ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 9-PHÂN SỐ

CHỦ ĐỀ 6: DÃY PHÂN SỐ THEO QUY LUẬT

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Lý thuyết nêu trong từng dạng bài tập ở phần II.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Tổng dãy phân số có dạng $\frac{k}{a.(a+k)}$.

1) Tính tổng : $S=\frac{1}{a_1.a_2}+\frac{1}{a_2.a_3}+\frac{1}{a_3.a_4}+...+\frac{1}{a_{n-1}.a_n}$

Với $a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=...=a_n-a_{n-1}=1$

Phương pháp:

Ta có: $\frac{1}{a_1.a_2}=\frac{a_2-a_1}{a_1.a_2}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2};$

$\frac{1}{a_2.a_3}=\frac{a_3-a_2}{a_2.a_3}=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3};$

.....

$\frac{1}{a_{n-1}.a_n}=\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}.a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n};$

Do đó:

$$S=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+...+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}$$

Bài 1: Tính tổng: $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{2014.2015}$

Lời giải:

Ta có:

$$A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{2014.2015}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+....+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}=1-\frac{1}{2015}=\frac{2014}{2015}$$

Vậy $A=\frac{2014}{2015}$

Bài 2: Tính tổng $B=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{100.101}$

Lời giải:

Ta có: $B=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{100.101}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$

Vậy $B=\frac{100}{101}$

Bài 3: Tính tổng $S=\frac{1}{9.10}+\frac{1}{10.11}+...+\frac{1}{2004.2005}$

Lời giải:

Ta có:

$$S=\frac{1}{9.10}+\frac{1}{10.11}+...+\frac{1}{2004.2005}$$

$$S=\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+...+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}=\frac{1}{9}-\frac{1}{2005}=\frac{1996}{18045}$$

Vậy $S=\frac{1996}{18045}$

2) Tính tổng : $S=\frac{1}{a_1.a_2}+\frac{1}{a_2.a_3}+\frac{1}{a_3.a_4}+...+\frac{1}{a_{n-1}.a_n}$

Với $a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=...=a_n-a_{n-1}=k>1$ thì:

Phương pháp:

