$

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_3 45 + \log_3 \dfrac{1}{5}$;

b) $\log_4 48 - \log_4 3$;

c) $\log_2 \dfrac{16}{3} + 2\log_2 \sqrt{6}$;

d) $\dfrac{1}{3}\log_3 \dfrac{9}{7} + \log_3 \sqrt[3]{7}$.

Giải

a) $\log_3 45 + \log_3 \dfrac{1}{5} = \log_3\left(45.\dfrac{1}{5}\right) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$;

b) $\log_4 48 - \log_4 3 = \log_4 \dfrac{48}{3} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$;

c) $\log_2 \dfrac{16}{3} + 2\log_2 \sqrt{6} = \log_2 \dfrac{16}{3} + \log_2 6 = \log_2\left(\dfrac{16}{3}.6\right) = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$;

d) $\dfrac{1}{3}\log_3 \dfrac{9}{7} + \log_3 \sqrt[3]{7} = \dfrac{1}{3}(\log_3 9 - \log_3 7) + \log_3 7^{\frac{1}{3}}$

$$= \dfrac{1}{3}\log_3 3^2 - \dfrac{1}{3}\log_3 7 + \dfrac{1}{3}\log_3 7 = \dfrac{2}{3}\log_3 3 = \dfrac{2}{3}.$$

Bài 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_9 \dfrac{1}{27}$;

b) $\log_8 9 \,.\, \log_{27} \dfrac{1}{16}$;

c) $\log_4 27 \,.\, \log_3 5 \,.\, \log_{25} 8$.

Giải

a) $\log_9 \dfrac{1}{27} = \dfrac{\log_3 \dfrac{1}{27}}{\log_3 9} = \dfrac{\log_3 3^{-3}}{\log_3 3^2} = -\dfrac{3}{2}$;

b) $\log_8 9 \,.\, \log_{27} \dfrac{1}{16} = \dfrac{\log_2 9}{\log_2 8} \,.\, \dfrac{\log_2 \dfrac{1}{16}}{\log_2 27} = \dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 2^3} \,.\, \dfrac{\log_2 2^{-4}}{\log_2 3^3}$

$$= \dfrac{2\log_2 3}{3\log_2 2} \,.\, \dfrac{-4\log_2 2}{3\log_2 3} = \dfrac{2}{3} \,.\, \dfrac{-4}{3} = -\dfrac{8}{9};$$

c) $\log_4 27 \,.\, \log_3 5 \,.\, \log_{25} 8 = \dfrac{\log_2 27}{\log_2 4} \cdot \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \dfrac{\log_2 8}{\log_2 25}$

$$= \frac{\log_2 3^3}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 5^2}$$

$$= \frac{3\log_2 3}{2\log_2 2} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{3\log_2 2}{2\log_2 5} = \frac{9}{4}.$$

Bài 4. Biết rằng $2\log 2 = a$, $\log 3 = b$. Biểu thị các biểu thức sau theo a và b.

a) $\log 18$; b) $\log_2 12$; c) $\log 75$.

Giải

Từ giả thiết, ta có $\log 2 = \dfrac{a}{2}$.

a) $\log 18 = \log(2 \,.\, 3^2) = \log 2 + 2\log 3 = \dfrac{a}{2} + 2b$.

b) $\log_2 12 = \dfrac{\log 12}{\log 2} = \dfrac{\log(2^2.3)}{\log 2} = \dfrac{2\log 2 + \log 3}{\log 2} = \dfrac{a+b}{\frac{a}{2}} = \dfrac{2(a+b)}{a}$.

c) Ta có $\log 5 = \log\dfrac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \dfrac{a}{2}$.

Suy ra $\log 75 = \log(3 \,.\, 5^2) = \log 3 + 2\log 5 = b + 2\left(1 - \dfrac{a}{2}\right) = 2 - a + b$.

C. BÀI TẬP

1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_9 \dfrac{1}{81}$; b) $\log 10\,000$; c) $\log 0{,}001$;

d) $\log_{0,7} 1$; e) $\log_5 \sqrt[4]{5}$; g) $\log_{0,5} 0{,}125$.

2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $3^{\log_3 5}$; b) $e^{\ln 3}$; c) $7^{2\log_7 8}$;

d) $2^{\log_2 3 + \log_2 5}$; e) $4^{\log_2 \frac{1}{5}}$; g) $0{,}001^{\log 2}$.

3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_3 \frac{9}{10} + \log_3 30$;

b) $\log_5 75 - \log_5 3$;

c) $\log_3 \frac{5}{9} - 2\log_3 \sqrt{5}$;

d) $4\log_{12} 2 + 2\log_{12} 3$;

e) $2\log_5 2 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2}$;

g) $\log_3 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[3]{9} + 2\log_3 \sqrt[4]{27}$.

4. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_8 \frac{1}{32}$;

b) $\log_5 3 \,.\, \log_3 5$;

c) $2^{\frac{1}{\log_5 2}}$;

d) $\log_{27} 25 \,.\, \log_5 81$.

5. Tính:

a) $\log_3 5 \,.\, \log_5 7 \,.\, \log_7 9$;

b) $\log_2 \frac{1}{25} \,.\, \log_3 \frac{1}{32} \,.\, \log_5 \frac{1}{27}$.

6. Sử dụng máy tính cầm tay, tính (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư):

a) $\log_7 21$;

b) $\log 2{,}25$;

c) $\ln \sqrt{14}$;

d) $\log_{0,5} 3 + \log_5 0{,}3$.

7. Đặt $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. Hãy biểu thị các biểu thức sau theo a và b.

a) $\log_2 45$;

b) $\log_2 \frac{\sqrt{15}}{6}$;

c) $\log_3 20$.

8. Đặt $\log x = a$, $\log y = b$, $\log z = c$ $(x, y, z > 0)$. Biểu thị các biểu thức sau theo a, b, c.

a) $\log(xyz)$;

b) $\log \frac{x^3 \sqrt[3]{y}}{100\sqrt{z}}$;

c) $\log_z(xy^2)$ $(z \neq 1)$.

9. Đặt $\log_2 3 = a$, $\log_3 15 = b$. Biểu thị $\log_{30} 18$ theo a và b.

Bài 3. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

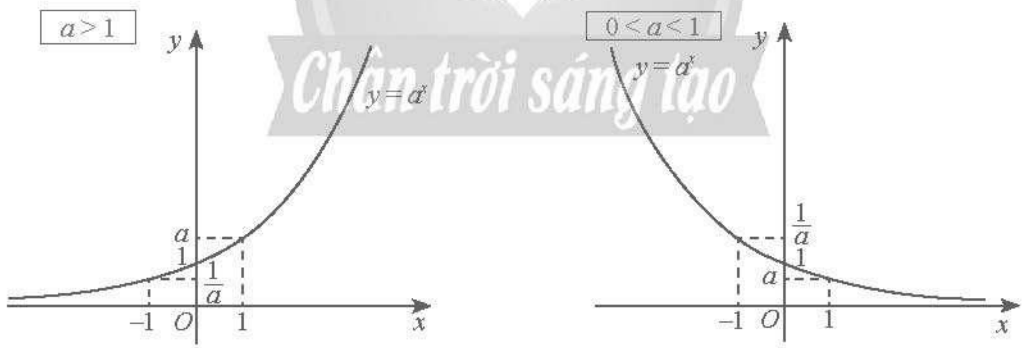
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số mũ

– Hàm số $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) được gọi là ***hàm số mũ*** cơ số a.

– Hàm số $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) có:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$.
- Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:
  - Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và
$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty, \lim_{x \to -\infty} y = 0.$$
  - Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và
$$\lim_{x \to +\infty} y = 0, \lim_{x \to -\infty} y = +\infty.$$
- Đồ thị:
  - Cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$, đi qua điểm $(1; a)$.
  - Nằm phía trên trục hoành.



Hình 1

2. Hàm số lôgarit

– Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) được gọi là ***hàm số lôgarit*** cơ số a.

– Hàm số $y = \log_a x$($a > 0$, $a \neq 1$) có:

- Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.
- Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.

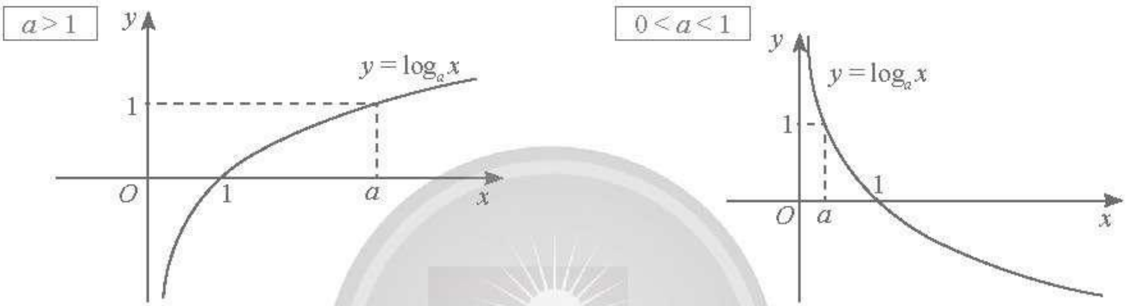
- Sự biến thiên:
  - Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty, \ \lim_{x \to 0^+} y = -\infty.$$

  - Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và

$$\lim_{x \to +\infty} y = -\infty, \ \lim_{x \to 0^+} y = +\infty.$$

- Đồ thị:
  - Cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$, đi qua điểm $(a; 1)$.
  - Nằm bên phải trục tung.



Hình 2

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

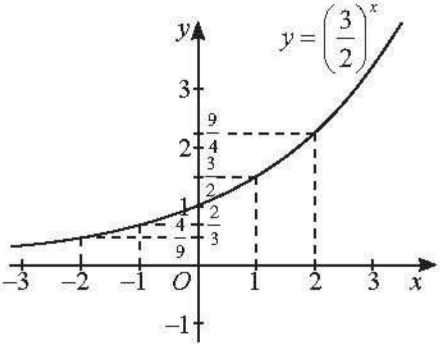
Giải

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Do $\frac{3}{2} > 1$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$



Hình 3

Đồ thị hàm số đi qua các điểm có toạ độ theo bảng giá trị và nằm phía trên trục hoành.

Từ đó, ta vẽ được đồ thị hàm số như hình bên.

Bài 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_{0,5} x$.

Giải

Tập xác định: $(0; +\infty)$.

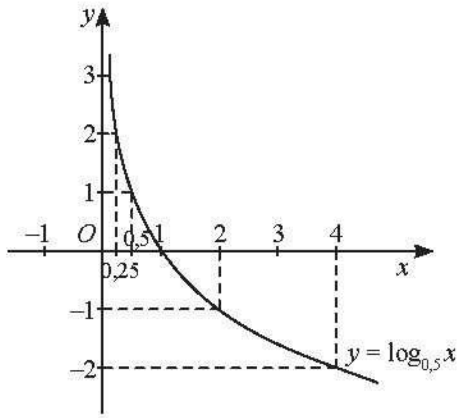
Do $0 < 0,5 < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Bảng giá trị:

x	0,25	0,5	1	2	4
y	2	1	0	-1	-2

Đồ thị hàm số đi qua các điểm có toạ độ theo bảng giá trị và nằm bên phải trục tung.

Từ đó, ta vẽ được đồ thị hàm số như hình bên.



Hình 4

Bài 3. So sánh các cặp số sau:

a) $0,75^{-0,1}$ và $0,75^{-0,2}$; b) $\sqrt[3]{4}$ và $\sqrt[5]{8}$; c) $\sqrt[4]{\frac{1}{27}}$ và $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$.

Giải

a) Do $0,75 < 1$ nên hàm số $y = 0,75^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $-0,1 > -0,2$ nên $0,75^{-0,1} < 0,75^{-0,2}$.

b) Ta có: $\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}$.

Do $2 > 1$ nên hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$ nên

$$2^{\frac{2}{3}} > 2^{\frac{3}{5}} \text{ hay } \sqrt[3]{4} > \sqrt[5]{8}.$$

c) Ta có: $\sqrt[4]{\frac{1}{27}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Do $\frac{1}{3} < 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ nên

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ hay } \sqrt[4]{\frac{1}{27}} < \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.$$

Bài 4. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{0,2} \pi$ và $\log_{0,2} 3$; b) $4\log_3 2$ và $3\log_3 \sqrt[3]{15}$.

Giải

a) Hàm số $y = \log_{0,2} x$ có cơ số $0,2 < 1$ nên nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và $\pi > 3$ nên $\log_{0,2}\pi < \log_{0,2} 3$.

b) Ta có $4\log_3 2 = \log_3 2^4 = \log_3 16$; $3\log_3 \sqrt[3]{15} = \log_3 (\sqrt[3]{15})^3 = \log_3 15$.

Hàm số $y = \log_3 x$ có cơ số $3 > 1$ nên đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $16 > 15$ nên $\log_3 16 > \log_3 15$ hay $4\log_3 2 > 3\log_3 \sqrt[3]{15}$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = f(x) = 2^x$ trên đoạn $[-2; 3]$; b) $y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Giải

a) Hàm số $y = f(x) = 2^x$ có cơ số $2 > 1$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$\max_{x\in[-2;3]} y = f(3) = 2^3 = 8 \text{ và } \min_{x\in[-2;3]} y = f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

b) Với $-1 \le x \le 2$, ta có $-3 \le 2x - 1 \le 3$.

Hàm số $y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$ có cơ số $\frac{1}{3} < 1$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \text{ hay } 27 \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \ge \frac{1}{27}.$$

Từ đó, ta có: $\max_{x\in[-1;2]} y = 27$ và $\min_{x\in[-1;2]} y = \frac{1}{27}$.

C. BÀI TẬP

1. Vẽ đồ thị hàm số $y = (\sqrt{2})^x$.

2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{3}{2}} x$.

3. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \log_2(x - 4)$; b) $y = \log_{0,2}(x^2 + 2x + 1)$; c) $y = \log_5 \frac{x}{x-1}$.

4. So sánh các cặp số sau:

a) $1,04^{1,7}$ và $1,04^2$; b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$ và $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

c) $1,2^{0,3}$ và $0,9^{1,8}$;

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,4}$ và $3^{-0,2}$.

5. So sánh các cặp số sau:

a) $\sqrt{3}$ và $\sqrt[5]{27}$;

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{4}$ và $\left(\frac{1}{27}\right)^{3}$;

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ và $\sqrt[5]{25}$;

d) $\sqrt[9]{0,7^{10}}$ và $\sqrt[10]{0,7^{9}}$.

6. So sánh các cặp số sau:

a) $\log 4,9$ và $\log 5,2$;

b) $\log_{0,3} 0,7$ và $\log_{0,3} 0,8$;

c) $\log_{\pi} 3$ và $\log_{3} \pi$.

7. So sánh các cặp số sau:

a) $2\log_{0,6} 5$ và $3\log_{0,6}(2\sqrt[3]{3})$;

b) $6\log_5 2$ và $2\log_5 6$;

c) $\frac{1}{2}\log_2 121$ và $2\log_2 2\sqrt{3}$;

d) $2\log_3 7$ và $6\log_9 4$.

8. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{x}$ trên đoạn $[-1; 4]$;

b) $y = f(x) = \frac{1}{3^x}$ trên đoạn $[-2; 2]$.

9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = f(x) = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$;

b) $y = f(x) = \log_2(x+1)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$.

10. Sau khi bệnh nhân uống một liều thuốc, lượng thuốc còn lại trong cơ thể giảm dần và được tính theo công thức $D(t) = D_0.a^t$ (mg), trong đó D_0 và a là các hằng số dương, t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm uống thuốc.

a) Tại sao có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$?

b) Biết rằng bệnh nhân đã uống 100 mg thuốc và sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn 80 mg. Hãy xác định giá trị của D_0 và a.

b) Sau 5 giờ, lượng thuốc đã giảm đi bao nhiêu phần trăm so với lượng thuốc ban đầu?

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình mũ cơ bản

$$a^x = b \ (a > 0, a \neq 1)$$

- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

Chú ý: Với $a > 0, a \neq 1$

a) $a^x = a^\alpha \Leftrightarrow x = \alpha$.

b) Tổng quát hơn, $a^{u(x)} = a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.

2. Phương trình lôgarit cơ bản

$$\log_a x = b \ (a > 0, a \neq 1)$$

Phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Chú ý: Với $a > 0, a \neq 1$.

a) $\log_a u(x) = b \Leftrightarrow u(x) = a^b$.

b) $\log_a u(x) = \log_a v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ u(x) = v(x). \end{cases}$

Có thể thay $u(x) > 0$ bằng $v(x) > 0$ (chọn bất phương trình đơn giản hơn).

3. Bất phương trình mũ cơ bản

$$a^x > b \text{ hoặc } a^x \geq b \text{ hoặc } a^x < b \text{ hoặc } a^x \leq b \ (a > 0, a \neq 1).$$

Bảng tổng kết về nghiệm của các bất phương trình trên:

Phương trình	$b \leq 0$	$b > 0$	
		$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^x > b$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$x > \log_a b$	$x < \log_a b$
$a^x \geq b$		$x \geq \log_a b$	$x \leq \log_a b$
$a^x < b$	Vô nghiệm	$x < \log_a b$	$x > \log_a b$
$a^x \leq b$		$x \leq \log_a b$	$x \geq \log_a b$

Chú ý:

- Nếu $a > 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) > v(x)$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

4. Bất phương trình lôgarit cơ bản

$\log_a x > b$ hoặc $\log_a x \geq b$ hoặc $\log_a x < b$ hoặc $\log_a x \leq b$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Bảng tổng kết về nghiệm của các bất phương trình trên:

Bất phương trình	$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a x > b$	$x > a^b$	$0 < x < a^b$
$\log_a x \geq b$	$x \geq a^b$	$0 < x \leq a^b$
$\log_a x < b$	$0 < x < a^b$	$x > a^b$
$\log_a x \leq b$	$0 < x \leq a^b$	$x \geq a^b$

Chú ý:

- Nếu $a > 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} v(x) > 0 \\ u(x) > v(x). \end{cases}$
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ u(x) < v(x). \end{cases}$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $5^{x+2} = \sqrt[3]{25}$;

b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} = 32^{x+3}$.

Giải

a) Ta có: $5^{x+2} = \sqrt[3]{25} \Leftrightarrow 5^{x+2} = 5^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x + 2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{4}{3}$.

b) Ta có: $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} = 32^{x+3} \Leftrightarrow (2^{-3})^{2x-1} = (2^5)^{x+3} \Leftrightarrow 2^{-6x+3} = 2^{5x+15}$

$$\Leftrightarrow -6x + 3 = 5x + 15 \Leftrightarrow 11x = -12 \Leftrightarrow x = -\frac{12}{11}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{12}{11}$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\log_{16}(3x - 5) = \frac{1}{2}$;

b) $\log_3 x + \log_3(x + 1) = \log_3(5x + 12)$.

Giải

a) Ta có: $\log_{16}(3x-5)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 3x-5=16^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 3x-5=4\Leftrightarrow 3x=9\Leftrightarrow x=3.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

b) Điều kiện: $x > 0$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$\log_3[x(x+1)]=\log_3(5x+12)\Leftrightarrow x^2+x=5x+12\Leftrightarrow x^2-4x-12=0.$

$\Leftrightarrow x=-2$ (loại) hoặc $x = 6$ (nhận).

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 6$.

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1}\geq\dfrac{1}{81}$; b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{3x}<25^{1-x}$.

Giải

a) Ta có: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1}\geq\dfrac{1}{81}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1}\geq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{4}\Leftrightarrow 2x+1\leq 4$ (do $0<\dfrac{1}{3}<1$)

$$\Leftrightarrow 2x\leq 3\Leftrightarrow x\leq\frac{3}{2}.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x\leq\dfrac{3}{2}$.

b) Ta có: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{3x}<25^{1-x}\Leftrightarrow\left(5^{-\frac{1}{2}}\right)^{3x}<\left(5^2\right)^{1-x}\Leftrightarrow 5^{-\frac{3x}{2}}<5^{2-2x}$

$$\Leftrightarrow -\frac{3x}{2}<2-2x \text{ (do } 5>1\text{)} \Leftrightarrow \frac{x}{2}<2\Leftrightarrow x<4.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x < 4$.

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\sqrt{5}}(x^2-4)<2$; b) $\log_{0,5}(2x+1)\geq\log_{0,5}(3x-4)$.

Giải

a) Điều kiện: $x^2-4>0\Leftrightarrow x<-2$ hoặc $x > 2$.

Do $\sqrt{5}>1$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-4<(\sqrt{5})^2\Leftrightarrow x^2-9<0\Leftrightarrow -3<x<3.$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của bất phương trình là $-3<x<-2$ hoặc $2<x<3$.

b) Do $0 < 0,5 < 1$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x+1>0 \\ 2x+1 \le 3x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ x \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 5.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \ge 5$.

C. BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a) $3^{2x+1} = \dfrac{1}{27}$;

b) $5^{2x} = 10$;

c) $3^x = 18$;

d) $0,2^{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{125}}$;

e) $5^{3x} = 25^{x-2}$;

g) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x+1} = \left(\dfrac{1}{32}\right)^{x-1}$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $\log_3(2x-1) = 3$;

b) $\log_{49}x = 0,25$;

c) $\log_2(3x+1) = \log_2(2x-4)$;

d) $\log_5(x-1) + \log_5(x-3) = \log_5(2x+10)$;

e) $\log x + \log(x-3) = 1$;

g) $\log_2(\log_{81} x) = -2$.

3. Giải các bất phương trình sau:

a) $4^x < 2\sqrt{2}$;

b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x-1} \ge \dfrac{1}{9}$;

c) $5.\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < 40$;

d) $4^{2x} < 8^{x-1}$;

e) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2-x} \le \left(\dfrac{1}{25}\right)^x$;

g) $0,25^{x-2} > 0,5^{x+1}$.

4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_3(x+4) < 2$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} x \ge 4$;

c) $\log_{0,25}(x-1) \le -1$;

d) $\log_5(x^2 - 24x) \ge 2$;

e) $2\log_{\frac{1}{4}}(x+1) \ge \log_{\frac{1}{4}}(3x+7)$;

g) $2\log_3(x+1) \le 1 + \log_3(x+7)$

5. Giải các phương trình sau:

a) $4^x - 5.2^x + 4 = 0$;

b) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x - 2.\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1} - 27 = 0$.

6. Tìm tất cả các số nguyên x thoả mãn $\log_3(x-2).\log_3(x-1)<0$.

7. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y=f(x)=\sqrt{4-2^x}+\dfrac{1}{\sqrt{\log_2 x}}$; b) $y=f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}$.

8. Cho hàm số $y=f(x)=\log_2 x$. Biết rằng $f(b)-f(a)=5$ $(a, b>0)$, tìm giá trị của $\dfrac{b}{a}$.

9. Cho hai số thực a và b thoả mãn $125^a.25^b=3$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=3a+2b.$$

10. Đồng vị phóng xạ Uranium-235 (thường được sử dụng trong điện hạt nhân) có chu kì bán rã là $T = 703\ 800\ 000$ năm. Theo đó, nếu ban đầu có 100 gam Uranium-235 thì sau t năm, do bị phân rã, lượng Uranium-235 còn lại được tính bởi công thức $M=100\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (g). Sau thời gian bao lâu thì lượng Uranium-235 còn lại bằng 90% so với ban đầu?

11. Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililít nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước là $P=P_0.10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililít nước có 9 000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước là 6 000. Sau thời gian bao lâu thì số lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước trong thùng ít hơn hoặc bằng 1 000?

12. Độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\mathrm{pH}=-\log x$, trong đó x là nồng độ ion H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L. Biết rằng độ pH của dung dịch A lớn hơn độ pH của dung dịch B là 0,7. Dung dịch B có nồng độ ion H^+ gấp bao nhiêu lần nồng độ ion H^+ của dung dịch A?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. TRẮC NGHIỆM

1. Biết rằng $2^a = 9$. Tính giá trị của biểu thức $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{a}{6}}$.

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{9}$. D. 3.

2. Giá trị của biểu thức $2\log_5 10 + \log_5 0{,}25$ bằng

A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

3. Cho x và y là số dương. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2^{\log x + \log y} = 2^{\log x} + 2^{\log y}$. B. $2^{\log(x+y)} = 2^{\log x} \cdot 2^{\log y}$.

C. $2^{\log(xy)} = 2^{\log x} \cdot 2^{\log y}$. D. $2^{\log x \cdot \log y} = 2^{\log x} + 2^{\log y}$.

4. Biết rằng $x = \log_3 6 + \log_9 4$. Giá trị của biểu thức 3^x bằng

A. 6. B. 12. C. 24. D. 48.

5. Giá trị của biểu thức $(\log_2 25)(\log_5 8)$ bằng

A. 4. B. $\frac{1}{4}$. C. 6. D. $\frac{1}{6}$.

6. Đặt $\log 3 = a$, $\log 5 = b$. Khi đó $\log_{15} 50$ bằng

A. $\frac{1+2b}{a+b}$. B. $\frac{a-b}{a+b}$. C. $\frac{1-b}{a+b}$. D. $\frac{1+b}{a+b}$.

7. Cho ba số $a = 4^{0,9}$, $b = 8^{0,5}$, $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1,6}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $c > a > b$. B. $c > b > a$. C. $a > b > c$. D. $a > c > b$.

8. Cho ba số $a = -\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$, $b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ và $c = \frac{1}{2}\log_3 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a < b < c$. B. $b < a < c$. C. $c < a < b$. D. $a < c < b$.

9. Cho $0 < a < 1$, $x = \log_a \sqrt{2} + \log_a \sqrt{3}$, $y = \frac{1}{2}\log_a 5$, $z = \log_a \sqrt{14} - \log_a \sqrt{2}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x < y < z$. B. $y < x < z$. C. $z < x < y$. D. $z < y < x$.

10. Cho ba số $a=\log_{\frac{1}{2}}3,\ b=\left(\frac{1}{2}\right)^{0,3},\ c=2^{\frac{1}{3}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a<b<c$. B. $a<c<b$. C. $c<a<b$. D. $b<a<c$.

11. Giải phương trình $3^{4x}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

A. $-\frac{1}{4}$. B. $-\frac{3}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{1}{12\sqrt{3}}$.

12. Tập nghiệm của bất phương trình $0,3^{3x-1}>0,09$ là

A. $(1;+\infty)$. B. $(-\infty;1)$. C. $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$. D. $(0;1)$.

13. Biết rằng $\log_3 4.\log_4 8.\log_8 x=\log_8 64$. Giá trị của x là

A. $\frac{9}{2}$. B. 9. C. 27. D. 81.

14. Giải phương trình $\log_5(4x+5)=2+\log_5(x-4)$.

A. 9. B. 15. C. 4. D. 5.

15. Giả sử α và β là hai nghiệm của phương trình $\log_2 x.\log_2 3x=-\frac{1}{3}$. Khi đó tích $\alpha\beta$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. B. 3. C. $\sqrt{3}$. D. $\log_2 3$.

B. TỰ LUẬN

1. Tính giá trị của các biểu thức

a) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{5}{6}}\cdot\left(\frac{4^{\frac{3}{2}}}{3^3}\right)^{\frac{1}{2}}$;

b) $\log\sqrt{5}+\log\sqrt{2}$;

c) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}+\log_5\frac{9}{4}+\log_5\frac{4}{9}$;

d) $\log_2 7.\log_3 16.\log_9 3.\log_7 9$.

2. Biết rằng $x\log_5 4=1$. Tìm giá trị của biểu thức 4^x+4^{-x}.

3. Biết rằng $a=10^x$, $b=10^y$. Hãy biểu thị biểu thức $A=\log_{a^2}\sqrt[3]{b}$ theo x và y.

4. Giải các phương trình sau:

a) $4^x = \sqrt{2\sqrt{2}}$;

b) $9^{5x} = 27^{x-2}$;

c) $\log_{81} x = \dfrac{1}{2}$;

d) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) = \log_{\frac{1}{2}}(4x-1)$;

e) $\log_5(x-2) + \log_5(x+2) = 1$;

g) $\log_x 8 = \dfrac{3}{4}$.

5. Giải các bất phương trình sau:

a) $32^{2x} \geq 64^{x-2}$;

b) $25.\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x^2+2x+2} > 4$;

c) $\log(11x+1) < 2$;

d) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}}(2x+1)$.

6. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \log\left(1+\frac{1}{1}\right) + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{1}{99}\right).$$

7. Cho α là số thoả mãn $3^{\alpha} - 3^{-\alpha} = 2$. Tìm giá trị của các biểu thức:

a) $3^{\alpha} + 3^{-\alpha}$;

b) $9^{\alpha} - 9^{-\alpha}$.

8. Công thức $M = M_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ cho biết khối lượng của một chất phóng xạ sau thời gian t kể từ thời điểm nào đó (gọi là thời điểm ban đầu), M_0 là khối lượng ban đầu, T là chu kì bán rã của chất phóng xạ đó (cứ sau mỗi chu kì, khối lượng của chất phóng xạ giảm đi một nửa). Trong một phòng thí nghiệm, với khối lượng 200 g radon ban đầu, sau 16 ngày, chỉ còn lại 11 g. Chu kì bán rã của radon bằng bao nhiêu?

9. Công thức $\log x = 11,8 + 1,5M$ cho biết mối liên hệ giữa năng lượng x tạo ra (tính theo erg, 1 erg tương đương 10^{-7} jun) với độ lớn M theo thang Richter của một trận động đất.

a) Trận động đất có độ lớn 5 độ Richter tạo ra năng lượng gấp bao nhiêu lần so với trận động đất có độ lớn 3 độ Richter?

b) Người ta ước lượng rằng một trận động đất có độ lớn khoảng từ 4 đến 6 độ Richter. Năng lượng do trận động đất đó tạo ra nằm trong khoảng nào?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. PHÉP TÍNH LUỸ THỪA

1. a) 1; b) $\frac{25}{4}$; c) 81;

d) 1; e) $\frac{1}{8}$; g) $\frac{1}{9}$.

2. a) 0,1; b) –2; c) $\frac{3}{2}$;

d) –10; e) $2-\sqrt{3}$; g) $2-\sqrt{5}$.

3. a) $\sqrt[4]{125}\,.\,\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5^3\,.\,5} = \sqrt[4]{5^4} = 5$; b) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{243}{3}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$;

c) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{24}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{1}{2}$; d) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2.3]{2^6} = \sqrt[6]{2^6} = 2$;

e) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^3.3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4}} = \sqrt[3]{3}$;

g) $(-\sqrt[6]{4})^3 = -\sqrt[6]{4^3} = -\sqrt[6]{2^{2.3}} = -\sqrt[6]{2^6} = -2$.

4. a) $\sqrt[3]{135} - 5\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3^3.5} - 5\sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5} - 5\sqrt[3]{3} = -2\sqrt[3]{5}$;

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}} + 3\sqrt[3]{3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^4}} + 3\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4}} + 3\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3}$;

c) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{16}} + \sqrt[5]{64} + 2\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{2^4}} + \sqrt[5]{2^6} + 2\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2} + 2\sqrt[5]{2} + 2\sqrt[5]{2} = 5\sqrt[5]{2}$;

d) $(\sqrt[4]{5})^5 - \sqrt{\sqrt[4]{25}} = \sqrt[4]{5^5} - \sqrt[4]{\sqrt{5^2}} = 5\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = 4\sqrt[4]{5}$.

5. a) $8^{-\frac{2}{3}} = (2^3)^{-\frac{2}{3}} = 2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$; b) $32^{-\frac{2}{5}} = (2^5)^{-\frac{2}{5}} = 2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$;

c) $81^{1,25} = (3^4)^{\frac{5}{4}} = 3^5 = 243$;

d) $1000^{-\frac{2}{3}} = (10^3)^{-\frac{2}{3}} = 10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0,01$;

e) $\left(\dfrac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\dfrac{2^4}{3^4}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{4\left(-\frac{1}{4}\right)} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} = \dfrac{3}{2}$;

g) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2^3}{2^3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3\left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}.$

6. a) $2^{-\frac{3}{4}}$; b) $2^{-\frac{3}{5}}$; c) $3^{\frac{4}{5}}$;

d) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}} = (a\ .\ a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{1+\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{3}.\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}}$;

e) $\sqrt[3]{a}.\sqrt[4]{a^3}:(\sqrt[6]{a})^5 = a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{3}{4}}:(a^{\frac{1}{6}})^5 = a^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{12}} = a^{\frac{1}{4}}$;

g) $a^{\frac{1}{3}}:a^{-\frac{3}{2}}.a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}}.$

7. a) 2,9542; b) 0,2236; c) 65,1778; d) 6,6889.

8. a) $2^{\sqrt{3}+1}:2^{\sqrt{3}-1} = 2^{\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)} = 2^2 = 4$;

b) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} = 3^{\sqrt{2}.\sqrt{8}} = 3^{\sqrt{16}} = 3^4 = 81$;

c) $[(\sqrt{7})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{8}} = (7^{\frac{1}{2}})^{\sqrt{16}} = 7^{\frac{1}{2}.4} = 7^2 = 49$;

d) $a^{2\sqrt{5}+1}:a^{2\sqrt{5}-2} = a^{2\sqrt{5}+1-(2\sqrt{5}-2)} = a^3$;

e) $3^{3+\sqrt{2}}\ .\ 3^{-1+\sqrt{2}}\ .\ 9^{1-\sqrt{2}} = 3^{3+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}}\ .\ (3^2)^{1-\sqrt{2}} = 3^{2+2\sqrt{2}}\ .\ 3^{2-2\sqrt{2}} = 3^4 = 81$;

g) $(a^{-\sqrt{3}}b^{\frac{1}{\sqrt{3}}})^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = a^{-\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}}\ .\ b^{\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}}} = a^{-1}b^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{a}.$

9. a) $a-\frac{1}{b}$; b) $a+b$.

10. $\frac{5^{3x}+5^{-3x}}{5^x+5^{-x}} = \frac{(5^x+5^{-x})(5^{2x}-5^x5^{-x}+5^{-2x})}{5^x+5^{-x}} = 5^{2x}-1+5^{-2x} = 3-1+\frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$

11. a) $(3^{\frac{\alpha}{2}}+3^{-\frac{\alpha}{2}})^2 = 3^{\alpha}+2.3^{\frac{\alpha}{2}}.3^{-\frac{\alpha}{2}}+3^{-\alpha} = 3^{\alpha}+3^{-\alpha}+2 = 3+2 = 5.$

Suy ra $3^{\frac{\alpha}{2}}+3^{-\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{5}$ (do $3^{\frac{\alpha}{2}}+3^{-\frac{\alpha}{2}} > 0$).

b) $3^{2\alpha}+3^{-2\alpha} = (3^{\alpha}+3^{-\alpha})^2-2\ .\ 3^{\alpha}\ .\ 3^{-\alpha} = 3^2-2 = 7.$

12. $4^x = 10 \Rightarrow 10^{\frac{1}{x}} = 4$; $25^y = 10 \Rightarrow 10^{\frac{1}{y}} = 25$.

Suy ra $10^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 4\ .\ 25 = 100 = 10^2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$.

13. a) $\frac{I_1}{I_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0,84 = 84\%$.

b) $\frac{I_3}{I_6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}-\frac{6}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} \approx 1,68$ (lần).

Bài 2. PHÉP TÍNH LÔGARIT

1. a) $\log_9 \frac{1}{81} = \log_9 9^{-2} = -2$;

b) $\log 10\,000 = \log 10^4 = 4$;

c) $\log 0,001 = \log 10^{-3} = -3$;

d) $\log_{0,7} 1 = 0$;

e) $\log_5 \sqrt[4]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$;

g) $\log_{0,5} 0,125 = \log_{0,5} 0,5^3 = 3$.

2. a) 5;

b) 3;

c) $7^{2\log_7 8} = (7^{\log_7 8})^2 = 8^2 = 64$;

d) $2^{\log_2 3 + \log_2 5} = 2^{\log_2 3}\ .\ 2^{\log_2 5} = 3\ .\ 5 = 15$;

e) $4^{\log_2 \frac{1}{5}} = 2^{2\log_2 \frac{1}{5}} = \left(2^{\log_2 \frac{1}{5}}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$;

g) $0,001^{\log 2} = (10^{-3})^{\log 2} = (10^{\log 2})^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

3. a) $\log_3 \frac{9}{10} + \log_3 30 = \log_3\left(\frac{9}{10}.30\right) = \log_3 3^3 = 3$;

b) $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 \frac{75}{3} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$;

c) $\log_3 \frac{5}{9} - 2\log_3 \sqrt{5} = \log_3 \frac{5}{9} - \log_3 (\sqrt{5})^2 = \log_3 \frac{5}{9} - \log_3 5 = \log_3\left(\frac{5}{9} : 5\right) = \log_3 \frac{1}{9}$

$= \log_3 3^{-2} = -2$;

d) $4\log_{12} 2 + 2\log_{12} 3 = \log_{12} 2^4 + \log_{12} 3^2 = \log_{12}(2^4\ .\ 3^2) = \log_{12}(4\ .\ 3)^2$

$= \log_{12} 12^2 = 2$;

e) $2\log_5 2-\log_5 4\sqrt{10}+\log_5\sqrt{2}=\log_5 2^2-\log_5 4\sqrt{10}+\log_5\sqrt{2}$

$=\log_5 4-\log_5 4\sqrt{10}+\log_5\sqrt{2}=\log_5\dfrac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{10}}=\log_5\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\log_5 5^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2}$;

g) $\log_3\sqrt{3}-\log_3\sqrt[3]{9}+2\log_3\sqrt[4]{27}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}-\log_3 3^{\frac{2}{3}}+2\log_3 3^{\frac{3}{4}}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+2.\dfrac{3}{4}=\dfrac{4}{3}$.

4. a) $\log_8\dfrac{1}{32}=\dfrac{\log_2\dfrac{1}{32}}{\log_2 8}=\dfrac{\log_2 2^{-5}}{\log_2 2^3}=-\dfrac{5}{3}$;

b) $\log_5 3\ .\ \log_3 5=\log_5 3\ .\ \dfrac{1}{\log_5 3}=1$;

c) $2^{\frac{1}{\log_5 2}}=2^{\log_2 5}=5$;

d) $\log_{27} 25\ .\ \log_5 81=\dfrac{\log_3 25}{\log_3 27}\cdot\dfrac{\log_3 81}{\log_3 5}=\dfrac{\log_3 5^2}{\log_3 3^3}\cdot\dfrac{\log_3 3^4}{\log_3 5}=\dfrac{2\log_3 5}{3}\cdot\dfrac{4}{\log_3 5}=\dfrac{8}{3}$.

5. a) $\log_3 5\ .\ \log_5 7\ .\ \log_7 9=\log_3 5\ .\ \dfrac{\log_3 7}{\log_3 5}\cdot\dfrac{\log_3 9}{\log_3 7}=\log_3 3^2=2$;

b) $\log_2\dfrac{1}{25}\ .\ \log_3\dfrac{1}{32}\ .\ \log_5\dfrac{1}{27}=\log_2 5^{-2}\ .\ \log_3 2^{-5}\ .\ \log_5 3^{-3}$

$=(-2)\log_2 5\ .\ (-5)\log_3 2\ .\ (-3)\log_5 3$

$=-30\log_2 5\ .\ \log_3 2\ .\ \log_5 3$

$=-30\log_2 5\ .\ \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}=-30$;

6. a) 1,5646; b) 0,3522; c) 1,3195; d) –2,333.

7. a) $\log_2 45=\log_2 3^2\ .\ 5=2\log_2 3+\log_2 5=2a+b$;

b) $\log_2\dfrac{\sqrt{15}}{6}=\log_2\sqrt{15}-\log_2 6=\dfrac{1}{2}\log_2 15-\log_2(2\ .\ 3)$

$=\dfrac{1}{2}\log_2(3\ .\ 5)-(\log_2 2+\log_2 3)=\dfrac{1}{2}(\log_2 3+\log_2 5)-(1+\log_2 3)$

$=\dfrac{1}{2}(a+b)-(1+a)=-\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}-1$;

c) $\log_3 20=\dfrac{\log_2 20}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2(2^2\ .\ 5)}{\log_2 3}=\dfrac{2\log_2 2+\log_2 5}{\log_2 3}=\dfrac{2+b}{a}$.

8. a) $\log(xyz) = \log x + \log y + \log z = a + b + c$;

b) $\log\dfrac{x^3\sqrt[3]{y}}{100\sqrt{z}} = \log(x^3\sqrt[3]{y}) - \log(100\sqrt{z}) = \log(x^3 y^{\frac{1}{3}}) - \log(10^2 z^{\frac{1}{2}})$

$$= 3\log x + \frac{1}{3}\log y - 2 - \frac{1}{2}\log z = 3a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{2}c - 2;$$

c) $\log_z(xy^2) = \dfrac{\log(xy^2)}{\log z} = \dfrac{\log x + 2\log y}{\log z} = \dfrac{a+2b}{c}$.

9. $a = \log_2 3 = \dfrac{1}{\log_3 2} \Rightarrow \log_3 2 = \dfrac{1}{a}$;

$b = \log_3 15 = \log_3(3\ .\ 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5 \Rightarrow \log_3 5 = b - 1$.

$$\log_{30} 18 = \frac{\log_3 18}{\log_3 30} = \frac{\log_3(2\ .\ 3^2)}{\log_3(2\ .\ 3\ .\ 5)} = \frac{\log_3 2 + \log_3 3^2}{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 5}$$

$$= \frac{\log_3 2 + 2}{\log_3 2 + 1 + \log_3 5} = \frac{\frac{1}{a} + 2}{\frac{1}{a} + 1 + b - 1} = \frac{2a+1}{ab+1}.$$

Bài 3. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

1. HS tự vẽ hình.

2. HS tự vẽ hình

3. a) $(4; +\infty)$; b) $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$; c) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

4. a) $1{,}04^{1{,}7} < 1{,}04^2$; b) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}} < \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

c) $1{,}2^{0{,}3} > 1 > 0{,}9^{1{,}8}$; d) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-0{,}4} > 1 > 3^{-0{,}2}$.

5. a) $3^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{3}{5}}$ hay $\sqrt{3} < \sqrt[5]{27}$; b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^8 > \left(\dfrac{1}{3}\right)^9$ hay $\left(\dfrac{1}{9}\right)^4 > \left(\dfrac{1}{27}\right)^3$;

c) $5^{-\frac{1}{3}} < 5^{\frac{2}{5}}$ hay $\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}} < \sqrt[5]{25}$; d) $0{,}7^{\frac{10}{9}} < 0{,}7^{\frac{9}{10}}$ hay $\sqrt[9]{0{,}7^{10}} < \sqrt[10]{0{,}7^9}$.

6. a) $\log 4{,}9 < \log 5{,}2$; b) $\log_{0,3} 0{,}7 > \log_{0,3} 0{,}8$; c) $\log_\pi 3 < 1 < \log_3 \pi$.

7. a) $\log_{0,6} 25 < \log_{0,6} 24$ hay $2\log_{0,6} 5 < 3\log_{0,6}(2\sqrt[3]{3})$;

b) $\log_5 64 > \log_5 36$ hay $6\log_5 2 > 2\log_5 6$;

c) $\log_2 11 < \log_2 12$ hay $\dfrac{1}{2}\log_2 121 < 2\log_2 2\sqrt{3}$;

d) $\log_3 49 < \log_3 64$ hay $2\log_3 7 < 6\log_9 4$.

8. a) $\max\limits_{x\in[-1;4]} y = f(4) = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^4 = \dfrac{25}{16}$; $\min\limits_{x\in[-1;4]} y = f(-1) = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{3^x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ có cơ số $\dfrac{1}{3} < 1$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$\max\limits_{x\in[-2;2]} y = f(-2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$ và $\min\limits_{x\in[-2;2]} y = f(2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$.

9. a) $\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{3};3\right]} y = f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \dfrac{1}{3} = 2$ và $\min\limits_{x\in\left[\frac{1}{3};3\right]} y = f(3) = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3 = -2$.

b) $\max\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2};3\right]} y = f(3) = \log_2 4 = 2$ và $\min\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2};3\right]} y = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \log_2 \dfrac{1}{2} = -1$.

10. a) Do lượng thuốc trong cơ thể giảm dần, nên hàm số $D(t)$ nghịch biến, do đó $0 < a < 1$.

b) $D_0 = 100$, $a = \dfrac{80}{100} = 0{,}8$.

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc còn $D(5) = 100 \,.\, 0{,}8^5$. Tỉ lệ lượng thuốc đã giảm so với lượng thuốc ban đầu là $\dfrac{D_0 - D(5)}{D_0} = \dfrac{100 - 100 \,.\, 0{,}8^5}{100} \approx 0{,}6723 \approx 67{,}23\%$.

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1. a) Đưa về phương trình $3^{2x+1} = 3^{-3}$. Đáp số: $x = -2$.

b) $x = \dfrac{1}{2}\log_5 10$.

c) $x = \log_3 18$.

d) Đưa về phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$. Đáp số: $x = \frac{5}{2}$.

e) Đưa về phương trình $5^{3x} = 5^{2x-4}$. Đáp số: $x = -4$.

g) Đưa về phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5x-5}$. Đáp số: $x = 4$.

2. a) $x = 14$; b) $x = \sqrt{7}$; c) Vô nghiệm;
d) $x = 7$; e) $x = 5$; g) $x = 3$.

3. a) Đưa về bất phương trình $2^{2x} < 2^{\frac{3}{2}}$. Đáp số: $x < \frac{3}{4}$.

b) Đưa về bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{2}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$. Đáp số: $x \leq 5$.

c) Đưa về bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. Đáp số: $x > -3$.

d) Đưa về bất phương trình $2^{4x} < 2^{3x-3}$. Đáp số: $x < -3$.

e) Đưa về bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$. Đáp số: $x \leq \frac{2}{3}$.

g) Đưa về bất phương trình $0{,}5^{2x-4} > 0{,}5^{x+1}$. Đáp số: $x < 5$.

4. a) $-4 < x < 5$; b) $0 < x \leq \frac{1}{16}$;
c) $x \geq 5$; d) $x \leq -1$ hoặc $x \geq 25$.

e) Điều kiện: $x > -1$.

Đưa về bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}}(x+1)^2 \geq \log_{\frac{1}{4}}(3x+7)$, rồi đưa về bất phương trình $x^2 - x - 6 \leq 0$. Đáp số: $-1 < x \leq 3$.

g) Điều kiện: $x > -1$.

Đưa về bất phương trình $\log_3(x+1)^2 \leq \log_3[3(x+7)]$, rồi đưa về bất phương trình $x^2 - x - 20 \leq 0$. Đáp số: $-1 < x \leq 5$.

5. a) Đặt $t = 2^x (t > 0)$, nhận được phương trình $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Đáp số: $x = 0$ hoặc $x = 2$.

b) Đặt $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $(t > 0)$, nhận được phương trình $t^2 - 6t - 27 = 0$

$\Leftrightarrow t = 9$ (nhận) hoặc $t = -3$(loại).

Đáp số: $x = -2$.

6. Từ giả thiết, nhận được $1 < \log_3 x < 2$ hay $3 < x < 9$. Từ đó, các số nguyên x cần tìm là 4; 5; 6; 7; 8.

7. a) $(1; 2]$;   b) $(2; 3]$.

8. $\dfrac{b}{a} = 32$.

9. $P = 3a + 2b = \log_5 3$.

10. Khi $M = 90$ g, ta có phương trình:

$$90 = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 0,9 \Leftrightarrow \frac{t}{T} = \log_{\frac{1}{2}} 0,9$$

$$\Leftrightarrow t = T.\log_{\frac{1}{2}} 0,9 \approx 106\ 979\ 777 \text{ (năm)}.$$

11. $6\ 000 = 9\ 000.10^{-2\alpha} \Rightarrow \alpha = -\dfrac{1}{2}\log\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{2}$

$$9\ 000.10^{-\alpha t} \le 1\ 000 \Leftrightarrow 10^{-\alpha t} \le \frac{1}{9} \Leftrightarrow -\alpha t \le \log\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow t \ge -\frac{2}{\alpha}\log\frac{1}{3} = -\frac{2}{\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}}.\log\frac{1}{3} = \frac{4\log 3}{\log\frac{3}{2}} \approx 10,8 \text{ (giờ)}.$$

12. Ta có: $pH_A = -\log x_A$; $pH_B = -\log x_B$

$$\Rightarrow pH_A - pH_B = -\log x_A + \log x_B = \log\frac{x_B}{x_A}.$$

Từ đó suy ra $\log\dfrac{x_B}{x_A} = 0,7 \Rightarrow \dfrac{x_B}{x_A} = 10^{0,7} \approx 5$ (lần).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. TRẮC NGHIỆM

1. B	2. C	3. C	4. B	5. C
6. D	7. D	8. A	9. C	10. A
11. B	12. B	13. B	14. D	15. A

B. TỰ LUẬN

1. a) $\dfrac{3}{2}$;   b) $\dfrac{1}{2}$;   c) $\dfrac{27}{8}$;   d) 4.

2. $x\log_5 4 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\log_5 4} = \log_4 5.$

$4^x + 4^{-x} = 4^{\log_4 5} + 4^{-\log_4 5} = 5 + 5^{-1} = 5\dfrac{1}{5}.$

3. $A = \log_{a^2} \sqrt[3]{b} = \log_{10^{2x}} 10^{\frac{y}{3}} = \dfrac{1}{2x} \cdot \dfrac{y}{3} \log_{10} 10 = \dfrac{y}{6x}.$

4. a) $x = \dfrac{3}{8}$; b) $x = -\dfrac{6}{7}$; c) $x = 9$;

d) $x = 2$; e) $x = 3$; g) $x = 16$.

5. a) $x \geq -3$; b) $-2 < x < 0$;

c) $-\dfrac{1}{11} < x < 9$; d) $\dfrac{1}{3} < x \leq 2$.

6. $A = \log\left(1 + \dfrac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \log\left(1 + \dfrac{1}{99}\right)$

$= \log\left(2 \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{100}{99}\right) = \log 100 = 2.$

7. a) $(3^\alpha + 3^{-\alpha})^2 = 3^{2\alpha} + 2 + 3^{-2\alpha} = (3^\alpha - 3^{-\alpha})^2 + 4 = 2^2 + 4 = 8.$

$\Rightarrow 3^\alpha + 3^{-\alpha} = 2\sqrt{2}$ (do $3^\alpha + 3^{-\alpha} > 0$).

b) $9^\alpha - 9^{-\alpha} = (3^\alpha + 3^{-\alpha})(3^\alpha - 3^{-\alpha}) = 2\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}.$

8. $11 = 200 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{16}{T}} \Leftrightarrow \dfrac{16}{T} = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{11}{200} = \log_2 \dfrac{200}{11} \Leftrightarrow T = \dfrac{16}{\log_2 \dfrac{200}{11}} \approx 3{,}8$ (ngày).

9. a) Gọi x_1, x_2 (erg) lần lượt là năng lượng tạo ra của hai trận động đất có độ lớn lần lượt là $M_1 = 5, M_2 = 3$ (độ Richter).

Ta có: $\log x_1 = 11{,}8 + 1{,}5M_1$; $\log x_2 = 11{,}8 + 1{,}5M_2$

$\Rightarrow \log x_1 - \log x_2 = 1{,}5(M_1 - M_2) \Rightarrow \log \dfrac{x_1}{x_2} = 3 \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = 10^3 = 1\,000.$

b) $11{,}8 + 1{,}5 \cdot 4 \leq \log x \leq 11{,}8 + 1{,}5 \cdot 6 \Rightarrow 17{,}8 \leq \log x \leq 20{,}8 \Rightarrow 10^{17{,}8} \leq x \leq 10^{20{,}8}.$

Chương VII. ĐẠO HÀM

Bài 1. ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn này được gọi là ***đạo hàm*** của hàm số $f(x)$ tại x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$.

Vậy:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Chú ý:

– Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số này có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a; b)$ thì ta nói nó có *đạo hàm trên khoảng* $(a; b)$, kí hiệu y' hoặc $f'(x)$.

– Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$.

a) Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của biến tại x_0. Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ gọi là số gia tương ứng của hàm số. Khi đó, $x = x_0 + \Delta x$ và

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

b) Tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ biểu thị tốc độ thay đổi trung bình của đại lượng y theo đại lượng x trong khoảng từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$; còn $f'(x_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi (tức thời) của đại lượng y theo đại lượng x tại điểm x_0.

Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

• Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0.

• Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Tiếp tuyến M_0T có phương trình là $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ với $x>0$; b) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ với $x\neq 1$.

Giải

a) Với bất kì $x_0>0$, ta có:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+\sqrt{x}-(x_0^2+\sqrt{x_0})}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)+\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(x+x_0+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right)=2x_0+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Vậy $f'(x)=2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

b) Với $x_0\neq 1$, ta có:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x_0}{x_0-1}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-x+x_0}{(x-x_0)(x-1)(x_0-1)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{(x-1)(x_0-1)}=-\frac{1}{(x_0-1)^2}.$$

Vậy $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ có đồ thị là (H).

a) Viết tiếp tuyến của (H) tại điểm $M\in(H)$ có $x_M=2$.

b) Viết tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $y=-x$.

c) Viết tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(1;-1)$.

Giải

Ta có $y'=f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. .

a) Phương trình tiếp tuyến của (H) tại M có hệ số góc $f'(2)=-1$ là:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow y-2=-1(x-2)$$

$$\Leftrightarrow y=-x+4.$$

b) Gọi d_1 là tiếp tuyến cần tìm của (H) và $M_0(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm của (H) và d_1.
Vì $d_1 // d$ nên $f'(x_0) = -1$.

Suy ra $-\frac{1}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 - 1 = 1$ hoặc $x_0 - 1 = -1$

$\Leftrightarrow x_0 = 2$ hoặc $x_0 = 1$.

– Với $x_0 = 2$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2; 2)$ có hệ số góc $f'(2) = -1$ là:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$
$$\Leftrightarrow y - 2 = -1(x - 2)$$
$$\Leftrightarrow y = -x + 4.$$

– Với $x_0 = 0$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(0; 0)$ có hệ số góc $f'(0) = -1$ là:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$
$$\Leftrightarrow y - 0 = -1(x - 0)$$
$$\Leftrightarrow y = -x \text{ (loại vì trùng với đường thẳng } d).$$

Vậy tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng d là d_1: $y = -x + 4$.

c) Gọi a là tiếp tuyến cần tìm của (H) và $A(x_0, f(x_0))$ là tiếp điểm của H và a.
Phương trình tiếp tuyến a là:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Vì a qua điểm $N(1; -1)$ nên $-1 - \frac{x_0}{x_0 - 1} = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(1 - x_0)$

$$\Leftrightarrow 2x_0(x_0 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ (nhận) hoặc } x_0 = 1 \text{ (loại).}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến a: $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow a$: $y = -x$.

Bài 3. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 16t + 15$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 3$.

Giải

Ta có $s'(t) = (-2t^2 + 16t + 15)' = (-2 . 2t + 16) = -4t + 16$.
Vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 3$ là $s'(3) = -4 . 3 + 16 = 4$ (m/s).

C. BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = \sqrt[3]{x}$. Chứng minh rằng $y'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x \neq 0)$.

2. Cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol (P)

a) Tại điểm $(-1; 1)$;

b) Tại giao điểm của (P) với đường thẳng $y = -3x + 2$.

3. Xét tính liên tục, sự tồn tại đạo hàm và tính đạo hàm (nếu có) của các hàm số sau đây trên $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-x+2 & \text{khi } x\le 2\\ \dfrac{1}{x+1} & \text{khi } x>2; \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{2}{x}+1 & \text{khi } x>1. \end{cases}$

4. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến đó

a) Song song với đường thẳng $y = -x + 2$;

b) Vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{4}x-4$;

c) Đi qua điểm $A(0; 1)$.

5. Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^2 + 5t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 4$.

Bài 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đạo hàm của hàm số $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Hàm số $y = x^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x_n)' = nx^{n-1}$.

2. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x}$

Hàm số $y=\sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Nhận xét:

a) Cho số thực α. Hàm số $y = x^\alpha$ được gọi là *hàm số luỹ thừa* (với tập xác định $(0; +\infty)$).

Công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ còn đúng khi n là số thực, tức là với số thực α bất kì

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} (x > 0).$$

Với $\alpha=\dfrac{1}{2}$, ta nhận được công thức đã biết:

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x>0).$$

b) Ở bài học trước, dùng định nghĩa ta tìm được các công thức đạo hàm:

- $(C)' = 0$, C là hằng số;
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$, $x\ne 0$;

3. Đạo hàm của hàm số lượng giác

- $(\sin x)' = \cos x$;
- $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$;
- $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

4. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

Ta có công thức đạo hàm của các hàm số mũ và hàm số lôgarit sau:

- $(e^x)' = e^x$;
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$;
- $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$;
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(x > 0, a > 0, a \neq 1)$.

5. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số

Cho hai hàm số $u(x)$, $v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

- $(u + v)' = u' + v'$;
- $(u - v)' = u' - v'$;
- $(u \,.\, v)' = u'v + uv'$; (1)
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$). (2)

Chú ý:

- Với $u = C$ (C là hằng số), công thức (1) trở thành $(C.v)' = C.v'$;
- Với $u = 1$, công thức (2) trở thành $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$).

6. Đạo hàm của hàm hợp

Cho hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u . u'_x$.

7. Đạo hàm cấp hai

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi $x \in (a; b)$ thì ta có hàm số $y' = f'(x)$ xác định trên $(a; b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x và kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$ với $x > 0$;

b) $y = (1 + x - 2x^2)\left(2 - x^2 + \dfrac{x^3}{3}\right)$.

Giải

a) $y' = \dfrac{(1-\sqrt[3]{x})'(1+\sqrt[3]{x}) - (1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x})'}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$

$= \dfrac{-\dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}(1+\sqrt[3]{x}) - (1-\sqrt[3]{x})\dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$

$= -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\dfrac{2}{(1+\sqrt[3]{x})^2} = -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})^2}$.

b) $y' = (1+x-2x^2)'\left(2-x^2+\dfrac{x^3}{3}\right) + (1+x-2x^2)\left(2-x^2+\dfrac{x^3}{3}\right)'$

$= (1-2.2x)\left(2-x^2+\dfrac{x^3}{3}\right) + (1+x-2x^2)\left(-2x+3.\dfrac{x^2}{3}\right)$

$= (1-4x)\left(2-x^2+\dfrac{x^3}{3}\right) + (1+x-2x^2)(-2x+x^2)$

$= 2-10x-2x^2+\dfrac{28}{3}x^3-\dfrac{10}{3}x^4$.

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (\sin x + 2\cos x)(\sin x - 2\cos x + 1)$; b) $y = \dfrac{\tan x - 1}{\cot x + 2}$.

Giải

a) $y' = (\sin x + 2\cos x)'(\sin x - 2\cos x + 1) + (\sin x + 2\cos x)(\sin x - 2\cos x + 1)'$

$= (\cos x - 2\sin x)(\sin x - 2\cos x + 1) + (\sin x + 2\cos x)(\cos x + 2\sin x)$

$= \cos x\sin x - 2\cos^2 x + \cos x - 2\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 2\sin x + \sin x\cos x$

$+ 2\cos^2 x + 2\sin^2 x + 4\cos x\sin x$

$= 10\sin x\cos x + \cos x - 2\sin x$.

b) $y' = \dfrac{(\tan x - 1)'(\cot x + 2) - (\tan x - 1)(\cot x + 2)'}{(\cot x + 2)^2}$

$= \dfrac{(1+\tan^2 x)(\cot x + 2) + (\tan x - 1)(1+\cot^2 x)}{(\cot x + 2)^2}$

$= \dfrac{2\cot x + 2\tan x + 2\tan^2 x - \cot^2 x + 1}{(\cot x + 2)^2}$.

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$; b) $y = (3\ln x + 2)(2\log_3 x - 5)$.

Giải

a) $y' = \dfrac{(2^x+1)'(2^x-1)-(2^x+1)(2^x-1)'}{(2^x-1)^2} = \dfrac{2^x\ln 2(2^x-1)-2^x\ln 2(2^x+1)}{(2^x-1)^2}$

$= \dfrac{2^x\ln 2[(2^x-1)-(2^x+1)]}{(2^x-1)^2} = \dfrac{-2^{x+1}\ln 2}{(2^x-1)^2}$.

b) $y' = (3\ln x + 2)'(2\log_3 x - 5) + (3\ln x + 2)(2\log_3 x - 5)'$

$= \dfrac{3}{x}(2\log_3 x - 5) + \dfrac{2}{x\ln 3}(3\ln x + 2)$

$= \dfrac{1}{x}\left(6\log_3 x + \dfrac{6}{\ln 3}\ln x - 15 + \dfrac{4}{\ln 3}\right)$.

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2+\sin 3x}$; b) $y = \ln^2(3x+2)$;

c) $y = \dfrac{1}{e^{3x}-1}$; d) $y = \tan(\cot x)$.

Giải

a) $y' = \dfrac{(2+\sin 3x)'}{2\sqrt{2+\sin 3x}} = \dfrac{\cos 3x.(3x)'}{2\sqrt{2+\sin 3x}} = \dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{2+\sin 3x}}$.

b) $y' = 2\ln(3x+2)\,[\ln(3x+2)]' = 2\ln(3x+2)\dfrac{(3x+2)'}{3x+2} = \dfrac{6}{3x+2}\ln(3x+2)$.

c) $y' = -\dfrac{(e^{3x}-1)'}{(e^{3x}-1)^2} = -\dfrac{e^{3x}.(3x)'}{(e^{3x}-1)^2} = -\dfrac{3e^{3x}}{(e^{3x}-1)^2}$.

d) $y' = \dfrac{(\cot x)'}{\cos^2(\cot x)} = \dfrac{-1}{\sin^2 x\cos^2(\cot x)}$.

Bài 5. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = 3x^3 - x^2 + 3x - 1$; b) $y = \cos^2 x$.

Giải

a) $y' = 3.3x^2 - 2x + 3 = 9x^2 - 2x + 3$, $y'' = 9.2x - 2 = 18x - 2$.

b) Đặt $u = \cos x$ thì $y = u^2$. Ta có $u'_x = -\sin x$ và $y'_u = 2u$.

Suy ra $y'_x = y'_u.u'_x = 2u.(-\sin x) = -2\cos x.\sin x = -\sin 2x$.

$y'' = -(2x)'.\cos 2x = -2\cos 2x$.

Bài 6. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 15t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

Giải

Ta có $s'(t) = -2 . 2t + 15 = -4t + 15$, suy ra $s''(t) = -4$.

Vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ lần lượt là $s'(2) = 7$ m/s và $s''(2t) = -4$ m/s^2.

Bài 7. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1 200 sản phẩm.

Giải

Ta có $P'(x) = -2 . 200x + 12800 = -400x + 12800$.

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm là $P'(12) = -400 . 12 + 12800 = 8000$.

C. BÀI TẬP

1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{-3x^2}{2} + \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^3}{3}$; b) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + 9)$;

c) $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + x + 1}$; d) $y = \dfrac{1 - 2x}{x + 1}$;

e) $y = xe^{2x+1}$; g) $y = (2x + 3)3^{2x+1}$;

h) $y = x\ln^2 x$; i) $y = \log_2(x^2 + 1)$.

2. Cho hàm số

$$f(x) = 3x^3 - 4\sqrt{x}.$$

Tính $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$; $f'(a^2)$ (a là hằng số khác 0).

3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (1 + x^2)^{20}$; b) $y = \dfrac{2 + x}{\sqrt{1 - x}}$;

4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x}{\sin x - \cos x}$; b) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;

c) $y = \sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x$; d) $y = \cos(2\sin x)$.

5. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x\sin 2x$; b) $y = \cos^2 x$; c) $y = x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$.

6. Một chất điểm chuyển động thẳng có phương trình $s = 100 + 2t - t^2$ trong đó thời gian được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

a) Tại thời điểm nào chất điểm có vận tốc bằng 0?

b) Tìm vận tốc và gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3s$.

7. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^3 + 75t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$.

8. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = 200(x - 2)(17 - x)$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A. TRẮC NGHIỆM

1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$. Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm $M(-1; -6)$ có hệ số góc bằng:

A. 18. B. –3. C. 7. D. 9.

2. Hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đạo hàm tại $x = -1$ bằng

A. 0. B. 6. C. –6. D. –1.

3. Cho hai hàm số $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ và $g(x) = x^3 + x^2 - 2$. Bất phương trình $f''(x) - f'(x) + g'(x) - 8 \geq 0$ có tập nghiệm là

A. $\left(1; \dfrac{10}{3}\right)$.

B. $(-\infty; 1] \cup \left[\dfrac{10}{3}; +\infty\right)$.

C. $\left[1; \dfrac{10}{3}\right]$.

D. $(-\infty; 1) \cup \left(\dfrac{10}{3}; +\infty\right)$.

4. Hàm số $y = \dfrac{2x-1}{3x+2}$ có đạo hàm là

A. $y' = -\dfrac{1}{(3x+2)^2}$.

B. $y' = -\dfrac{7}{(3x+2)^2}$.

C. $y' = \dfrac{1}{(3x+2)^2}$.

D. $y' = \dfrac{7}{(3x+2)^2}$.

5. Hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đạo hàm cấp hai tại $x = 1$ là

A. $y''(1) = \dfrac{1}{4}$.

B. $y''(1) = -\dfrac{1}{4}$.

C. $y''(1) = \dfrac{1}{2}$.

D. $y''(1) = -\dfrac{1}{2}$.

6. Hàm số $y = 3^{x^2+1}$ có đạo hàm là

A. $(x^2+1)3^{x^2}$.

B. $(x^2+1)3^{x^2+1}\ln 3$.

C. $2x3^{x^2+1}\ln 3$.

D. 3^{x^2+1}.

7. Hàm số $y = \ln(\cos x)$ có đạo hàm là

A. $\dfrac{1}{\cos x}$. B. $-\tan x$. C. $\tan x$. D. $\cot x$.

8. Hàm số $f(x) = e^{\sqrt{x^2+4}}$ có đạo hàm tại $x = 1$ bằng

A. $f'(1) = e^{\sqrt{5}}$. B. $f'(1) = 2e^{\sqrt{5}}$. C. $f'(1) = \dfrac{e^{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$. D. $f'(1) = \dfrac{e^{\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$.

B. TỰ LUẬN

1. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{4x+1}$ tại $x = 2$; b) $f(x) = x^4$ tại $x = -1$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$.

2. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 1$ có đồ thị (C). Tìm tiếp tuyến với (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

3. Vị trí chuyển động của một vật trên đường thẳng được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 3t^3 + 5t + 2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc và gia tốc của vật đó khi $t = 1$.

4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x}(x^2 - \sqrt{x} + 1)$;

b) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 1}$;

c) $y = \dfrac{2x+3}{3x+2}$.

5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x\sin x}{1 - \tan x}$; b) $y = \cos\sqrt{x^2 - x + 1}$;

c) $y = \sin^2 3x$; d) $y = \cos^2(\cos 3x)$.

6. Tính đạo hàm của các hàm số sau biết rằng f và g là các hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$:

a) $y = f(x^3)$; b) $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$.

7. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x^2 - mx - 5$. Tìm m để

a) $f'(x) = 0$ có nghiệm kép; b) $f'(x) \geq 0$ với mọi x.

8. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 8}$. Giải phương trình $f'(x) = -\dfrac{2}{3}$.

9. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$; b) $y = \sqrt{3x+2}$; c) $y = xe^{2x}$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. ĐẠO HÀM

1. Với $x_0 \neq 0$, ta có:

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0})(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0})}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^{\ 2}}}.$$

Vậy $y'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x_0^{\ 2}}}$ $(x \neq 0)$

2. a) Ta có $y'(-1) = -2$.

b) Giao điểm của (P) với đường thẳng $y = -3x + 2$ là $x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ và $x = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$, hệ số góc là $k = -3 + \sqrt{17}$ và $k = -3 - \sqrt{17}$.

3. a) Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{1}{3} \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$ nên f gián đoạn tại 2, do đó f không có đạo hàm tại 2.

b) Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3 = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$ nên f liên tục tại 1.

Ta lại có $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 4$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2$.

Suy ra $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Vậy f không có đạo hàm tại 1.

4. a) Hai tiếp tuyến: $y = -x + 1$, $y = -x + \dfrac{31}{27}$;

b) Hai tiếp tuyến: $y = 4x - 7$, $y = 4x + \dfrac{67}{3}$;

c) Hai tiếp tuyến: $y = 1$, $y = -x + 1$.

5. Ta có $s'(t) = 4t + 5$, $s'(4) = 21$ m/s.

Bài 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

1. a) $y' = -3x - \dfrac{2}{x^2} + x^2$; b) $y' = 2x(3x^4 + 8x^2 - 41)$;

c) $y' = \dfrac{3x^2 + 2x - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$; d) $y' = -\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

e) $y' = (2x+1)e^{2x+1}$;

g) $y' = 2.3^{2x+1}\left[(2x+3)\ln 3+1\right]$;

h) $y' = \ln^2 x + 2\ln x$;

i) $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$.

2. Ta có $f'(x) = 9x^2 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

$f(4) = 184, f'(4) = 143,\ f(a^2) = 3a^6 - 4|a|; f'(a^2) = 9a^4 - \dfrac{2}{|a|}$.

3. a) $y' = 40x(1+x^2)^{19}$;

b) $y' = \dfrac{-x+4}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$.

4. a) $y' = \dfrac{\sin x - \cos x - x(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$;

b) $y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$;

c) $y' = \cos^3 x$;

d) $y' = -2\cos x \,.\, \sin(2\sin x)$.

5. a) $y'' = 4\cos 2x - 4x\sin 2x$;

b) $y'' = -2\cos 2x$;

c) $y'' = 12x^2 - 18x + 2$.

6. a) $s'(t) = 2 - 2t$

$s'(t) = 0 \Rightarrow 2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 1$.

Vận tốc chất điểm bằng 0 khi $t = 1$ s.

b) Khi $t = 3$ s.

$s'(3) = 2 - 2.3 = -4$ (m/s);

$s''(3) = -2 \Rightarrow a(3) = -2$ m/s^2.

Vậy khi $t = 3$ s thì vận tốc của vật là -4 m/s. Gia tốc của vật là -2 m/s^2.

7. Ta có $s'(t) = -6t^2 + 75$ suy ra $s''(t) = -12t$.

Vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là $s'(3) = 21$ và $s''(3) = -36$.

8. Ta có $P'(x) = -400x + 3800$. Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm là $P'(30) = -8200$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A. TRẮC NGHIỆM

1. B	2. A	3. C	4.D	5. D	6. C	7. B	8. C

B. TỰ LUẬN

1. a) $f'(2) = \dfrac{2}{3}$;

b) $f'(-1) = -4$;

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$;

d) $f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.

2. Gọi tiếp tuyến là Δ và tiếp điểm là $M(x_0, f(x_0))$.

Hệ số góc của Δ là $f'(x_0) = 6x_0^2 - 2x_0 + 2 = 6\left(x_0 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{6} \geq \frac{11}{6}$.

Vậy hệ số góc của Δ nhỏ nhất bằng $\frac{11}{6}$ khi $x_0 = \frac{1}{6}$.

Vậy tiếp tuyến Δ là $y - f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{6}\left(x - \frac{1}{6}\right)$ suy ra $y = \frac{11}{6}x + \frac{109}{108}$.

3. Ta có $s'(t) = 9t^2 + 5$, vận tốc $s'(1) = 14$.

Gia tốc $s''(t) = 18t$, gia tốc $s''(1) = 18$.

4. a) $y' = \frac{5}{2}x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$; b) $y' = -\frac{2x-3}{(x^2-3x+1)^2}$; c) $y' = -\frac{5}{(3x+2)^2}$.

5. a) $y' = \frac{\sin x + x\cos x - \sin x\tan x + x\sin x\tan^2 x}{(1-\tan x)^2}$;

b) $y' = \frac{-(2x-1)\sin\sqrt{x^2-x+1}}{2\sqrt{x^2-x+1}}$;

c) $y' = 3\sin 6x$;

d) $y' = 3\sin(2\cos 3x)\sin 3x$.

6. a) $y' = 3x^2 f'(x^3)$; b) $y' = \frac{f(x)f'(x) + g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}$.

7. $f'(x) = 3x^2 + 4x - m$.

a) $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$. b) $f'(x) \geq 0\ \forall x \Rightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{4}{3}$.

8. $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+8}}$

$f'(x) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x+8} = -3(x-1)$

$\Leftrightarrow x = \frac{5+2\sqrt{35}}{5}$ (loại); $x = \frac{5-2\sqrt{35}}{5}$ (nhận).

9. a) $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$, $y'' = -\frac{6}{(x+2)^3}$;

b) $y' = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$, $y'' = -\frac{9}{4\sqrt{(3x+2)^3}}$;

c) $y' = (2x+1)e^{2x}$, $y'' = 4(x+1)e^{2x}$.

Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương VIII. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

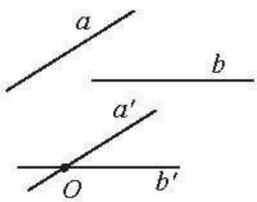
Bài 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian, kí hiệu (a, b), là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

Chú ý: Góc giữa hai đường thẳng nhận giá trị từ $0°$ đến $90°$.



Hình 1

2. Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp BC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a) IJ và BD;   b) SD và BC.

Giải

a) ΔSAC có I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC, suy ra IJ là đường trung bình của ΔSAC, suy ra $IJ \parallel AC$.

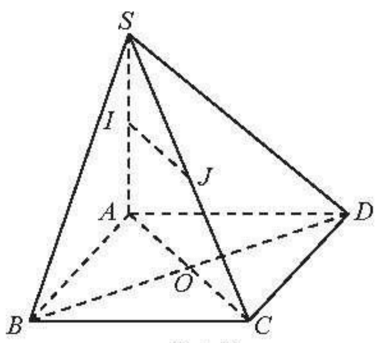
Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vậy $(IJ, BD) = (AC, BD) = \widehat{AOB} = 90°$.

b) Ta có $AD \parallel BC$, suy ra $(SD, BC) = (SD, AD)$.

Mặt khác: $\begin{cases} SA \perp BC \\ BC \parallel AD \end{cases} \Rightarrow SA \perp AD$.

Vậy ΔSAD vuông tại A.



Hình 2

Suy ra $\tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$. Suy ra $\widehat{SDA} = 60°$.

Vậy $(SD, BC) = (SD, AD) = \widehat{SDA} = 60°$.

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung diểm của BC, AD. Cho biết $MN = a\sqrt{3}$, tính góc giữa AB và CD.

Giải

Gọi I là trung điểm AC.

ΔABC có I, M lần lượt là trung điểm của AC, BC, suy ra IM là đường trung bình của ΔABC, suy ra $IM // AB$ và $IM = \frac{1}{2}AB = a$.

Tương tự, ta có $IN // CD$ và $IN = a$.

Ta có $IM // AB$ và $IN // CD$, suy ra $(AB, CD) = (IM, IN)$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác MIN:

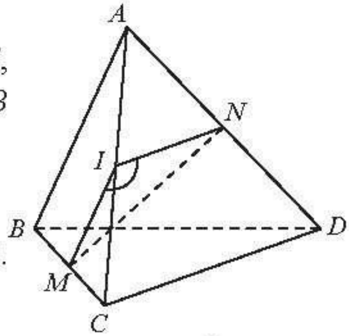
$MN^2 = IM^2 + IN^2 - 2 . IM . IN . \cos\widehat{MIN}$

$\Rightarrow 3a^2 = a^2 + a^2 - 2 . a . a . \cos\widehat{MIN}$

$\Rightarrow \cos\widehat{MIN} = \dfrac{3a^2 - 2a^2}{-2a^2} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{MIN} = 120°$.

Vậy $(AB, CD) = (IM, IN) = 180° - \widehat{MIN} = 180° - 120° = 60°$.



Hình 3

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SD. Chứng minh rằng $MN \perp SC$.

Giải

ΔSAD có M, N lần lượt là trung điểm của AD, SD, suy ra MN là đường trung bình của ΔSAD, suy ra $MN // SA$.

Vậy $(MN, SC) = (SA, SC)$.

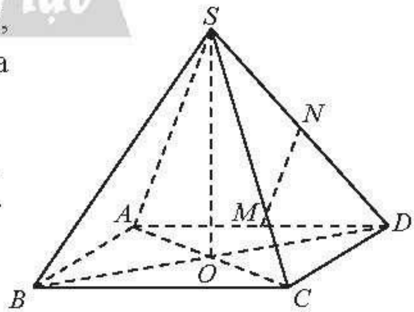
ΔABC vuông tại B nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Xét ΔSAC, nhận thấy: $AC^2 = SA^2 + SC^2$.

Theo định lí Pythagore đảo, ΔSAC vuông tại S.

Suy ra $\widehat{ASC} = 90°$ hay $(MN, SC) = \widehat{ASC} = 90°$.

Vậy $MN \perp SC$.



Hình 4

C. BÀI TẬP

1. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Tính góc giữa AB và DM.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp AC$, $SA \perp BC$, $\widehat{BAD} = 120°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a) SD và BC. b) MN và SC.

3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$.

a) Chứng minh đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.

b) Chứng minh hai đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với nhau.

4. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N, I, J lần lượt là trung điểm của SA, SD, SC và BC. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

a) IJ và DC; b) MN và IJ.

5. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Chứng minh hai đường thẳng OA và CD vuông góc với nhau.

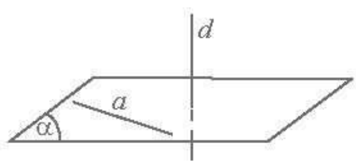
Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa

Đường thẳng d gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong (α), kí hiệu $d \perp (\alpha)$.



Hình 1

Định lí 1

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (α) thì $d \perp (\alpha)$.

Định lí 2

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

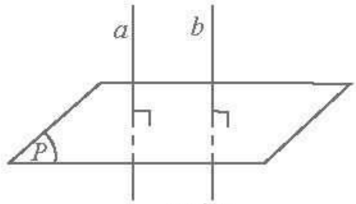
Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

2. Liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

Định lí 3

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

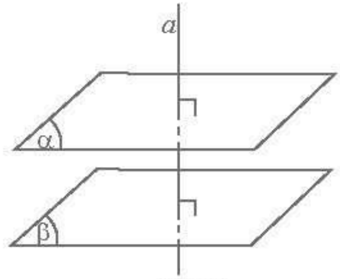


Hình 2

Định lí 4

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

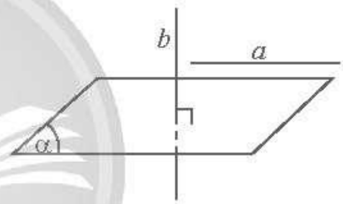


Hình 3

Định lí 5

a) Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a.

b) Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (α) (không chứa a) cùng vuông góc với một đường thẳng b thì chúng song song với nhau.

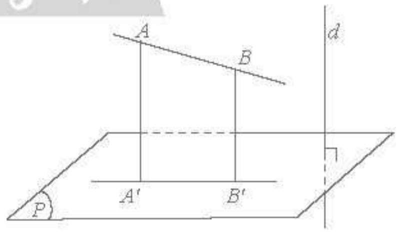


Hình 4

3. Phép chiếu vuông góc

Định nghĩa

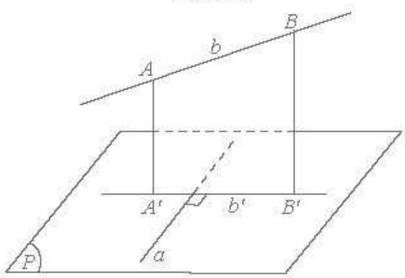
Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d vuông góc với (P). Phép chiếu song song theo phương của d lên mặt phẳng (P) được gọi là ***phép chiếu vuông góc lên (P)***.



Hình 5

Định lí ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và b là đường thẳng không nằm trong (P) và không vuông góc với (P). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (P). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.



Hình 6

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi I là trung điểm của AC. Kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$. Chứng minh rằng:

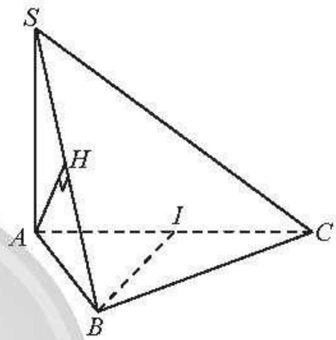
a) SA vuông góc với các cạnh đáy;

b) $BC \perp (SAB)$;

c) $BI \perp (SAC)$, từ đó suy ra $BI \perp SC$;

d) $AH \perp (SBC)$, từ đó suy ra $AH \perp SC$.

Giải



Hình 7

a) Vì $SA \perp (ABC)$ và AB, BC, CA cùng nằm trong (ABC) nên $SA \perp AB$, $SA \perp BC$, $SA \perp CA$.

b) Ta có $BC \perp AB$ (vì ΔABC vuông tại B) và $BC \perp SA$ (chứng minh trên), suy ra $BC \perp (SAB)$.

c) Do ΔABC vuông cân tại B và I là trung điểm của AC nên $BI \perp AC$. (1)

Ta có $SA \perp (ABC)$ và $BI \subset (ABC)$, suy ra $SA \perp BI$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BI \perp (SAC)$, suy ra $BI \perp SC$.

d) Theo giả thiết ta có $AH \perp SB$. (3)

Theo câu b) ta có $BC \perp (SAB)$ và $AH \subset (SAB)$, suy ra $BC \perp AH$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AH \perp (SBC)$, suy ra $AH \perp SC$.

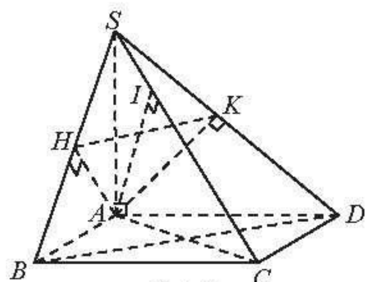
Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC và SD. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.

b) $SC \perp (AHK)$ và điểm I thuộc mặt phẳng (AHK).

c) $HK \perp (SAC)$ và $HK \perp AI$.

Giải



Hình 8

a) Ta có $BC \perp AB$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA \perp BC$ (vì $SA \perp (ABCD)$), suy ra $BC \perp (SAB)$.

Ta có $CD \perp AD$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA \perp CD$ (vì $SA \perp (ABCD)$), suy ra $CD \perp (SAD)$.

Ta có $BD \perp AC$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA \perp BD$ (vì $SA \perp (ABCD)$), suy ra $BD \perp (SAC)$.

b) Ta có $BC \perp (SAB)$ và $AH \subset (SAB)$, suy ra $BC \perp AH$. Mặt khác $AH \perp SB$, suy ra $AH \perp (SBC)$, suy ra $AH \perp SC$. (1)

Tương tự ta có $AK \perp CD$ và $AK \perp SD$, suy ra $AK \perp (SCD)$, suy ra $AK \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AHK)$.

Ta có $SC \perp (AHK)$ và $AI \perp SC$, suy ra $I \in (AHK)$.

c) Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{SAB} = 90^\circ \\ \widehat{SAD} = 90^\circ. \end{cases}$

Xét ΔSAB và ΔSAD, ta có:

SA là cạnh chung;

$\widehat{SAB} = \widehat{SAD} = 90^\circ$;

$AB = AD$.

Suy ra $\Delta SAB = \Delta SAD$ (c.g.c), suy ra $SB = SD$, $SH = SK$. Suy ra $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD}$.

Vậy $HK // BD$.

Theo câu a) ta có $BD \perp (SAC)$, suy ra $HK \perp (SAC)$. Ta lại có $AI \subset (SAC)$, suy ra $HK \perp AI$.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và BCD là các tam giác cân tại A và D. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng $BC \perp AD$.

b) Kẻ AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

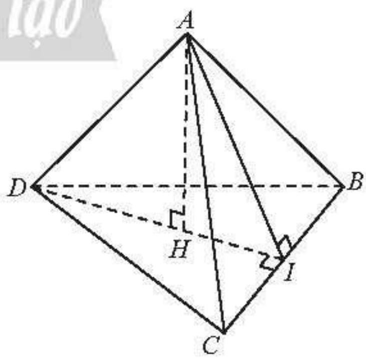
Giải

a) Tam giác ABC cân tại A và I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$. (1)

Tam giác DCB cân tại D và I là trung điểm của BC nên $DI \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AID)$, suy ra $BC \perp AD$.

b) Ta có $AH \perp DI$ và $AH \perp BC$ (vì $BC \perp (ADI)$, $AH \subset (ADI)$), suy ra $AH \perp (BCD)$.



Hình 9

Bài 4. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $SB = AB$ và $SB \perp (ABC)$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, BC, AB. Chứng minh rằng:

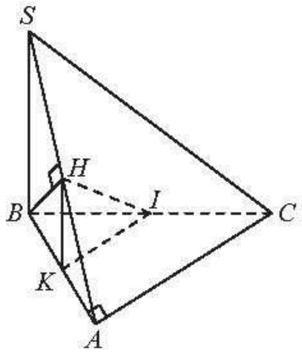
a) $AC \perp (SAB)$;

b) $BH \perp (SAC)$;

c) $KI \perp SA$;

d) $AB \perp IH$.

Giải



Hình 10

a) Ta có $AC \perp AB$ (vì ΔABC vuông tại A) và $AC \perp SB$ (vì $SB \perp (ABC)$), suy ra $AC \perp (SAB)$.

b) Vì $SB = AB$ nên ΔSAB cân tại B. Mà H là trung điểm của SA, suy ra $BH \perp SA$. (1)

Ta cũng có $AC \perp (SAB)$ và $BH \subset (SAB)$, suy ra $AC \perp BH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAC)$.

c) ΔABC có K, I lần lượt là trung điểm của AB, BC nên KI là đường trung bình của ΔABC, suy ra $KI \parallel AC$. Ta lại có $AC \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp SA$.

d) Δ SAB có H, K lần lượt là trung điểm của SA, AB nên HK là đường trung bình của ΔSAB, suy ra $HK \parallel SB$. Mặt khác $SB \perp AB$, suy ra $HK \perp AB$. (3)

Ta có $KI \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp AB$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AB \perp (HIK)$, suy ra $AB \perp IH$.

C. BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $a\sqrt{2}$. Biết rằng $SA = SB = SC = SD$, $SO = 2a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Tính độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác SAC.

2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD). Chứng minh rằng H là trực tâm của ΔBCD và $AD \perp BC$.

3. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (ABC)$, ABC là tam giác cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $AH \perp MD$ tại H.

a) Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

b) Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC. Chứng minh rằng $GK \perp (ABC)$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, O là giao điểm của hai đường chéo, $SA = SC$, $SB = SD$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BA, BC. Chứng minh rằng $IJ \perp (SBD)$.

c) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

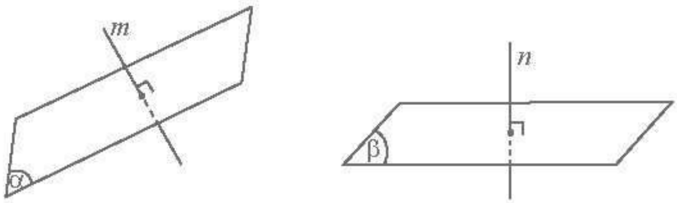
Bài 3. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với (α) và (β), kí hiệu ((α), (β)).

Ta có: $((\alpha), (\beta)) = (m, n)$ với $m \perp (\alpha)$, $n \perp (\beta)$ (Hình 1).

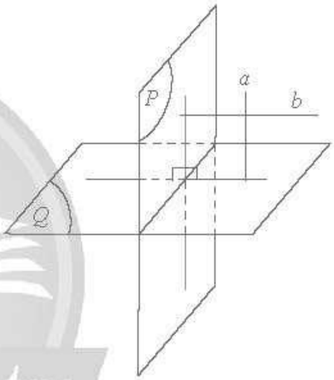


Hình 1

2. Hai mặt phẳng vuông góc

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là một góc vuông.

Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc được kí hiệu là $(P) \perp (Q)$.

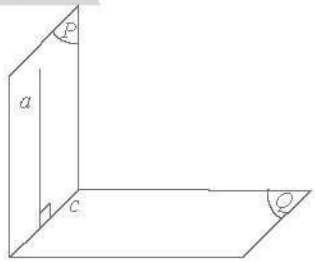


Hình 2

3. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Định lí 1

Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.



Hình 3

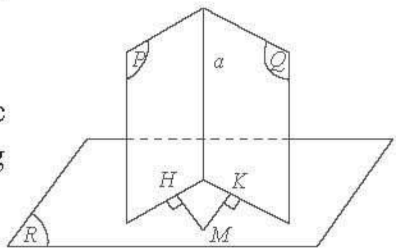
4. Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc

Định lí 2

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

Định lí 3

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.



Hình 4

5. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

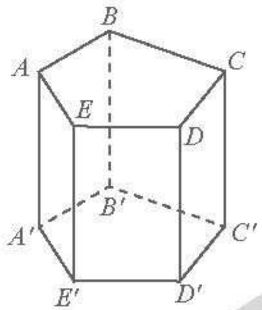
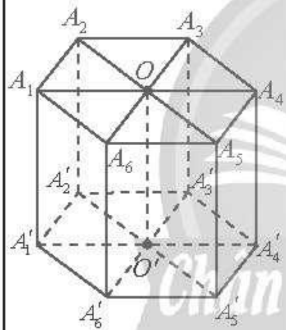
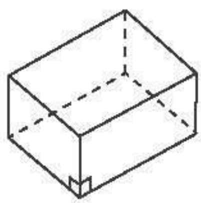
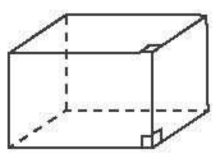
Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

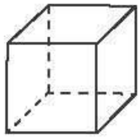
Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có mặt đáy là đa giác đều.

Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có mặt đáy là hình chữ nhật.

Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Tên	Hình vẽ	Tính chất cơ bản
Hình lăng trụ đứng		– Cạnh bên vuông góc với hai đáy. – Mặt bên là các hình chữ nhật.
Hình lăng trụ đều		– Hai đáy là hai đa giác đều. – Mặt bên là các hình chữ nhật. – Cạnh bên và đường nối tâm hai đáy vuông góc với hai đáy.
Hình hộp đứng		– Bốn mặt bên là hình chữ nhật. – Hai đáy là hình bình hành.
Hình hộp chữ nhật		– Sáu mặt là hình chữ nhật. – Độ dài a, b, c của ba cạnh cùng đi qua một đỉnh gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật. – Độ dài đường chéo d được tính theo ba kích thước: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Hình lập phương		– Sáu mặt là hình vuông. – Độ dài đường chéo d được tính theo độ dài cạnh a: $d = a\sqrt{3}$

6. Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều

a) Hình chóp đều

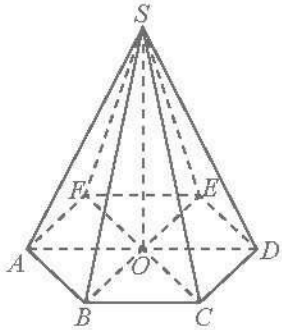
Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Chú ý: Hình chóp đều có:

– Các mặt bên là các tam giác cân tại đỉnh hình chóp và bằng nhau.

– Đoạn thẳng nối từ đỉnh hình chóp đến tâm của đáy thì vuông góc với mặt đáy và gọi là đường cao của hình chóp.

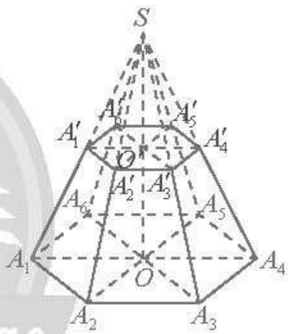
– Độ dài đường cao gọi là chiều cao của hình chóp đều.



Hình 5

b) Hình chóp cụt đều

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là ***hình chóp cụt đều***.

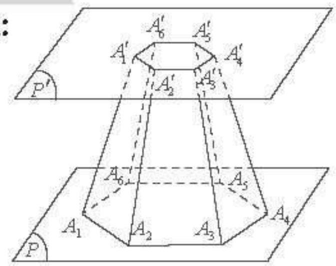


Hình 6

Trong hình chóp cụt đều $A_1A_2A_3...A_6.A'_1A'_2A'_3...A'_6$, ta gọi:

– Các điểm $A_1, A_2, A_3, ..., A_6, A'_1, A'_2, A'_3, ..., A'_6$ là **các *đỉnh***.

– Đa giác $A_1A_2A_3...A_6$ là ***đáy lớn,*** **đa giác** $A'_1A'_2A'_3...A'_6$ là ***đáy nhỏ.*** **Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên** hai **mặt phẳng** song song.



Hình 7

– Cạnh của hai đa giác đáy là ***cạnh đáy***. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một.

– Các hình thang cân $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_6A_1A'_1A'_6$ là các ***mặt bên***.

– Cạnh bên của mặt bên gọi là ***cạnh bên*** của hình chóp cụt đều. Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.

– Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là ***đường cao***. Độ dài đường cao là ***chiều cao***.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Giải

Ta có: $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$) và $BC \perp AB$ (giả thiết)

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Ta lại có: $(SBC) \cap (ABC) = BC$ (1)

$AB \subset (ABC), AB \perp BC$ (2)

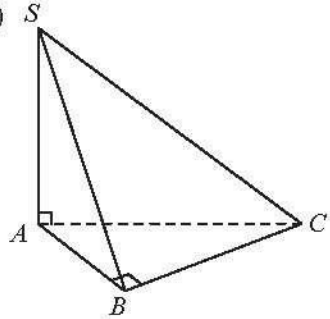
$SB \subset (SBC), SB \perp BC$ (chứng minh trên) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $((SBC), (ABC)) = (AB, SB)$.

Trong tam giác SAB vuông tại A ta có:

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.



Hình 8

Bài 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

Giải

Gọi M' là trung điểm $OC \Rightarrow MM' \parallel SO$

$\Rightarrow MM' \perp (ABCD)$.

Ta có $MB = MD$ nên $MO \perp BD$ và $M'O \perp BD$ nên góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ là $(MO, M'O)$.

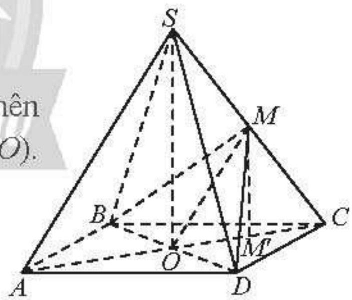
Ta có: $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Trong tam giác vuông MOM',

ta có $\tan \widehat{MOM'} = \frac{MM'}{OM'} = \frac{SO}{OC} = 1 \Rightarrow \widehat{MOM'} = 45^\circ$.

Vậy $((MBD), (ABCD)) = (MO, M'O) = \widehat{MOM'} = 45^\circ$.

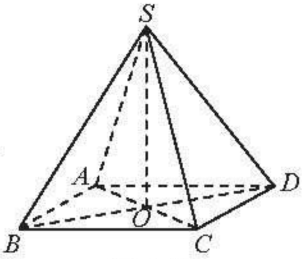


Hình 9

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Các tam giác SAC và SBD cân tại S. Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (ABCD)$; b) $(SAC) \perp (SBD)$.

Giải



Hình 10

a) Ta có các tam giác SAC và SBD cân tại S nên $SO \perp AC, SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

b) Ta có $AC \perp SO$ (vì $SO \perp (ABCD)$) và $AC \perp BD$ (vì $ABCD$ là hình thoi)

$\Rightarrow AC \perp (SBD)$.

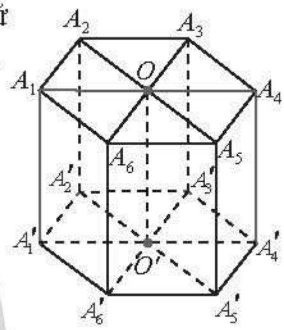
Vậy $(SAC) \perp (SBD)$.

Bài 4. Cho hình lăng trụ đứng lục giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên $2a$.

a) Tính diện tích xung quanh của lăng trụ.

b) Tính diện tích toàn phần của lăng trụ.

Giải



Hình 11

a) Lăng trụ đứng lục giác đều có sáu mặt bên là hình chữ nhật bằng nhau với kích thước lần lượt là a, $2a$ (Hình 11).

Vậy diện tích xung quanh của lăng trụ là:

$$S_{xq} = 6 \,.\, a \,.\, 2a = 12a^2.$$

b) Vì tam giác A_1A_2O đều nên $S_{\Delta A_1A_2O} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích đáy $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ của lăng trụ là:

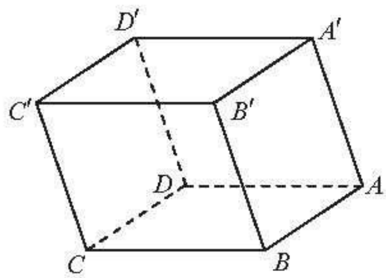
$$S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} = 6.S_{\Delta A_1A_2O} = 6.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Diện tích toàn phần của lăng trụ là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} = 12a^2 + 2.\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = (12 + 3\sqrt{3})a^2.$$

Bài 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và có $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

Giải



Hình 12

Tam giác ABD có $AD = AB = a$ và $\widehat{DAB} = 60^\circ$.

Suy ra tam giác ABD là tam giác đều, nên

$$S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} = 2S_{\Delta ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

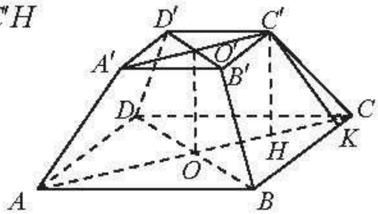
Tương tự, ta có tam giác $A'AB$ và tam giác $A'AD$ là tam giác đều, nên

$$S_{A'B'BA} = S_{D'C'CD} = S_{D'A'AD} = S_{C'B'BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy tổng diện tích các mặt của hình hộp là $S = 6.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = 3a^2\sqrt{3}$.

Bài 6. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng $2a$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và cạnh bên $2a$. Tính đường cao của hình chóp cụt và đường cao của mặt bên.

Giải



Hình 13

Trong hình thang vuông $OO'C'C$, vẽ đường cao $C'H$ ($H \in OC$) (Hình 13).

Ta có: $OC = a\sqrt{2}$, $O'C' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra

$CH = a\sqrt{2} - \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CH$, ta có:

$$C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

Nên $OO' = C'H = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Trong hình thang $BB'C'C$, vẽ đường cao $C'K$ ($K \in BC$).

Ta có $CK = \dfrac{BC - B'C'}{2} = \dfrac{2a - a}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CK$, ta có:

$$C'K = \sqrt{CC'^2 - CK^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

C. BÀI TẬP

1. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông cân tại B và $AB \perp (BCD)$. Cho biết $BC = a\sqrt{2}$, $AB = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Cho biết $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Trên BC lấy điểm I sao cho tam giác SDI vuông tại S. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SDI) và $(ABCD)$ là 60°. Tính độ dài SI.

3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng $(SBM) \perp (SAC)$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD. Chứng minh rằng:

a) $(SBC) \perp (SAB)$; b) $(SCD) \perp (SAD)$;

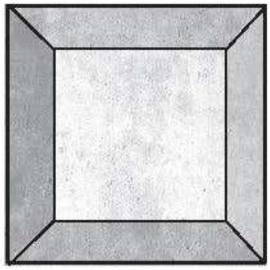
c) $(SBD) \perp (SAC)$; d) $(SAC) \perp (AHK)$.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD).

a) Tìm các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp.

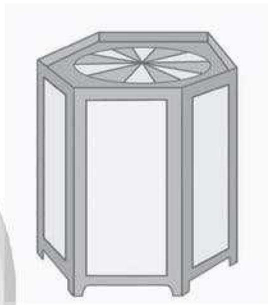
b) Các giao tuyến ở câu a tạo thành hình gì? Tính diện tích của hình đó.

6. Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 2 m, đáy nhỏ có cạnh bằng 1 m và cạnh bên bằng 2 m (Hình 14). Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.



Hình 14

7. Một hộp đèn treo trần có hình dạng lăng trụ đứng lục giác đều (Hình 15), cạnh đáy bằng 10 cm và cạnh bên bằng 50 cm. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.



Hình 15

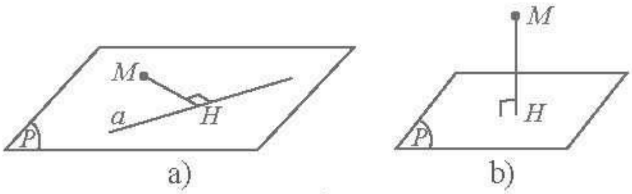
Bài 4. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng a thì độ dài đoạn MH được gọi là ***khoảng cách từ M đến đường thẳng a***, kí hiệu $d(M, a)$.

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) thì độ dài đoạn MH được gọi là ***khoảng cách từ M đến (P)***, kí hiệu $d(M, (P))$.



Hình 1

Quy ước:

- $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc a;
- $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc (P).

Nhận xét:

a) Lấy điểm N tuỳ ý trên đường thẳng a, ta luôn có $d(M, a) \leq MN$.

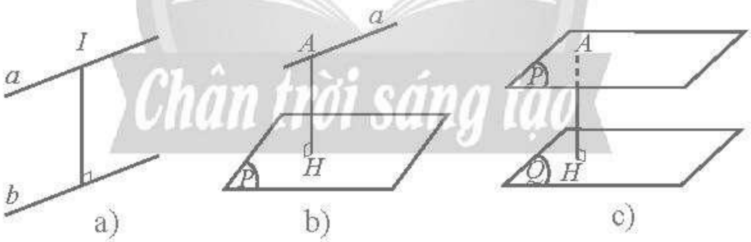
b) Lấy điểm N tuỳ ý trên mặt phẳng (P), ta luôn có $d(M, (P)) \leq MN$.

2. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a và b là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến b, kí hiệu $d(a, b)$.

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P), kí hiệu $d(a, (P))$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì trên (P) đến (Q), kí hiệu $d((P), (Q))$.



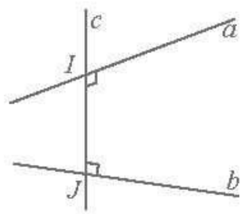
Hình 2

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b được gọi là ***đường vuông góc chung*** của a và b.

Nếu đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b cắt chúng lần lượt tại I và J thì đoạn IJ gọi là ***đoạn vuông góc chung*** của a và b.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.

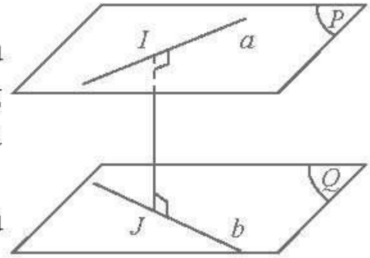


Hình 3

Chú ý:

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



Hình 4

4. Công thức tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ, khối hộp

Thể tích khối hộp chữ nhật (Hình 5a) bằng tích ba kích thước:

$$V = abc.$$

Thể tích khối chóp (Hình 5b) bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao:

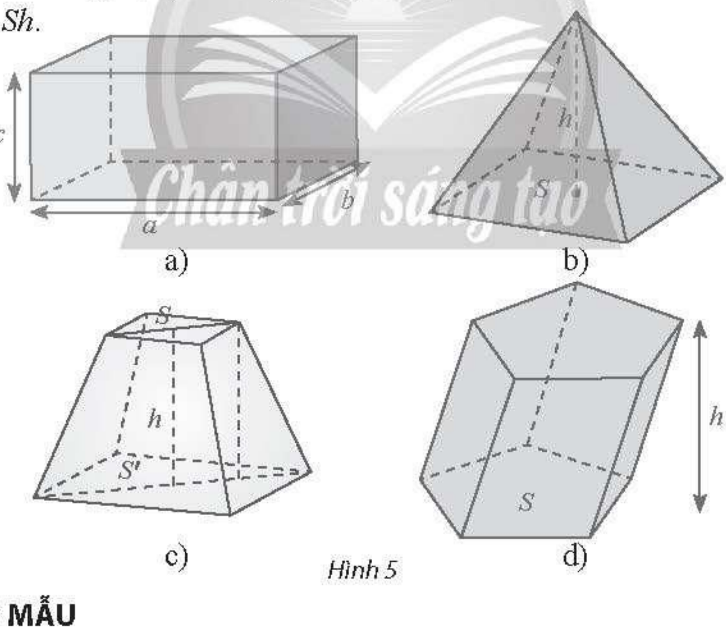
$$V = \frac{1}{3}Sh.$$

Thể tích khối chóp cụt đều (Hình 5c) có chiều cao h và diện tích hai đáy S, S':

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S').$$

Thể tích khối lăng trụ (Hình 5d) bằng tích diện tích đáy và chiều cao:

$$V = Sh.$$



Hình 5

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy bằng 30°. Gọi I là trung điểm của BC. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng:

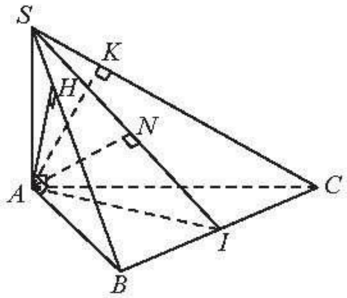
a) SB; b) SC; c) SI.

Giải

Ta có: $SA \perp (ABC)$ nên $(SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = 30^\circ$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có:

$$SA = AC \tan 30^\circ = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$



Hình 6

a) Vẽ $AH \perp SB$ ($H \in SB$), ta có $d(A, SB) = AH$.

Xét tam giác SAB vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AH = a.$$

b) Vẽ $AK \perp SC$ ($K \in SC$), ta có $d(A, SC) = AK$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AK = a.$$

c) Vẽ $AN \perp SI$ ($N \in SI$), ta có $d(A, SI) = AN$.

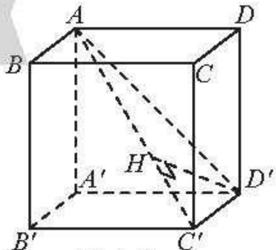
Vì ABC là tam giác đều cạnh $2a$ nên $AI = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SAI vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AN^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow AN = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Bài 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ đỉnh D' đến đường chéo AC'.

Giải



Hình 7

Gọi H là hình chiếu của D' trên AC'.

Ta có: $C'D' \perp A'D'$, $C'D' \perp DD'$

$\Rightarrow C'D' \perp (ADD'A') \Rightarrow C'D' \perp AD'$.

Do tam giác ADD' vuông cân tại D nên $AD' = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $D'AC'$ vuông tại D', ta có:

$$\frac{1}{D'H^2} = \frac{1}{D'A^2} + \frac{1}{D'C'^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow D'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

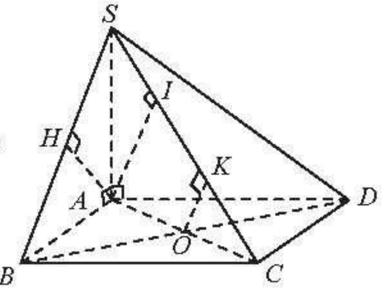
Vậy $d(D', AC') = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SB và AD;

b) BD và SC.

Giải



Hình 8

a) Vẽ đường cao AH của tam giác SAB.

Ta có: $AD \perp AB$ và $AD \perp SA$

$\Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$.

Do đó AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD nên $d(SB, AD) = AH$.

Tam giác SAB vuông cân tại A nên $SB = a\sqrt{2}$.

AH là đường cao của tam giác SAB nên $AH = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AD, SB) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có: $BD \perp AC$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Gọi O là tâm của hình vuông cân $ABCD$.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OK \perp SC$, $K \in SC$.

Ta có: $OK \perp SC$ và $OK \perp BD$ (do $BD \perp (SAC)$) nên OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Suy ra $d(BD, SC) = OK = \dfrac{1}{2}AI$ (với I là hình chiếu của A trên SC).

Tam giác ABC vuông tại B nên $AC = a\sqrt{2}$.

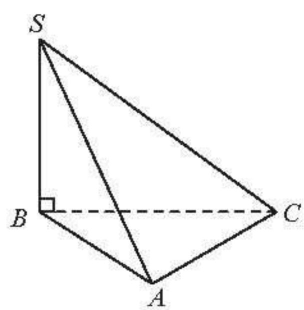
Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $d(BD, SC) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SB = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Giải



Hình 9

Diện tích tam giác đều ABC:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$$V = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SB = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Bài 5. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

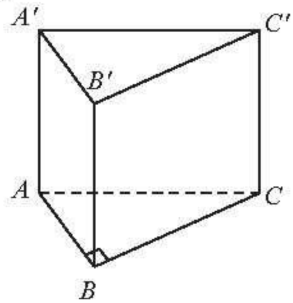
Giải

Chiều cao khối lăng trụ đứng là cạnh bên nên $h = BB' = a$.

Tam giác ABC vuông cân tại B có $AC = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Vậy $V = S_{\Delta ABC} \,.\, h = \dfrac{a^2}{2} \,.\, a = \dfrac{a^3}{2}$.



Hình 10

Bài 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

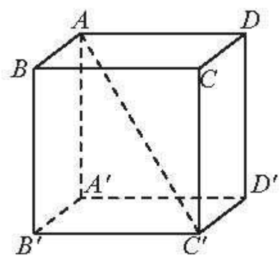
Giải

Đường chéo của một hình lập phương là $d = a\sqrt{3}$ với a là độ dài cạnh hình lập phương.

Dễ thấy rằng hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có AC' là đường chéo và cạnh là AB.

Do đó: $AC' = AB\sqrt{3} \Rightarrow AB = \dfrac{AC'}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a$.

Vậy thể tích khối lập phương là $V = a^3$.



Hình 11

Bài 7. Tính thể tích của khối chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $3a$, $AB = 4a$, $A'B' = a$.

Giải

Diện tích tam giác đều ABC: $S = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4} = 4a^2\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều $A'B'C'$: $S' = \dfrac{A'B'^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp cụt:

$$V = \frac{1}{3} \,.\, 3a \,.\, \left(4a^2\sqrt{3} + \sqrt{4a^2\sqrt{3} \,.\, \frac{a^2\sqrt{3}}{4}} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{21a^3\sqrt{3}}{4}.$$

C. BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a, biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, M là trung điểm của SC.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAG).

3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$.

4. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $\sqrt{11}$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BI.

5. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy (ABC). Các mặt bên (SAB), (SBC) tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng $60°$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = a$, $AD = 3a$, $BC = a$. Tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a.

7. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a.

Biết $d(A, (A'BC)) = \frac{a\sqrt{57}}{12}$. Tính $V_{ABC.A'B'C'}$.

8. Một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước là 2 cm, 3 cm và 6 cm. Tính thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$.

9. Cho hình chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có đường cao $HH' = 2a$. Cho biết $AB = 2a$, $A'B' = a$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tính thể tích của:

a) Khối chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$;

b) Khối lăng trụ $AB_1C_1.A'B'C'$.

10. Tính thể tích một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 80 cm, đáy nhỏ có cạnh bằng 40 cm và cạnh bên bằng 80 cm.

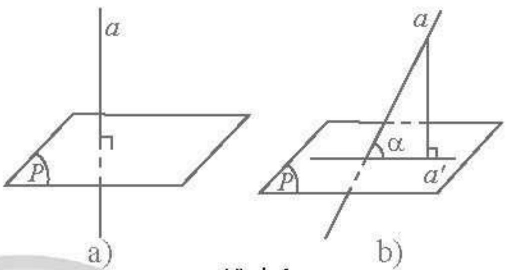
Hình 12

Bài 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a với (P) bằng 90°. Nếu đường thẳng a không vuông góc với (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và (P).



Hình 1

Chú ý:

a) Góc α giữa đường thẳng và mặt phẳng luôn thoả mãn $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

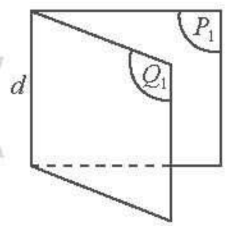
b) Nếu đường thẳng a nằm trong (P) hoặc a song song với (P) thì $(a, (P)) = 0^\circ$.

2. Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện

Góc nhị diện

Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d. Hình tạo bởi (P_1), (Q_1) và d được gọi là ***góc nhị diện*** tạo bởi (P_1) và (Q_1), kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.

Hai nửa mặt phẳng (P_1), (Q_1) gọi là ***hai mặt của nhị diện*** và d gọi là ***cạnh của nhị diện***.



Hình 2

Chú ý:

a) Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.

b) Góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng (P_1), (Q_1).

Góc phẳng nhị diện

Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Chú ý:

a) Đối với một góc nhị diện, các góc phẳng nhị diện đều bằng nhau.

b) Nếu mặt phẳng (R) vuông góc với cạnh d của góc nhị diện và cắt hai mặt (P_1), (Q_1) của góc nhị diện theo hai nửa đường thẳng Ou và Ov thì $\widehat{uOv}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện tạo bởi (P_1), (Q_1).

c) Góc nhị diện có góc phẳng nhị diện là góc vuông được gọi là góc nhị diện vuông.

d) Số đo góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện.

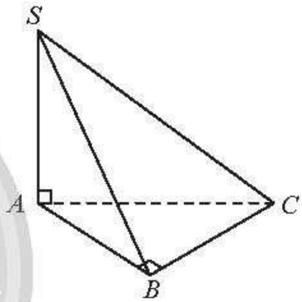
e) Số đo góc nhị diện nhận giá trị từ 0° đến 180°.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B. Biết $AC = a\sqrt{2}$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa:

a) SB và (ABC). b) SC và (ABC). c) SC và (SAB).

Giải



Hình 3

Trong tam giác ABC vuông tại B, ta có:

$AB = \cos\widehat{BAC}.AC = \cos 60^\circ.a\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$BC = \sin\widehat{BAC}.AC = \sin 60^\circ.a\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

a) Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ SB \cap (ABC) = B. \end{cases}$

$\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên (ABC).

Do đó $(SB, (ABC)) = (SB, AB)$.

Trong tam giác SAB vuông tại A ,ta có:

$$\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{2}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SBA} = 45^\circ.$$

Vậy $(SB, (ABC)) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

b) Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ SC \cap (ABC) = C \end{cases}$

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên (ABC).

Do đó $(SC, (ABC)) = (SC, AC)$.

Trong tam giác SAC vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SCA} \approx 26,6^\circ.$$

Vậy $(SC, (ABC)) = \widehat{SCA} \approx 26,6^\circ$.

c) Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. (1)

$SC \cap (SAB) = S$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC trên (SAB).

Do đó $(SC, (SAB)) = (SC, SB)$.

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a.$$

Trong tam giác SBC vuông tại B, ta có:

$$\tan \widehat{BSC} = \frac{BC}{SB} = \frac{a\sqrt{6}}{2a} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \widehat{BSC} \approx 50,8^\circ.$$

Vậy $(SC, (SAB)) = \widehat{BSC} \approx 50,8^\circ$.

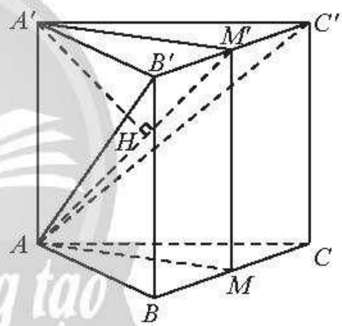
Bài 2. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC), tính $\cos \alpha$.

Giải

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Vẽ đường cao $A'H$ của tam giác vuông $AA'M'$.

Ta có:

$\begin{cases} B'C' \perp A'M' \\ B'C' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'M')$



Hình 4

Mà $A'H \subset (AA'M')$ nên $B'C' \perp A'H$. (1)

Ta lại có: $A'H \perp AM'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A'H \perp (AB'C')$. (*)

Hơn nữa, $AA' \perp (ABC)$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $((ABC), (AB'C')) = (A'A, A'H) = \alpha$.

Trong tam giác đều $A'B'C'$, ta có $A'M' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác vuông $AA'M'$, ta có $\dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{A'M'^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow A'H = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Trong tam giác vuông $AA'H$, ta có $\cos \widehat{AA'H} = \dfrac{A'H}{AA'} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7} . \dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $\cos \alpha = \cos \widehat{AA'H} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$

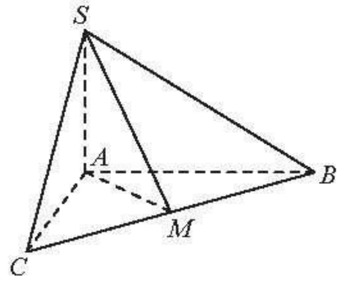
Giải

Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $AB = AC \Rightarrow AM \perp BC$. (1)

Mặc khác $SC = SB$ (do $\Delta SAC = \Delta SAB$) nên ΔSCB cân tại $S \Rightarrow SM \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{SMA}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.



Hình 5

Ta có $\widehat{MAB} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = 60^\circ$, $AM = \cos\widehat{MAB}.AB = \dfrac{a}{2}$,

Trong tam giác SMA vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{SMA} = \frac{SA}{MA} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMA} = 60^\circ.$$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC = a$, $SA = \dfrac{a}{2}$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC. Tính số đo các góc phẳng nhị diện:

a) $[B, SA, D]$; b) $[S, BD, A]$;

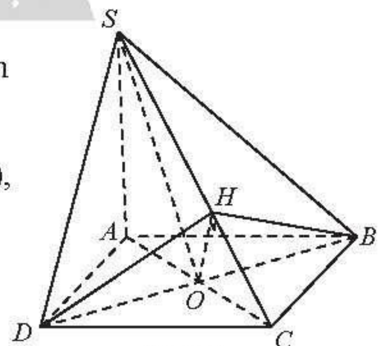
c) $[S, BD, C]$; d) $[D, SC, B]$.

Giải

a) Ta có $\begin{cases} SA \perp AD \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAB}$ là góc phẳng nhị diện $[D, SA, B]$.

Tam giác DAC là tam giác đều ($AD = DC = AC = a$), nên $\widehat{DAC} = 60^\circ$.

Ta có $\widehat{DAB} = 2\widehat{DAC} = 2.60^\circ = 120^\circ$.



Hình 6

b) Ta có $\Delta SAD = \Delta SAB \Rightarrow SD = SB$.

Nên ΔSBD cân tại $S \Rightarrow SO \perp BD$ (do $OB = OD$). (1)

Ta lại có $OA \perp BD$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{SOA}$ là góc phẳng phẳng nhị diện $[S, BD, A]$.

Trong tam giác SOA vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{a}{2}.\frac{2}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SOA} = 45^\circ.$$

c) Ta có $\begin{cases} OS \perp BD \\ OC \perp BD \end{cases} \Rightarrow \widehat{SOC}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BD, C]$.

Ta có $\widehat{SOC} = 180^\circ - \widehat{SOA} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

d) Ta có $BD \perp AC, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ hay $OD \perp SC$

Ta có $\begin{cases} SC \perp OD \\ SC \perp OH \end{cases} \Rightarrow SC \perp (ODH)$ hay $SC \perp (DHB)$.

Nên $\begin{cases} SC \perp DH \\ SC \perp BH \end{cases} \Rightarrow \widehat{DHB}$ là góc phẳng nhị diện $[D, SC, B]$.

Trong tam giác SAC vuông tại A, ta có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ta có $\dfrac{OH}{SA} = \dfrac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \dfrac{SA.OC}{SC} = \dfrac{a}{2\sqrt{5}}$.

ADC là tam giác đều nên $DO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác OHD vuông tại O, ta có

$\tan \widehat{OHD} = \dfrac{OD}{OH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} . \dfrac{2\sqrt{5}}{a} = \sqrt{15} \Rightarrow \widehat{OHD} \approx 75{,}5^\circ$.

Vậy $\widehat{DHB} = 2.\widehat{OHB} \approx 2.75{,}5^\circ = 151^\circ$.

C. BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa:

a) SB và $(ABCD)$;
b) SC và $(ABCD)$;
c) SD và $(ABCD)$;
d) SB và (SAC).

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm I của cạnh AB. Biết rằng mặt bên (SAB) là tam giác vuông cân tại S. Xác định và tính góc giữa:

a) SA và (ABC);
b) SC và (SAB).

3. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^\circ, AC = a, SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A. TRẮC NGHIỆM

1. Trong không gian, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.

B. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thứ ba thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

2. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \,//\, (\alpha)$ thì $d \perp a$.

3. Cho tứ diện $ABCD$. Vẽ $AH \perp (BCD)$. Biết H là trực tâm tam giác BCD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AB = CD$. B. $AC = BD$. C. $AB \perp CD$. D. $CD \perp BD$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SC \perp EF$. B. $SC \perp AE$. C. $SC \perp AF$. D. $SC \perp BC$.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 75^\circ$. C. $\tan \alpha = 1$. D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

6. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

B. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.

C. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{ACB}$.

D. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

8. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì

A. Song song với nhau.

B. Trùng nhau.

C. Không song song với nhau.

D. Hoặc song song với nhau hoặc cắt nhau theo giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

9. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. B. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm của CD. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BE và SC.

A. $\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$. B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. D. a.

11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a$. Tam giác SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45°. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$. B. $\dfrac{1}{3}a^3$. C. $2a^3$. D. $\dfrac{2}{3}a^3$.

12. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30°. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V = 2\sqrt{6}a^3$. D. $V = \dfrac{4a^3}{3}$.

13. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông tại B, $AB = 2a$, $BC = a$, $AA' = 2a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.ABC$ là

A. $4a^3\sqrt{3}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

14. Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. V_1 là thể tích của tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $V = 6V_1$. B. $V = 4V_1$. C. $V = 3V_1$. D. $V = 2V_1$.

B. TỰ LUẬN

1. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của điểm O trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (OAH)$.

b) H là trực tâm của ΔABC.

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

2. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC). Vẽ các đường cao BE, DF của tam giác BCD, đường cao DK của tam giác ACD.

a) Chứng minh hai mặt phẳng (ABE) và (DFK) cùng vuông góc với (ADC).

b) Gọi O và H là trực tâm ΔBCD và ΔACD. Chứng minh OH vuông góc với (ADC).

3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

4. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là $AB = 5a$, $BC = 8a$, $AC = 7a$, góc giữa SB và (ABC) là $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Biết $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, góc giữa hai mặt phẳng $(C'AB)$ và (ABC) bằng $60°$. Tính $V_{ABC.A'B'C'}$.

6. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

7. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$. Mặt phẳng $(B'AC)$ tạo với đáy một góc $30°$, khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(D'AC)$ bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

8. Một thùng đựng rác có dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Đáy và miệng thùng có độ dài lần lượt là 60 cm và 120 cm, cạnh bên của thùng dài 100 cm. Tính thể tích của thùng.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Đặt $2a$ là độ dài cạnh của tứ diện đều.

Gọi N là trung điểm của AC, H là trung điểm của MN, ta có:

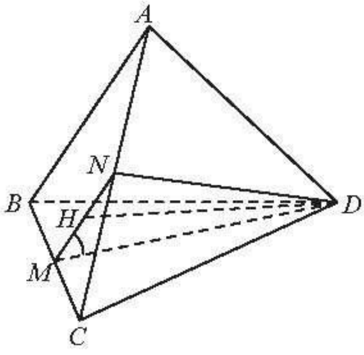
$MN \,//\, AB$, suy ra $(AB, DM) = (MN, DM)$.

$DM = DN = a\sqrt{3}$, $MN = a$ nên ΔDMN cân tại D.

Suy ra $MH = \dfrac{a}{2}$ và $DH \perp MN$.

$$\cos\widehat{DMN} = \frac{MH}{MD} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \widehat{DMN} \approx 73,2^\circ.$$

Vậy $(AB, DM) = (MN, DM) = \widehat{DMN} \approx 73,2^\circ$.



Hình 1

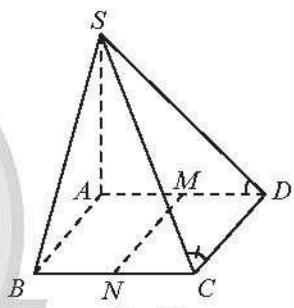
2. a) Vì $AD \,//\, BC$ nên $(SD, BC) = (SD, AD)$.

Vì $SA \perp BC$ và $AD \,//\, BC$ nên $SA \perp AD$ hay tam giác SAD vuông tại A.

Do đó $(SD, BC) = (SD, AD) = \widehat{SDA} = 60^\circ$.

b) Vì $MN \,//\, CD$ nên $(SC, MN) = (SC, CD)$.

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{A} = 120^\circ$ nên ACD là tam giác đều cạnh a.



Hình 2

Xét các tam giác vuông SAC, SAD có:

$$SC = \sqrt{AC^2 + SA^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a \text{ và } SD = \sqrt{AD^2 + SA^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a.$$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác SCD:

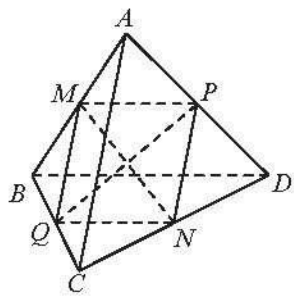
$$\cos\widehat{SCD} = \frac{SC^2 + CD^2 - SD^2}{2.SC.CD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \widehat{SCD} \approx 75,5^\circ.$$

Vậy $(SC, MN) = (SD, AD) = \widehat{SCD} = 75,5^\circ$.

3. a) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC.

Ta có $\Delta ACD = \Delta BDC$ (c.c.c), suy ra $AN = BN$, suy ra ΔNAB cân tại N. Mà M là trung điểm của AB, suy ra $NM \perp AB$.

Tương tự ta có $NM \perp CD$.



Hình 3

b) Ta có $MQ = PN = \dfrac{AC}{2}$, $MP = QN = \dfrac{BD}{2}$, $AC = BD$.

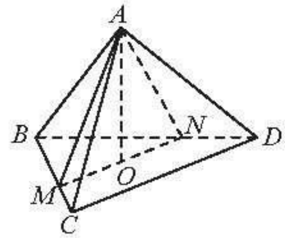
Suy ra $MQ = PN = MP = QN$.

Vậy tứ giác $MPNQ$ là hình thoi, suy ra $MN \perp PQ$.

4. a) Ta có $IJ \,//\, SB$, $DC \,//\, AB$, suy ra $(IJ, DC) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 60°$.

b) Ta có $MN \,//\, AD \,//\, BC$, $IJ \,//\, SB$, suy ra $(MN, IJ) = (BC, SB) = \widehat{SBC} = 60°$.

5. Qua O vẽ đường $MN \,//\, CD$ ($M \in BC$, $N \in BD$).
Ta có $OM = ON$, $AM = AN$, suy ra ΔAMN cân tại A, suy ra $AO \perp MN$. Mà $MN \,//\, CD$ nên $AO \perp CD$.



Hình 4

Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

1. a) Ta có $SA = SC$, suy ra ΔSAC cân tại S, suy ra
$SO \perp AC$. (1)

Ta có $SB = SD$, suy ra ΔSBD cân tại S, suy ra
$SO \perp BD$. (2)

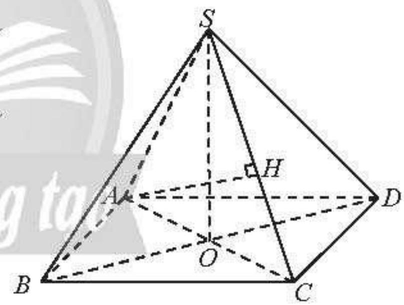
Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.

b) Ta có $AC = 2a$, $OC = a$,

$SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = 3a$.

Vẽ đường cao AH của tam giác SAC. Ta có:

$$AH = \frac{SO\,.\,AC}{SC} = \frac{2a\sqrt{2}\,.\,2a}{3a} = \frac{4a\sqrt{2}}{3}.$$



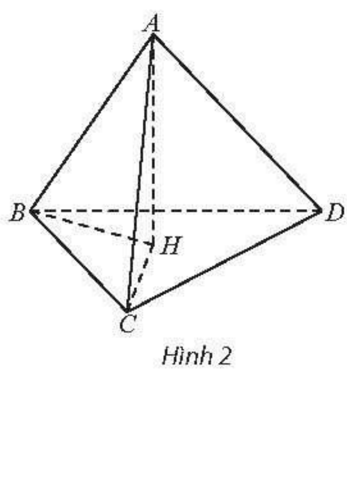
Hình 1

2. Ta có $CD \perp AB$ và $CD \perp AH$, suy ra
$CD \perp (ABH)$, suy ra $CD \perp BH$.

Tương tự ta cũng có $BD \perp CH$.

Vậy H là trực tâm của ΔBCD.

Ta có H là trực tâm của ΔBCD, suy ra $BC \perp DH$. Ta lại có $BC \perp AH$, suy ra $BC \perp (AHD)$, suy ra $BC \perp AD$.



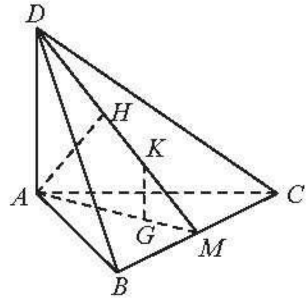
Hình 2

3. a) Ta có $BC \perp DA$, $BC \perp AM$, suy ra

$BC \perp (ADM)$, suy ra $BC \perp AH$. Ta lại có $AH \perp DM$, suy ra $AH \perp (BCD)$.

b) Ta có $\frac{MK}{MD} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$, suy ra $GK \parallel AD$.

Ta lại có $AD \perp (ABC)$, suy ra $GK \perp (ABC)$.



Hình 3

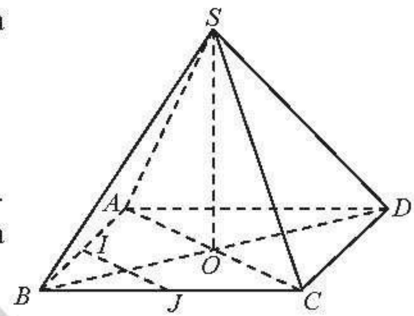
4. a) Ta có $SA = SC$, suy ra ΔSAC cân tại S, suy ra $SO \perp AC$. (1)

Tương tự ta có $SO \perp BD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.

b) Ta có $AC \perp BD$ và $AC \perp SO$, suy ra $AC \perp (SBD)$. Ta có IJ là đường trung bình của ΔABC nên suy ra $IJ \parallel AC$, suy ra $IJ \perp (SBD)$.

c) Ta có $BD \perp AC$ và $BD \perp SO$, suy ra $BD \perp (SAC)$.



Hình 4

Bài 3. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1. Gọi I là trung điểm của CD.

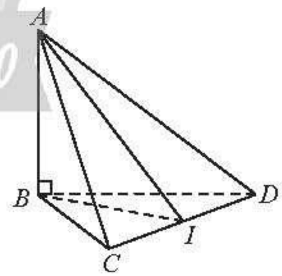
Ta có: $CD \perp BI$ và $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp AI$.

Khi đó: $(ACD) \cap (BCD) = CD$;

$AI \perp CD, AI \subset (ACD)$;

$BI \perp CD, BI \subset (BCD)$

suy ra $((ACD), (BCD)) = (AI, BI)$.



Hình 1

Do tam giác BCD vuông cân tại B nên $BI = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}.BC\sqrt{2} = a$.

Xét tam giác ABI vuông tại B, ta có: $\tan \widehat{AIB} = \frac{AB}{BI} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AIB} = 30^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là $\widehat{AIB} = 30^\circ$.

2. Vẽ $AK \perp ID$ $(K \in ID)$.

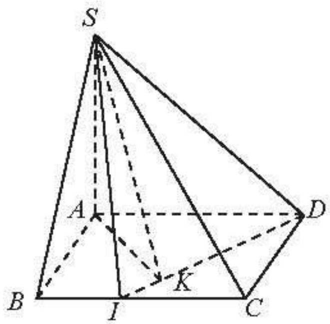
Ta có $ID \perp SA$ và $ID \perp AK$

$\Rightarrow ID \perp (SAK) \Rightarrow ID \perp SK$.

Suy ra $((SDI), (ABCD)) = \widehat{AKS} = 60^\circ$.

Xét tam giác SAK vuông tại A, ta có:

$$\sin\widehat{AKS} = \frac{SA}{SK} \Rightarrow SK = \frac{SA}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$



Hình 2

Tam giác SAD vuông tại A, ta có: $SD = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

Xét tam giác SID vuông tại S, ta có:

$$\frac{1}{SK^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{SD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SI^2} = \frac{1}{SK^2} - \frac{1}{SD^2} \Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{55}}{11}.$$

3. a) Ta có: $BC \perp AB$ (giả thiết),

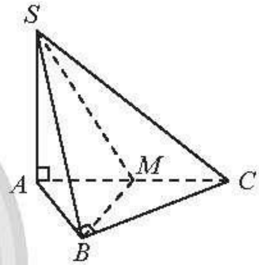
$BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$)

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

b) Vì tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B nên $BM \perp AC$.

Mà $BM \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$ suy ra $BM \perp (SAC)$.

Vậy $(SBM) \perp (SAC)$.



Hình 3

4. a) Ta có: $(SAB) \perp (ABCD)$;

$(SAD) \perp (ABCD)$;

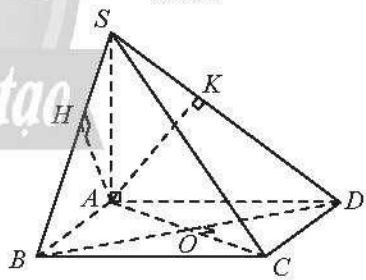
$(SAB) \cap (SAD) = SA$

$\Rightarrow SA \perp (ABCD)$

Khi đó: $BC \perp AB$ (giả thiết);

$BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.



Hình 4

b) Chứng minh tương tự câu a, ta được: $(SCD) \perp (SAD)$.

c) Ta có: $BD \perp AC$ (giả thiết);

$BD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

d) Ta có: $(SAB) \perp (SBC)$ (chứng minh trên);

$(SAB) \cap (SBC) = SB$;

$AH \perp SB$ (giả thiết)

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (1)

Ta có: $(SCD) \perp (SAD)$ (chứng minh trên);

$(SCD) \cap (SAD) = SD$;

$AK \perp SD$ (giả thiết)

$\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (AHK)$.

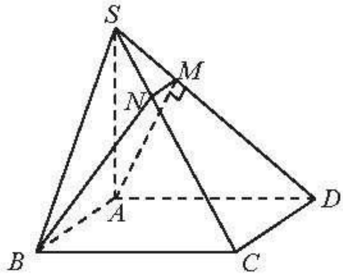
Vậy $(SAC) \perp (AHK)$.

5. a) Ta có: $(SAB) \perp (ABCD)$;

$(SAD) \perp (ABCD)$;

$(SAB) \cap (SAD) = SA$

$\Rightarrow SA \perp (ABCD)$.



Hình 5

Dễ dàng chứng minh được $(SAD) \perp (SCD)$.

Vẽ $AM \perp SD$ $(M \in SD) \Rightarrow AM \perp (SCD)$

$\Rightarrow (ABM) \perp (SCD)$ hay (ABM) là mặt phẳng (α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD).

Trong mặt phẳng (SCD) kẻ $MN // CD$ $(N \in SC)$.

Suy ra: $MN // AB \Rightarrow MN \subset (\alpha)$.

Vậy các giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp là AB, BN, NM, MA.

b) Ta có: $MN // AB$ và $AB \perp AM$ (vì $AB \perp (SAD)$) nên $ABNM$ là hình thang vuông tại A và M.

Tam giác SAD vuông tại A có AM là đường cao nên

$$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$MN // CD \Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{SM}{SD} \Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{\frac{SA^2}{SD}}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{3a^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4}a.$$

Vậy $S_{ABNM} = \frac{1}{2}.AM.(MN + AB) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}a + a\right) = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

6. $S_{tp} = 4.\frac{\sqrt{15}}{2}.\frac{(2+1)}{2} + 4 + 1 = 5 + 3\sqrt{5} \approx 16,62\ (\text{m}^2)$.

7. $\frac{S_{xq}}{S_{\text{đáy}}} = \frac{6.50.10}{6.\frac{10^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11,55.$

Bài 4. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

1. Gọi E là trung điểm của BC thì $BC \perp AE$ (vì ΔABC đều).

Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AE \Rightarrow BC \perp (SAE)$

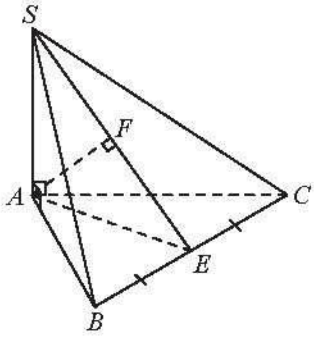
$\Rightarrow (SBC) \perp (SAE)$.

Trong mặt phẳng (SAE), vẽ $AF \perp SE$ ($F \in SE$).

Suy ra $AF \perp (SBC)$ hay $d(A, (SBC)) = AF$.

Xét ΔSAE vuông tại A:

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{2}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Hình 1

Vậy $d(A, (SBC)) = AF = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

2. a) Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SG \perp (ABC)$ hay $d(S, (ABC)) = SG$.

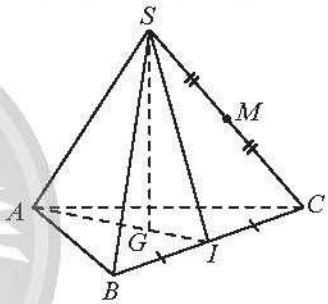
Tam giác ABC là tam giác đều cạnh $3a$ nên

$AG = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SAG vuông tại G nên

$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.

Vậy $d(S, (ABC)) = a$.



Hình 2

b) Vì $SC \cap (SAG) = S$ nên $\dfrac{d(M, (SAG))}{d(C, (SAG))} = \dfrac{MS}{CS} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow d(M, (SAG)) = \dfrac{1}{2} d(C, (SAG))$.

Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có: $CB \perp AI$ và $CB \perp SG \Rightarrow CB \perp (SAG)$ và $CB \cap (SAG) = I$.

Do đó $d(C, (SAG)) = CI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{3a}{2}$. Vậy $d(M, (SAG)) = \dfrac{3a}{4}$.

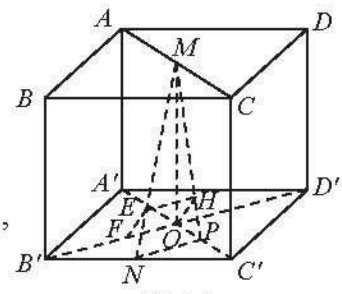
3. $B'D'$ cắt $A'C'$ tại O. Gọi P là trung điểm của OC'.

Vẽ $OH \perp MP$, $HE \parallel NP$, $EF \parallel OH$.

Ta có: $d(MN, B'D') = EF = OH$.

Xét tam giác vuông MOP, ta có $OM = a$, $OP = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$,

suy ra $OH = \dfrac{a}{3}$.

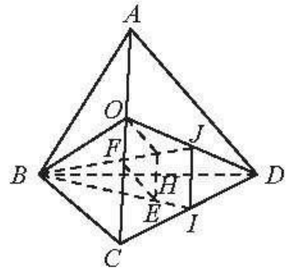


Hình 3

4. Gọi O là trung điểm AC, J là trung điểm OD.
Vẽ $OH \perp BJ$, $HE \parallel AC$, $EF \parallel OH$.
Ta có $d(AC, BJ) = EF = OH$.
Xét tam giác OBD cân tại O, ta có

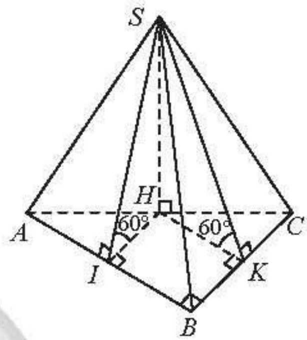
$BD = \sqrt{11},\ OB = OD = \dfrac{\sqrt{33}}{2},\ BJ = \dfrac{\sqrt{11}}{4},$

$S_{\Delta OBD} = \dfrac{11\sqrt{2}}{4}, OH = \sqrt{2}.$



Hình 4

5. Ta có: $(SAC) \perp (ABC)$ và $(SAC) \cap (ABC) = AC$.
Trong mặt phẳng (SAC), vẽ $SH \perp AC$ $(H \in AC)$ thì $SH \perp (ABC)$.
Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh AB và BC thì $((SAB), (ABC)) = \widehat{SIH}$, $((SBC), (ABC)) = \widehat{SKH}$.
Mà $\widehat{SIH} = \widehat{SKH} = 60^\circ$ nên $HI = HK$.



Hình 5

Suy ra tứ giác $BIHK$ là hình vuông nên H là trung điểm cạnh AC.

Khi đó tứ giác $BIHK$ là hình vuông cạnh $\dfrac{a}{2}$ và $SH = HI \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

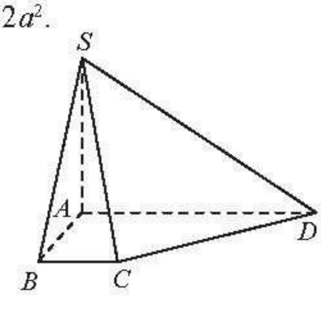
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC} . SH = \dfrac{1}{3} . \dfrac{a^2}{2} . \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

6. Ta có: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} AB \,.\, (AD + BC) = \dfrac{1}{2} \,.\, a \,.\, (3a + a) = 2a^2$.

Lại có $S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2} AB \,.\, AD = \dfrac{1}{2} \,.\, a \,.\, 3a = \dfrac{3a^2}{2}$.

Suy ra $S_{\Delta BCD} = S_{ABCD} - S_{\Delta ABD} = \dfrac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta BCD} \,.\, SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



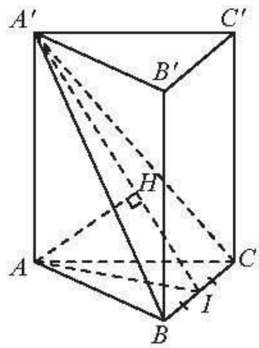
Hình 6

7. Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên $A'I$.
Ta có: $BC \perp AI$ và $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (A'AI) \Rightarrow (A'BC) \perp (A'AI)$.

Mặt khác: $(A'AI) \cap (A'BC) = A'I$ và $AH \perp A'I$.

Nên $d(A, (A'BC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{57}}{12}$.

ΔABC đều cạnh $a \Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



Hình 7

Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{144}{57a^2} - \frac{4}{3a^2} = \frac{68}{57a^2} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{57}}{2\sqrt{17}}.$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \,.\, AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{57}}{2\sqrt{17}} = \dfrac{a^3\sqrt{171}}{8\sqrt{17}}$.

8. Ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{BAB'C} + V_{DACD'} + V_{A'B'AD'} + V_{C'B'CD'} + V_{ACB'D'}$

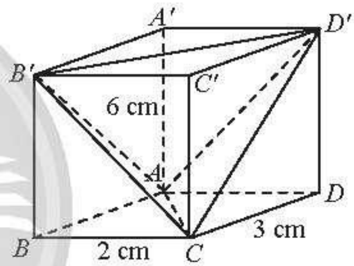
$$= 4V_{BAB'C} + V_{ACB'D'}$$

$\Rightarrow V_{ACB'D} = V_{ABCDA'B'C'D'} - 4V_{BAB'C}$

$$= V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4.\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

$$= \frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

$$= \frac{1}{3}\,.\,2\,.\,3\,.\,6 = 12\ (\text{cm}^3).$$



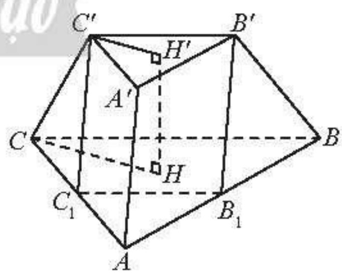
Hình 8

9. a) Áp dụng công thức $V = \dfrac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S')$,

với $S = a^2\sqrt{3}$, $S' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $h = 2a$,

ta có: $V = \dfrac{1}{3}\,.\,2a\,.\left(a^2\sqrt{3} + \sqrt{a^2\sqrt{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

$$= \frac{7a^3\sqrt{3}}{6}.$$



Hình 9

b) Áp dụng công thức $V' = S'\,.\,h'$ với $S' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $h' = 2a$,

Ta có $V' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\,.\,2a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

10. Ta có: $OC = 40\sqrt{2}$, $O'C' = 20\sqrt{2}$, suy ra $CH = 20\sqrt{2}$.

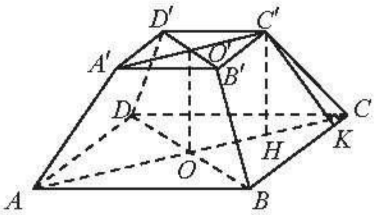
Trong tam giác vuông $C'CH$, ta có:

$C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = 20\sqrt{14}$.

Nên $OO' = C'H = 20\sqrt{14}$.

Thể tích của cái sọt đựng đồ là:

$$V = \frac{1}{3} . 20\sqrt{14} . \left(6400 + \sqrt{6400 . 1600} + 1600\right) \approx 279\,377,08 \text{ cm}^2.$$



Hình 10

Bài 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN

1. a) Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ SB \cap (ABCD) = B \end{cases}$

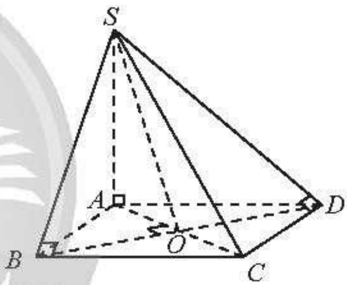
$\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Do đó $(SB, (ABCD)) = (SB, AB)$.

Trong tam giác SAB vuông tại A, ta có:

$\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

Vậy $(SB, (ABCD)) = \widehat{SBA} = 60°$.



Hình 1

b) Tương tự câu a) ta xác định được $(SC, (ABCD)) = (SC, AC)$.

Trong tam giác SAC vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{SCA} \approx 50,8°$.

Vậy $(SC; (ABCD)) = \widehat{SCA} \approx 50,8°$.

c) Tương tự câu a) ta xác định được $(SD, (ABCD)) = (SD, AD)$.

Trong tam giác SAD vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60°$.

Vậy $(SD, (ABCD)) = \widehat{SDA} = 60°$.

d) Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ hay $BO \perp (SAC)$. (1)

Mà $SB \cap (SAC) = S$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra SO là hình chiếu của SB trên (SAC).

Do đó: $(SB, (SAC)) = (SB, SO)$.

Trong tam giác SBO vuông tại O, ta có $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SB = 2a$.

$\Rightarrow \sin\widehat{BSO} = \frac{BO}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{BSO} \approx 20,7^\circ$.

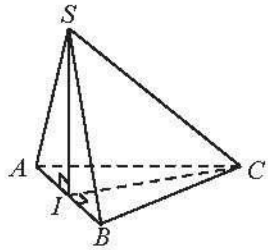
Vậy $(SB, (SAC)) = \widehat{BSO} \approx 20,7^\circ$.

2. Vì AI là hình chiếu của SA trên (ABC).

Do đó $(SA, (ABC)) = (SA, AI)$.

Vì tam giác SAI vuông cân tại $I \Rightarrow \widehat{SAI} = 45^\circ$.

Vậy $(SA, (ABC)) = (SA, AI) = \widehat{SAI} = 45^\circ$.



Hình 2

b) Ta có tam giác ABC đều nên $CI \perp AB$, $CI = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SI \text{ (do } SI \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB)$. (1)

Mà $SC \cap (SAB) = S$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SC trên (SAB).

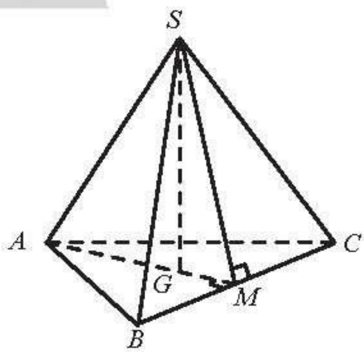
Do đó $(SC, (SAB)) = (SC, SI)$.

Trong tam giác SAB vuông tại S, $SI = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}$.

Trong tam giác SCI vuông tại I, ta có $\tan\widehat{CSI} = \frac{IC}{SI} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CSI} = 60^\circ$

Vậy $(SC, (SAB)) = \widehat{CSI} = 60^\circ$.

3. Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có $SG \perp (ABC)$, $SM \perp BC$, $AM \perp BC$, suy ra $\widehat{SMG}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$



Hình 3

Ta tính được

$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, GM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$,

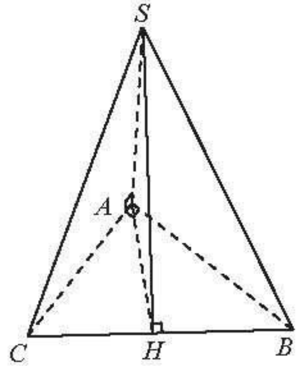
$SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$,

$SG = \sqrt{SM^2 - GM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có tam giác SMG vuông cân tại G, suy ra số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A] = \widehat{SMG} = 45^\circ$.

4. Vẽ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$, ta có $SH \perp BC$, suy ra $\widehat{SHA}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Ta có $AH = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA$, suy ra $\widehat{SHA} = 45^\circ$.



Hình 4

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A. TRẮC NGHIỆM

1. A	**2.** B	**3.** C	**4.** D	**5.** D	**6.** A	**7.** B
8. D	**9.** C	**10.** A	**11.** D	**12.** A	**13.** B	**14.** A

B. TỰ LUẬN

1.

a) Ta có $BC \perp OH$, $BC \perp OA$, suy ra $BC \perp (OAH)$.

b) Gọi $E = AH \cap BC$, $F = BH \cap AC$.

Theo câu a ta có:

$BC \perp (AOH) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow BC \perp AE.$ (1)

Chứng minh tương tự ta có:

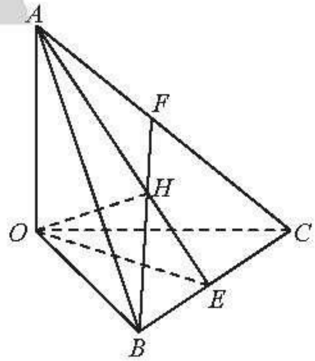
$AC \perp (BOH) \Rightarrow AC \perp BF.$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow H$ là trực tâm tam giác ABC.

c) Tam giác vuông AOE có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OE^2}$. (3)

Tam giác vuông BOC có: $\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. (4)

Thay (4) vào (3) ta được $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.



Hình 1

2. a) Ta có $(ABC) \cap (ABD) = AB$,

$(ABC) \perp (DBC)$, $(ABD) \perp (DBC)$,

Suy ra $AB \perp (DBC)$.

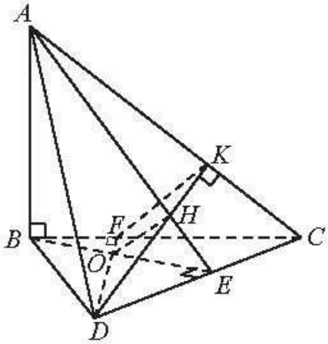
Ta có: $CD \perp BE$, $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp (ABE)$.

Mà $CD \subset (ACD)$ nên $(ADC) \perp (ABE)$. (1)

Ta lại có: $DF \perp BC$, $DF \perp AB \Rightarrow DF \perp (ABC)$

$\Rightarrow DF \perp AC$.

Mặt khác $DK \perp AC$ nên $AC \perp (DFK)$.



Hình 2

Mà $AC \subset (ACD)$ nên $(ADC) \perp (DFK)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra (ABE) và (DFK) cùng vuông góc với (ADC).

b) Ta có O là giao điểm của hai đường cao BE và DF, H là giao điểm của hai đường cao AE và DK.

Ta có: $(ABE) \perp (ADC)$, $(DFK) \perp (ADC)$ và $(ABE) \cap (DFK) = OH$

$\Rightarrow OH \perp (ADC)$.

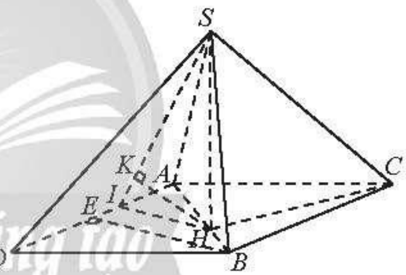
3.

Áp dụng định lí côsin trong ΔAHC:

$CH^2 = AC^2 + AH^2 - 2AC.AH.\widehat{CAH}$

$= a^2 + \left(\dfrac{2a}{3}\right)^2 - 2.a.\dfrac{2a}{3}.\cos 60^\circ$

$= \dfrac{7a^2}{9} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.



Hình 3

Ta có: $SH \perp (ABC) \Rightarrow HC$ là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC).

Suy ra $(SC,(ABC)) = (SC,HC) = \widehat{SCH} = 60^\circ$ (do $\widehat{SCH} < 90^\circ$).

Trong ΔSCH vuông tại H có: $SH = CH.\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}.\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$.

Dựng hình bình hành $ACBD$. Ta có:

$$\begin{cases} BC \,//\, AD \\ AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC \,//\, (SAD).$$

Nên $d(BC, SA) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = \dfrac{3}{2}d(H,(SAD))$. (1)

Gọi E là trung điểm của $AD \Rightarrow BE \perp AD$.

Từ H kẻ $HI \,//\, BE$ $(I \in AD) \Rightarrow HI \perp AD$.

Vẽ $HK \perp SI$ $(K \in SI)$.

Ta có: $\begin{cases} AD \perp HI \\ AD \perp SH \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SHI) \Rightarrow AD \perp HK.$

Suy ra $HK \perp (SAD)$ hay $d(H, (SAD)) = HK.$ (2)

Trong ΔAIH vuông tại I, ta có: $HI = HA . \sin 60^{\circ} = \dfrac{2a}{3} . \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

Trong ΔSIH vuông tại H, ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{9}{21a^2} + \frac{9}{3a^2} = \frac{24}{7a^2}$$

$\Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{42}}{12}.$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $d(BC, SA) = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}.$

4. Ta có nửa chu vi ΔABC là

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = 10a.$$

Diện tích ΔABC là

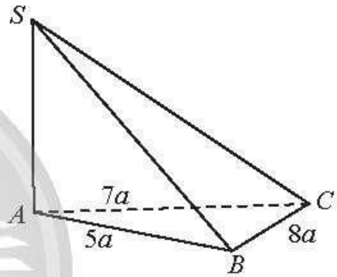
$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{10a.5a.3a.2a} = 10\sqrt{3}a^2.$$

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $\widehat{SBA} = (SB, (ABC)) = 45^{\circ}$

Suy ra ΔSAB vuông tại A nên $SA = AB = 5a$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA . S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} 5a . 10\sqrt{3}a^2 = \frac{50\sqrt{3}}{3} a^3.$$



Hình 4

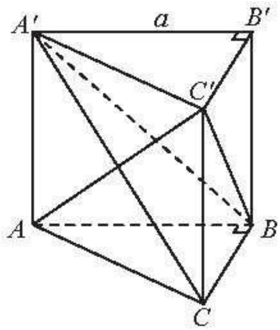
5. Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCC') \Rightarrow AB \perp C'B.$

Khi đó:

$CB \perp AB$, $C'B \perp AB$, $(ABC) \cap (C'AB) = AB$,

$\Rightarrow ((ABC), (C'AB)) = \widehat{CBC'} = 60^{\circ}.$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB . BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ và $CC' = BC . \tan 60^{\circ} = 3a.$



Hình 5

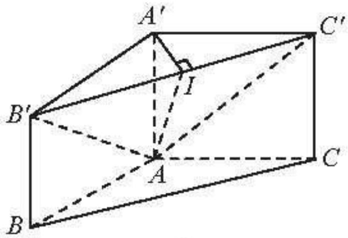
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = CC' . S_{\Delta ABC} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$

6. Do $AA' \perp (A'B'C')$ nên kẻ $A'I \perp B'C'$ $(I \in B'C')$.

Suy ra: $((AB'C'),(A'B'C')) = \widehat{A'IA} = 60°$.

Xét $\Delta A'IB'$ có $A'I = A'B'\cos\widehat{B'A'I} = a.\cos 60° = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra: $AA' = A'I.\tan\widehat{A'IA} = \dfrac{a}{2}.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Hình 6

Khi đó: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = AA'.\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 120° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{2}.a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.

7. Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có:

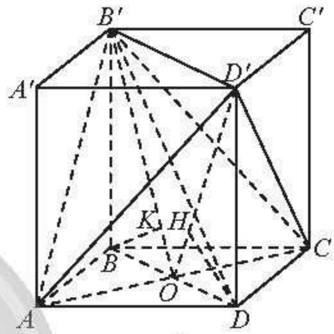
$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BB'D) \Rightarrow AC \perp B'O.$

Khi đó :

$BO \perp AC$, $B'O \perp AC$, $(ABCD) \cap (B'AC) = AC$,

$\Rightarrow ((B'AC),(ABCD)) = (BO, OB') = \widehat{B'OB} = 30°$.

Dễ thấy $d(B,(D'AC)) = d(D,(D'AC)) = \dfrac{a}{2}$.



Hình 7

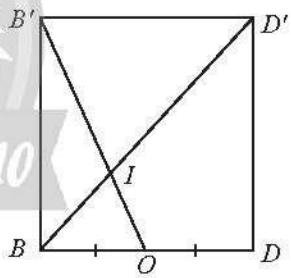
$AC \perp (BB'D'D) \Rightarrow (D'AC) \perp (BB'D'D)$

và $(D'AC) \cap (BB'D'D) = D'O$.

Từ D kẻ $DH \perp D'O$ $(H \in DO)$,

suy ra $d(D,(D'AC)) = DH = \dfrac{a}{2}$.

Xét $\Delta B'BO$: $\tan 30° = \dfrac{BB'}{BO} \Rightarrow OD = BO = \sqrt{3}BB'$.



Hình 8

Xét $\Delta D'DO$: $\dfrac{1}{HD^2} = \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{D'D^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{1}{3B'B^2} + \dfrac{1}{D'D^2}$

$\Rightarrow DD' = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow OB = a$.

Gọi: $I = BD \cap B'O$, suy ra $\dfrac{BI}{D'I} = \dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow d(D',(B'AC)) = 2d(B,(B'AC)) \Rightarrow V_{ACB'D'} = 2V_{B'ABC}$.

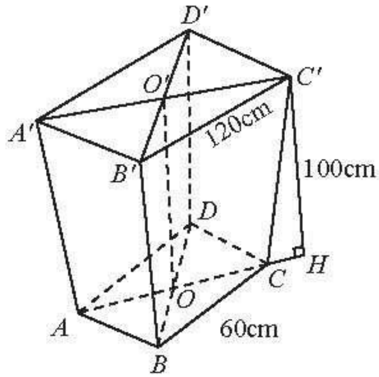
Mà $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ABO} = 2.\dfrac{1}{2}.OB.OA = a^2\sqrt{3}$.

Suy ra: $V_{B'ABC} = \frac{1}{3}.BB'.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{\sqrt{3}}.a^2\sqrt{3} = \frac{a^3}{3}.$

Vậy $V_{ACB'D'} = \frac{2a^3}{3}.$

8. Kẻ $C'H \perp AC$ ($H \in AC$).



Hình 9

Có $O'C' = \frac{\sqrt{120^2 + 120^2}}{2} = 60\sqrt{2}.$

$OC = \frac{\sqrt{60^2 + 60^2}}{2} = 30\sqrt{2}.$

$\Rightarrow CH = O'C' - OC = 30\sqrt{2}.$

Áp dụng công thức $V = \frac{h}{3}(S + \sqrt{SS'} + S')$, với

$h = C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \sqrt{100^2 - (30\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{82},$

$S = 120^2, S' = 60^2.$

Ta có:

$V = \frac{10\sqrt{82}}{3}(120^2 + 120.60 + 60^2) = 84000\sqrt{82}$ (cm^3).

Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

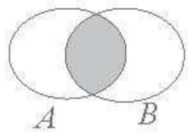
Chương IX. XÁC SUẤT

Bài 1. BIẾN CỐ GIAO VÀ QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu AB hoặc $A \cap B$ được gọi là ***biến cố giao*** của A và B.

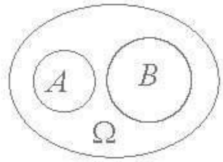


Hình 1

Chú ý: Tập hợp mô tả biến cố AB là giao của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B. Biến cố AB xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B xảy ra.

2. Hai biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B được gọi là ***xung khắc*** nếu A và B không đồng thời xảy ra.



Hình 2

Chú ý: Hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \varnothing$.

3. Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là ***độc lập*** nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Nhận xét: Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $\overline{A}$ và B; A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập.

4. Quy tắc nhân xác suất của hai biến cố độc lập

Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $P(AB) = P(A)P(B)$.

Chú ý: Từ quy tắc nhân xác suất ta thấy, nếu $P(AB) \neq P(A)P(B)$ thì hai biến cố A và B không độc lập.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 4. Hộp thứ hai chứa 6 viên bi cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 6. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 viên bi. Gọi A là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 viên bi bằng 8", B là biến cố "Tích các số ghi trên 2 viên bi là số chẵn".

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Hãy tính xác suất của biến cố AB.

c) Tính xác suất của biến cố A và biến cố B.

d) A và B có là hai biến cố độc lập không?

e) Hãy tìm một biến cố khác rỗng, xung khắc với biến cố A nhưng không xung khắc với biến cố B.

Giải

a) Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{(i; j) \mid i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, 1 \le i \le 4, 1 \le j \le 6\}$, trong đó kí hiệu $(i; j)$ là kết quả viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất được đánh số i, viên bi lấy ra từ hộp thứ hai được đánh số j.

b) Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 4 . 6 = 24$.

Khi đó biến cố $AB = \{(2; 6); (4; 4)\}$ nên số kết quả thuận lợi cho AB là $n(AB) = 2$.

Xác suất của biến cố AB là: $P(AB) = \dfrac{n(AB)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{24} = \dfrac{1}{12}$.

c) Ta có $A = \{(2; 6); (3; 5); (4; 4)\}$ nên số kết quả thuận lợi cho A là $n(A) = 3$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8}$.

Biến cố đối của biến cố B là $\overline{B}$: "Tích các số ghi trên hai viên bi là số lẻ". Biến cố $\overline{B}$ xảy ra khi cả hai viên bi lấy ra đều ghi số lẻ. Do đó, số kết quả thuận lợi cho biến cố $\overline{B}$ là $n(\overline{B}) = 2 . 3 = 6$.

Xác suất của biến cố $\overline{B}$ là $P(\overline{B}) = \dfrac{n(\overline{B})}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$.

Xác suất của biến cố B là $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \dfrac{3}{4}$.

d) Ta có $P(A)P(B) = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{32}$. Suy ra $P(AB) \ne P(A)P(B)$ nên A và B không là hai biến cố độc lập.

e) Gọi C là biến cố "Cả 2 viên bi lấy ra đều ghi số 2". Biến cố C xung khắc với A nhưng không xung khắc với B.

Bài 2. Một hộp chứa 99 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 99. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2", B là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 5.

a) Bình nói AB là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 10". Bình nói như vậy đúng hay sai? Tại sao?

b) Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

Giải

a) Bình nói đúng. Vì nếu số ghi trên thẻ vừa chia hết cho 2, vừa chia hết cho 5 khi và chỉ khi nó chia hết cho 10.

b) Từ 1 đến 99 có 49 số chia hết cho 2 nên xác suất của biến cố A là

$$P(A) = \frac{49}{99}.$$

Từ 1 đến 99 có 19 số chia hết cho 5 nên xác suất của biến cố B là

$$P(B) = \frac{19}{99}.$$

Từ 1 đến 99 có 9 số chia hết cho 10 nên xác suất của biến cố AB là

$$P(AB) = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}.$$

Vậy $P(A)P(B) \neq P(AB)$. Do đó, hai biến cố A và B là không độc lập.

Bài 3. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

a) Biết $P(A) = 0,3$ và $P(B) = 0,7$. Hãy tính xác suất của các biến cố AB, $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.

b) Biết $P(A) = 0,8$ và $P(AB) = 0,4$. Hãy tính xác suất của các biến cố B, $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.

Giải

a) Do A và B là hai biến cố độc lập nên xác suất của biến cố AB là

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,3 \,.\, 0,7 = 0,21.$$

Vì $\overline{A}$ là biến cố đối của A nên $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,7$. Do $\overline{A}$ và B là hai biến cố độc lập nên xác suất của biến cố $\overline{A}B$ là

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B) = 0,7 \,.\, 0,7 = 0,49.$$

Vì $\overline{B}$ là biến cố đối của B nên $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0,3$. Do $\overline{A}$ và $\overline{B}$ là hai biến cố độc lập nên xác suất của biến cố $\overline{A}\overline{B}$ là

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0,7 \,.\, 0,3 = 0,21.$$

b) Do A và B là hai biến cố độc lập nên

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0,4}{0,8} = 0,5.$$

Vì $\overline{A}$ là biến cố đối của A nên $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,2$. Do $\overline{A}$ và B là hai biến cố độc lập nên xác suất của biến cố $\overline{A}B$ là

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B) = 0,2 \,.\, 0,5 = 0,1$$

Vì $\overline{B}$ là biến cố đối của B nên $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0,5$. Do $\overline{A}$ và $\overline{B}$ là hai biến cố độc lập nên xác suất của biến cố $\overline{A}\overline{B}$ là

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0,2 \,.\, 0,5 = 0,1.$$

Bài 4. Minh gieo 1 hạt đậu và 1 hạt ngô. Xác suất nảy mầm của hạt đậu và hạt ngô lần lượt là 0,7 và 0,6. Biết rằng sự nảy mầm của hai hạt này là độc lập. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

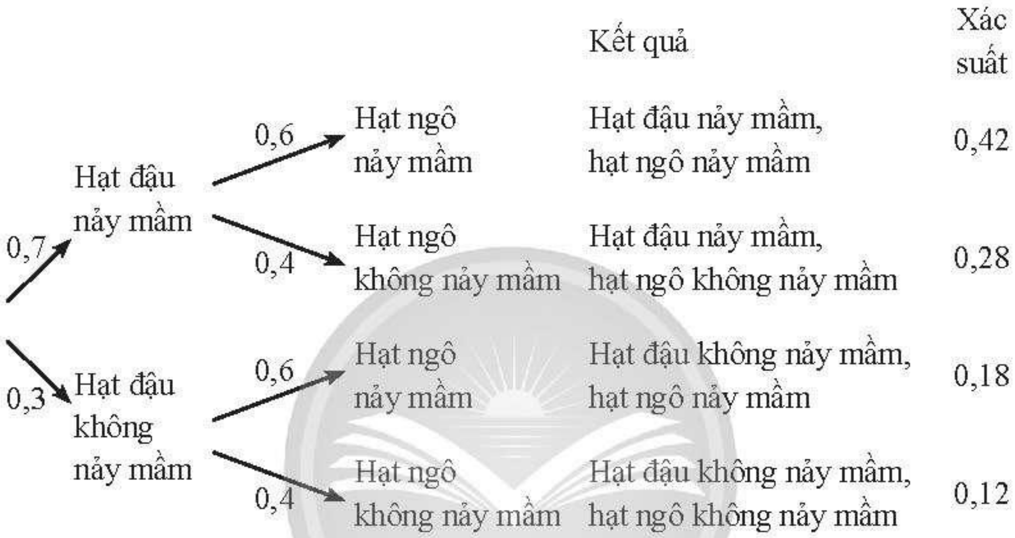
a) "Cả 2 hạt đều nảy mầm";

b) "Cả 2 hạt đều không nảy mầm";

c) "Hạt đậu nảy mầm, hạt ngô không nảy mầm".

Giải

Ta có sơ đồ hình cây như sau:



a) Xác suất cả 2 hạt đều nảy mầm là 0,42.

b) Xác suất cả 2 hạt đều không nảy mầm là 0,12.

c) Xác suất hạt đậu nảy mầm, hạt ngô không nảy mầm là 0,28.

C. BÀI TẬP

1. Một hộp chứa 4 bút xanh, 1 bút đen và 1 bút đỏ. Các cây bút có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên 3 cây bút từ hộp. Gọi A là biến cố "Có 1 cây bút đỏ trong 3 cây bút được lấy ra". Gọi B là biến cố "Có 1 cây bút đen trong 3 cây bút được lấy ra".

a) Hãy tìm một biến cố xung khắc với biến cố A nhưng không xung khắc với biến cố B.

b) Tính xác suất của các biến cố A, B và AB.

2. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Hộp thứ hai chứa 1 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 2 viên bi.

Gọi A là biến cố "Cả 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có cùng màu"; B là biến cố "Cả 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có cùng màu".

a) Minh nói AB là biến cố "Trong 4 viên bi lấy ra có 2 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ". Minh nói đúng hay sai? Tại sao?

b) So sánh $P(AB)$ với $P(A)P(B)$.

c) Hãy tìm một biến cố khác rỗng, xung khắc với cả biến cố A và biến cố B.

3. Một hộp chứa 50 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 4", B là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 6".

a) Giang nói AB là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 24". Giang nói như vậy đúng hay sai? Tại sao?

b) Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

4. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

a) Biết $P(\overline{A}) = 0,4$ và $P(B) = 0,1$. Hãy tính xác suất của các biến cố AB, $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.

b) Biết $P(A) + P(B) = 0,8$ và $P(AB) = 0,16$. Hãy tính xác suất của các biến cố B, $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.

5. Minh mua 2 bóng đèn. Theo một kết quả thống kê, tỉ lệ bị hỏng trong năm đầu sử dụng của loại bóng đèn Minh mua là 23%. Tính xác suất của các biến cố:

A: "Cả hai bóng đèn đều bị hỏng trong năm đầu sử dụng";

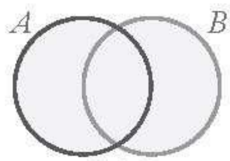
B: "Cả hai bóng đèn đều không bị hỏng trong năm đầu sử dụng".

Bài 2. BIẾN CỐ HỢP VÀ QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là ***biến cố hợp*** của A và B.



Hình 1

Chú ý: Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra. Tập hợp mô tả biến cố $A \cup B$ là hợp của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B.

2. Quy tắc cộng xác suất

Quy tắc cộng cho hai biến cố xung khắc:

Cho hai biến cố xung khắc A và B. Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Quy tắc cộng cho hai biến cố bất kì:

Cho hai biến cố A và B. Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Một hộp chứa 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 3 viên bi vàng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Cả 4 viên bi lấy ra đều có cùng màu";

b) "Có ít nhất 3 viên bi xanh trong 4 viên bi lấy ra".

Giải

a) Gọi A là biến cố "Cả 4 viên bi lấy ra đều có cùng màu xanh", B là biến cố "Cả 4 viên bi lấy ra có cùng màu đỏ". Vì chỉ có 3 viên bi màu vàng nên $A \cup B$ là biến cố "Cả 4 viên bi lấy ra có cùng màu". Do A và B là hai biến cố xung khắc nên

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{C_4^4}{C_{12}^4} + \frac{C_5^4}{C_{12}^4} = \frac{2}{165}.$$

b) Gọi C là biến cố "Có 3 viên bi xanh trong 4 viên lấy ra". Khi đó $A \cup C$ là biến cố "Có ít nhất 3 viên bi xanh trong 4 viên bi lấy ra". Do A và C là hai biến cố xung khắc nên

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{C_4^4}{C_{12}^4} + \frac{C_4^3 C_8^1}{C_{12}^4} = \frac{1}{15}.$$

Bài 2. Mai, Lan và 5 bạn cùng lớp xếp thành một hàng ngang theo thứ tự ngẫu nhiên. Tính xác suất của biến cố "Có ít nhất một trong hai bạn Mai và Lan đứng ở đầu hàng".

Giải

Số cách xếp 7 người thành một hàng ngang là 7!.

Gọi A là biến cố "Mai đứng ở đầu hàng", B là biến cố "Lan đứng ở đầu hàng".

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{2\,.\,6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

Xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{2\,.\,6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

Xác suất của biến cố "Hai bạn Lan và Mai đứng ở hai đầu hàng" là:

$$P(AB) = \frac{2\,.\,5!}{7!} = \frac{1}{21}.$$

Xác suất của biến cố "Có ít nhất một trong hai bạn Mai và Lan đứng ở đầu hàng" là:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} - \frac{1}{21} = \frac{11}{21}.$$

Bài 3. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

a) Biết $P(A) = 0{,}8$ và $P(AB) = 0{,}2$. Tính xác suất của biến cố $A \cup B$.

b) Biết $P(B) = 0{,}3$ và $P(A \cup B) = 0{,}6$. Tính xác suất của biến cố A.

Giải

a) Do A và B là hai biến cố độc lập nên

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25.$$

Xác suất của biến cố $A \cup B$ là $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}85$.

b) Do $P(A \cup B) = 0{,}6$ nên $P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}6$.

Theo giả thiết ta có $P(B) = 0{,}3$ nên $P(A) - P(AB) = 0{,}3$.

Do A và B là hai biến cố độc lập nên $P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}3P(A)$.

Suy ra $0{,}7P(A) = 0{,}3$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{0{,}3}{0{,}7} = \dfrac{3}{7}$.

Bài 4. Một nhóm gồm 8 học sinh nam và 12 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên 5 học sinh từ nhóm. Sử dụng sơ đồ hình cây, hãy tính xác suất của biến cố "Có ít nhất 3 học sinh nữ trong 5 học sinh vừa chọn".

Giải

Ta có sơ đồ hình cây:

Xác suất của biến cố "Có ít nhất 3 học sinh nữ trong 5 học sinh vừa chọn" là

$$\frac{C_{12}^3C_8^2 + C_{12}^4C_8^1 + C_{12}^5}{C_{20}^5} = \frac{682}{969}.$$

Bài 5. Một hộp chứa 20 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 20. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 37";

b) "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 6".

Giải

a) Gọi A là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ nhỏ hơn 4". Biến cố A xảy ra khi 2 thẻ được chọn ghi số 1 và 2. Do đó $P(A) = \dfrac{1}{C_{20}^2} = \dfrac{1}{190}$.

Gọi B là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lớn hơn 37". Biến cố B xảy ra khi 2 thẻ được chọn ghi số 20 và 18 hoặc 20 và 19. Do đó $P(B)=\frac{2}{C_{20}^2}=\frac{2}{190}$.

Do A và B là hai biến cố xung khắc nên xác suất của biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 37" là

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{190}.$$

b) Gọi D là biến cố "Trong 2 thẻ lấy ra có ít nhất 1 thẻ ghi số chia hết cho 6".

Do có 3 thẻ chia hết cho 6 nên xác suất của biến cố "Trong 2 thẻ lấy ra không có thẻ nào ghi số chia hết cho 6" là

$$P(\overline{D})=\frac{C_{17}^2}{C_{20}^2}=\frac{68}{95}.$$

Vậy xác suất của biến cố D là

$$P(D)=1-P(\overline{D})=\frac{27}{95}.$$

Gọi E là biến cố "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 6 nhưng không có thẻ nào ghi số chia hết cho 6". Biến cố E xảy ra khi trong hai thẻ lấy ra có một thẻ ghi số chẵn nhưng không chia hết cho 3 (có 7 thẻ như vậy) và thẻ còn lại ghi số chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 6 (có 3 thẻ như vậy).

Vậy xác suất của biến cố E là

$$P(E)=\frac{7 \,.\, 3}{C_{20}^2}=\frac{21}{190}.$$

Do D và E là hai biến cố xung khắc nên xác suất của biến cố "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 6" là

$$P(D \cup E) = P(D) + P(E) = \frac{15}{38}.$$

C. BÀI TẬP

1. Trong một cuộc gặp mặt có 63 đoàn viên tham dự, trong đó có 25 người đến từ miền Bắc, 19 người đến từ miền Nam và 19 người đến từ miền Trung.

a) Gặp ngẫu nhiên 1 đoàn viên trong cuộc gặp mặt, tính xác suất của biến cố "Đoàn viên được gặp đến từ miền Nam hoặc miền Trung".

b) Gặp ngẫu nhiên 2 đoàn viên trong cuộc gặp mặt, tính xác suất của biến cố "Hai đoàn viên được gặp cùng đến từ miền Bắc hoặc cùng đến từ miền Nam".

2. Một túi chứa 2 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 3 viên bi vàng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên 3 viên bi từ túi. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Cả 3 viên bi lấy ra đều có cùng màu";

b) "Có không quá 1 viên bi xanh trong 3 viên bi lấy ra";

c) "Có đúng hai màu trong 3 viên bi lấy ra".

3. Thanh có 4 tấm thẻ được đánh số 1, 3, 4, 7. Thanh lấy ra 3 trong 4 thẻ và xếp chúng thành một hàng ngang một cách ngẫu nhiên để tạo thành một số có 3 chữ số. Tính xác suất của biến cố A: "Số tạo thành chia hết cho 2 hoặc 3".

4. Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau.

a) Biết $P(A) = 0,4$ và $P(\overline{A}B) = 0,3$. Tính xác suất của các biến cố B và $A \cup B$.

b) Biết $P(\overline{A}B) = 0,4$ và $P(A \cup B) = 0,9$. Tính xác suất của các biến cố A, B và AB.

5. Một hộp chứa 10 quả bóng xanh và 10 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 5 quả bóng từ hộp. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của biến cố "Có ít nhất 3 quả bóng xanh trong 5 quả bóng lấy ra".

6. Châu gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất liên tiếp cho đến khi xuất hiện mặt 6 chấm thì dừng lại. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của biến cố "Châu phải gieo không quá 3 lần để xuất hiện mặt 6 chấm".

7. Trong một trò chơi, Dương chọn ra 5 số từ 100 số tự nhiên đầu tiên. Sau đó, người ta chọn ra ngẫu nhiên 3 số may mắn từ 100 số tự nhiên đầu tiên đó. Tính xác suất của các biến cố:

A: "Không có số may mắn nào trong 5 số Dương đã chọn";

B: "Có đúng 1 số may mắn trong 5 số Dương đã chọn".

8. Một hộp chứa 3 quả bóng xanh và một số quả bóng đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 2 quả bóng từ hộp. Biết rằng xác suất của biến cố "Lấy được 2 quả bóng đỏ" gấp 5 lần xác suất của biến cố "Lấy được 2 quả bóng xanh". Tính xác suất của biến cố "Lấy được 2 quả bóng có cùng màu".

9. Gieo ngẫu nhiên 3 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố A: "Tích số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc chia hết cho 15".

10. Một hộp chứa 40 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 40. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 76";

b) "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 10".

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A. TRẮC NGHIỆM

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu 1, 2.

Một lớp học gồm 50 bạn, trong đó có 20 bạn thích chơi bóng đá, 28 bạn thích chơi bóng rổ và 8 bạn thích chơi cả hai môn. Gặp ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp.

1. Xác suất của biến cố "Bạn được gặp thích chơi bóng đá hoặc bóng rổ" là

A. 0,16. B. 0,96. C. 0,48. D. 0,8.

2. Xác suất của biến cố "Bạn được gặp thích chơi bóng đá nhưng không thích chơi bóng rổ" là

A. 0,24. B. 0,12. C. 0,4. D. 0,16.

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu 3, 4.

Một hộp đựng 10 viên bi đỏ được đánh số từ 1 đến 10 và 15 viên bi xanh được đánh số từ 1 đến 15. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ trong hộp. Gọi A là biến cố "Viên bi lấy ra có màu đỏ", B là biến cố "Viên bi lấy ra ghi số chẵn".

3. Xác suất của biến cố AB là

A. 0,28. B. 0,2. C. 0,4. D. 0,48.

4. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

A. 0,4. B. 0,88. C. 0,48. D. 0,68.

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu 5, 6.

Xác suất thực hiện thành công một thí nghiệm là 0,7. Thực hiện thí nghiệm đó 2 lần liên tiếp một cách độc lập với nhau.

5. Xác suất của biến cố "Cả 2 lần thí nghiệm đều thành công" là

A. 0,7. B. 0,21. C. 0,49. D. 1,4.

6. Xác suất của biến cố "Lần thứ nhất thí nghiệm thất bại, lần thứ hai thí nghiệm thành công" là:

A. 0,21. B. 0,09. C. 1. D. 0,42.

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu 7, 8.

Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,4$ và $P(AB) = 0,2$.

7. Xác suất của biến cố B là

A. 0,5. B. 0,6. C. 0,7. D. 0,8.

8. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

A. 0,6. B. 0,7. C. 0,8. D. 0,9.

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu 9, 10.

Một hộp chứa 5 viên bi xanh và một số viên bi trắng có cùng kích thước và khối lượng. Biết rằng nếu chọn ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thì xác suất lấy được viên bi xanh là 0,25.

9. Nếu lấy ra 1 viên bi từ hộp thì xác suất của biến cố "Lấy được 1 viên bi trắng" là

A. 0,25. B. 0,5. C. 0,75. D. 0,95.

10. Số viên bi trắng trong hộp là

A. 20. B. 15. C. 4. D. 1.

B. TỰ LUẬN

1. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số. Tính xác suất của biến cố A: "Số được chọn chia hết cho 2 hoặc 9".

2. Trong một trò chơi, Trọng chọn ngẫu nhiên 5 số trong 20 số từ 1 đến 20, Thuỷ cũng chọn ra ngẫu nhiên 5 số trong 20 số đó. Tính xác suất của các biến cố

A: "Trọng và Thuỷ đều chọn số 1";

B: "Trọng và Thuỷ không chọn được số nào giống nhau".

3. Bốn bạn An, Bình, Châu, Dương đứng ngẫu nhiên thành một hàng ngang để chụp ảnh. Gọi A là biến cố "An đứng cạnh Bình", B là biến cố "Châu đứng ở đầu hàng". Tính xác suất của các biến cố AB và $A \cup B$.

4. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

a) Biết $P(A) = 0,8$ và $P(AB) = 0,2$. Tính xác suất của biến cố $A \cup B$.

b) Biết $P(B) = 0,3$ và $P(A \cup B) = 0,6$. Tính xác suất của biến cố A.

5. Một hộp đựng 10 tấm thẻ màu trắng được đánh số từ 1 đến 10 và 5 tấm thẻ màu xanh được đánh số từ 1 đến 5. Các tấm thẻ có cùng kích thước và khối lượng. Rút ra ngẫu nhiên 2 tấm thẻ từ trong hộp. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Hai thẻ lấy ra có cùng màu".

b) "Có ít nhất 1 thẻ màu trắng và ghi số chẵn trong hai thẻ lấy ra".

6. Tỉ lệ chuyến bay từ Hà Nội vào Cần Thơ bị chậm giờ là 5%. Tỉ lệ chuyến bay từ Cần Thơ về Hà Nội bị chậm giờ là 3%. Thảo bay từ Hà Nội vào Cần Thơ và bay trở lại Hà Nội sau một tháng. Biết rằng khả năng bị chậm giờ của hai chuyến bay đó là độc lập với nhau. Tính xác suất của biến cố "Hai chuyến bay đều không bị chậm giờ".

7. Một hộp chứa 1 viên bi xanh và một số viên bi trắng có cùng kích thước và khối lượng. Biết rằng nếu chọn ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thì xác suất lấy được 2 bi cùng màu là 0,6. Hỏi trong hộp có bao nhiêu viên bi trắng?

8. Một nhóm học sinh gồm 4 bạn nữ và một số bạn nam. Chọn ra ngẫu nhiên 2 bạn từ nhóm. Biết rằng xác suất để 2 bạn được chọn đều là nam là $\frac{1}{3}$. Tính xác suất của biến cố "Cả 2 bạn được chọn có cùng giới tính".

9. Chọn ngẫu nhiên 2 đỉnh của một hình lục giác đều có cạnh bằng 1. Tính xác suất của biến cố "Khoảng cách giữa hai đỉnh được chọn lớn hơn $\sqrt{3}$".

10. Chọn ngẫu nhiên 2 hình vuông trong bảng ô vuông kích thước 3×3. Gọi A là biến cố "Hai hình vuông được chọn có đúng 1 đỉnh chung", B là biến cố "Hai hình vuông được chọn có 1 cạnh chung". Tính xác suất của biến cố $A \cup B$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. BIẾN CỐ GIAO VÀ QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

1. a) Biến cố "Lấy ra được 1 bút đen và 2 bút xanh" xung khắc với biến cố A nhưng không xung khắc với biến cố B.

b) $P(A)=P(B)=\dfrac{C_1^1C_5^2}{C_6^3}=0,5.$

AB là biến cố "Lấy ra được 1 bút xanh, 1 bút đen và 1 bút đỏ.

Do đó $P(AB)=\dfrac{C_4^1C_1^1C_1^1}{C_6^3}=0,2.$

2. a) Minh nói sai vì nếu lấy ra từ hộp thứ nhất 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ; lấy ra từ hộp thứ hai 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ thì trong 4 viên bi lấy ra có 2 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ nhưng cả hai biến cố A và B đều không xảy ra.

b) $P(A)=\dfrac{C_4^2C_4^2}{C_5^2C_4^2}=0,6;\ P(B)=\dfrac{C_5^2C_3^2}{C_5^2C_4^2}=0,5;\ P(AB)=\dfrac{C_4^2C_3^2}{C_5^2C_4^2}=0,3.$

Vậy $P(A)P(B)=P(AB)$.

c) Gọi C là biến cố "Lấy ra từ mỗi hộp 1 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ". Biến cố C xung khắc với cả hai biến cố A và B.

3. a) Giang nói sai vì nếu lấy được thẻ ghi số 12 thì cả hai biến cố A và B xảy ra nhưng 12 không chia hết cho 24.

b) $P(A)=\dfrac{12}{50};\ \ P(B)=\dfrac{8}{50}.$

AB là biến cố "Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 12" nên $P(AB)=\dfrac{4}{50}.$

Vì $P(A)P(B)\neq P(AB)$ nên A và B không là hai biến cố độc lập.

4. a) $P(A)=1-P(\overline{A})=0,6; P(\overline{B})=1-P(B)=0,9.$

Do A và B là hai biến cố độc lập nên $P(AB)=P(A)P(B)=0,06.$

Do $\overline{A}$ và B là hai biến cố độc lập nên $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=0,04.$

Do $\overline{A}$ và $\overline{B}$ là hai biến cố độc lập nên $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0,36.$

b) $P(A)+P(B)=0,8$ và $P(AB)=P(A)P(B)=0,16$. Suy ra $P(A)=P(B)=0,4.$

$P(\overline{A})=1-P(A)=0,6; P(\overline{B})=1-P(B)=0,6.$

Do $\overline{A}$ và B là hai biến cố độc lập nên $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=0,24.$

Do $\overline{A}$ và $\overline{B}$ là hai biến cố độc lập nên $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0,36.$

5. Do tỉ lệ bóng bị hỏng trong năm đầu sử dụng là 23% nên xác suất 1 bóng bị hỏng trong năm đầu sử dụng là 0,23.

$$P(A) = 0{,}23 \,.\, 0{,}23 = 0{,}0529;\ P(B) = (1 - 0{,}23)(1 - 0{,}23) = 0{,}5929.$$

Bài 2. BIẾN CỐ HỢP VÀ QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT

1. a) $\dfrac{19+19}{63} = \dfrac{38}{63}$;   b) $\dfrac{C_{25}^2}{C_{63}^2} + \dfrac{C_{19}^2}{C_{63}^2} = \dfrac{157}{651}$.

2. a) $\dfrac{C_5^3}{C_{10}^3} + \dfrac{C_3^3}{C_{10}^3} = \dfrac{11}{120}$;   b) $\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3} + \dfrac{2C_8^2}{C_{10}^3} = \dfrac{14}{15}$.

c) Gọi A là biến cố "Có đúng hai màu trong 3 viên bi lấy ra". Biến cố đối của biến cố A là biến cố $B \cup C$ với B là biến cố "Cả 3 bi lấy ra đều có cùng màu" và C là biến cố "3 viên bi lấy ra có đủ cả 3 màu". Ta có

$$P(B) = \frac{11}{120};\ P(C) = \frac{1}{4}.$$

Do B và C là hai biến cố xung khắc nên $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \dfrac{41}{120}$.

Vậy $P(A) = 1 - \dfrac{41}{120} = \dfrac{79}{120}$.

3. Số các số có 3 chữ số có thể tạo thành là 24 số.

Gọi B là biến cố "Số tạo thành chia hết cho 2". Biến cố B xảy ra khi chữ số hàng đơn vị của số tạo thành là 4. Có thể xếp được 3 . 2 = 6 số chia hết cho 2. Do đó $P(B) = \dfrac{6}{24}$.

Gọi C là biến cố "Số tạo thành chia hết cho 3". Biến cố C xảy ra khi 3 chữ số của số tạo thành là 1; 4; 7. Có thể xếp được 3 . 2 = 6 số chia hết cho 3. Do đó $P(C) = \dfrac{6}{24}$.

Biến cố BC xảy ra khi số tạo thành chia hết cho 6. Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố BC. Do đó $P(BC) = \dfrac{2}{24}$.

Vậy $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC) = \dfrac{5}{12}$.

4. a) Ta có: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}6$.

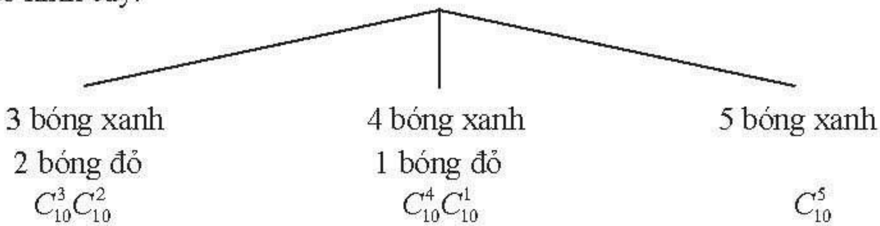
Do $\overline{A}$ và B là độc lập nên $P(B) = \dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = 0,5.$

Do A và B là độc lập nên

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,7.$

b) $P(A) = 0,5; P(B) = 0,8; P(AB) = 0,4.$

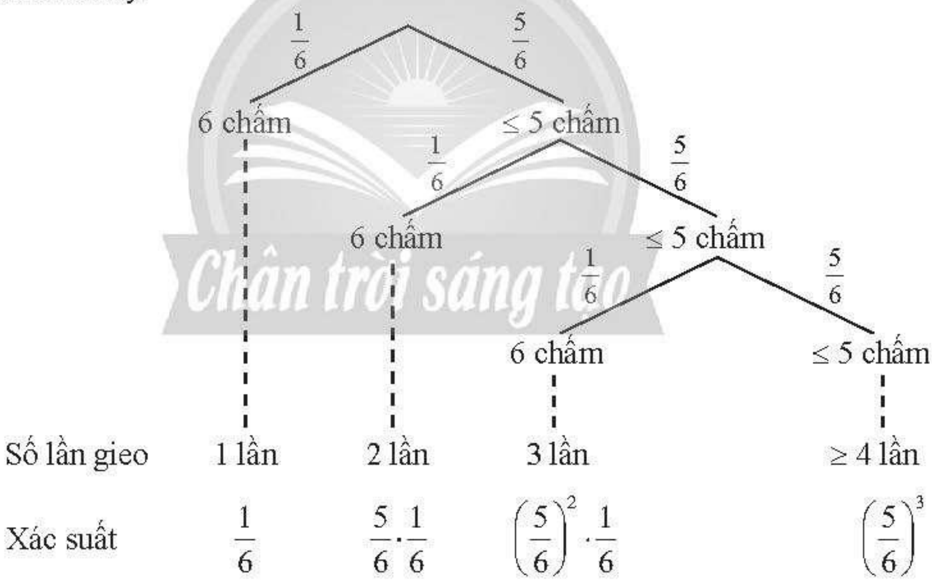
5. Sơ đồ hình cây:



Xác suất của biến cố "Có ít nhất 3 quả bóng xanh trong 5 quả bóng lấy ra" là

$$\frac{C_{10}^{3}C_{10}^{2} + C_{10}^{4}C_{10}^{1} + C_{10}^{5}}{C_{20}^{5}} = \frac{1}{2}.$$

6. Sơ đồ hình cây:



Xác suất của biến cố "Châu phải gieo không quá 3 lần để xuất hiện mặt 6 chấm" là

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{216}.$$

7. Biến cố A xảy ra khi 3 số may mắn nằm trong 95 số mà Dương không chọn. Do đó, xác suất của biến cố A là

$$P(A)=\frac{C_{95}^3}{C_{100}^3}\approx 0,856.$$

Biến cố B xảy ra khi trong 3 số may mắn, có 1 số Dương đã chọn, 2 số còn lại nằm trong 95 số mà Dương không chọn. Do đó, xác suất của biến cố B là

$$P(B)=\frac{C_5^1C_{95}^2}{C_{100}^3}\approx 0,138.$$

8. Gọi n là số bóng đỏ có trong hộp. Khi đó, tổng số bóng có trong hộp là $n+3$.

Xác suất lấy được 2 quả bóng xanh là: $\frac{C_3^2}{C_{n+3}^2}$.

Xác suất lấy được 2 quả bóng đỏ là: $\frac{C_n^2}{C_{n+3}^2}$.

Theo đề bài, ta có:

$$\frac{C_n^2}{C_{n+3}^2}=5.\frac{C_3^2}{C_{n+3}^2}\Leftrightarrow\frac{n(n-1)}{2}=15.$$

Do n là số tự nhiên nên $n=6$.

Do đó, xác suất của biến cố "Cả 2 quả bóng lấy ra đều có cùng màu" là

$$\frac{C_3^2}{C_{n+3}^2}+\frac{C_n^2}{C_{n+3}^2}=\frac{C_3^2}{C_9^2}+\frac{C_6^2}{C_9^2}=\frac{1}{2}.$$

9. Gọi B là biến cố "Tích số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc không chia hết cho 5", C là biến cố "Tích số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc không chia hết cho 3".

Khi đó, A là biến cố đối của biến cố $B\cup C$.

Ta có $P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)=\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{3}{4}$.

Do đó, xác suất của biến cố A: "Tích số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc chia hết cho 15" là:

$$P(A)=1-P(B\cup C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

10. a) Gọi A là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 76". Gọi A_1 là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4", A_2 là biến cố "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra lớn hơn 76".

Khi đó, ta có $A=A_1\cup A_2$.

Biến cố A_1 xảy ra khi 2 tấm thẻ được chọn ghi số 1 và 2. Do đó $P(A_1)=\frac{1}{C_{40}^2}$.

Biến cố A_2 xảy ra khi 2 tấm thẻ được chọn ghi số (37; 40), (38; 40), (39; 40) hoặc (38; 39). Do đó, $P(A_2) = \frac{4}{C_{40}^2}$.

Do A_1 và A_2 là hai biến cố xung khắc nên:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{156}.$$

b) Từ 1 đến 40 có 8 số chia hết cho 5; 20 số chia hết cho 2 và 4 số chia hết cho 10.

Gọi B là biến cố "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 10".

Gọi B_1 là biến cố "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra không chia hết cho 5", B_2 là biến cố "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra không chia hết cho 2".

Khi đó, B là biến cố đối của biến cố $B_1 \cup B_2$.

Ta có

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1B_2) = \frac{C_{32}^2}{C_{40}^2} + \frac{C_{20}^2}{C_{40}^2} - \frac{C_{16}^2}{C_{40}^2} = \frac{283}{390}.$$

Do đó, xác suất biến cố B "Tích các số ghi trên hai thẻ chia hết cho 10" là

$$P(B) = 1 - P(B_1 \cup B_2) = \frac{107}{390}.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A. TRẮC NGHIỆM

1. D	**2.** A	**3.** B	**4.** D	**5.** C
6. A	**7.** A	**8.** B	**9.** C	**10.** B

B. TỰ LUẬN

1. $\frac{5}{9}$.

2. a) $P(A) = \frac{1}{16}$; b) $\frac{1001}{5168}$.

3. $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(AB) = \frac{1}{3}$; $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

4. a) 0,85; b) $\frac{3}{7}$.

5. a) $\frac{11}{21}$; b) $\frac{4}{7}$.

6. 0,9215. **7.** 4.

8. $\frac{7}{15}$. **9.** $\frac{1}{5}$. **10.** $\frac{5}{9}$.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản

Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung

Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: TRẦN THANH HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ – NGUYỄN CHÍ CÔNG

Thiết kế sách: TRẦN THỊ THANH THẢO

Trình bày bìa: TỐNG THANH THẢO

Sửa bản in: TRẦN THANH HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ – NGUYỄN CHÍ CÔNG

Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

BÀI TẬP TOÁN 11 – TẬP HAI (Chân trời sáng tạo)

Mã số: G2BHYT002M23

In.........bản, (QĐ in số....) Khổ 17 x 24 cm.

Đơn vị in:........................

Cơ sở in:........................

Số ĐKXB: 10-2023/CXBIPH/38-2157/GD

Số QĐXB: ... ngày... tháng... năm 20...

In xong và nộp lưu chiểu tháng... năm 20...

Mã số ISBN: Tập 1: 978-604-0-35239-2

Tập 2: 978-604-0-35240-8

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ BÀI TẬP LỚP 11 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. Bài tập TOÁN 11, TẬP MỘT
2. Bài tập TOÁN 11, TẬP HAI
3. Bài tập NGỮ VĂN 11, TẬP MỘT
4. Bài tập NGỮ VĂN 11, TẬP HAI
5. TIẾNG ANH 11 Friends Global - Workbook
6. Bài tập LỊCH SỬ 11
7. Bài tập ĐỊA LÍ 11
8. Bài tập VẬT LÍ 11
9. Bài tập HOÁ HỌC 11
10. Bài tập SINH HỌC 11
11. Bài tập HOẠT ĐỘNG TRẢI NGHIỆM, HƯỚNG NGHIỆP 11 (1)
12. Bài tập HOẠT ĐỘNG TRẢI NGHIỆM, HƯỚNG NGHIỆP 11 (2)
13. Bài tập GIÁO DỤC KINH TẾ VÀ PHÁP LUẬT 11
14. Bài tập GIÁO DỤC QUỐC PHÒNG VÀ AN NINH 11

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

ISBN 978-604-0-35240-8

9 786040 352408

Giá: .... đ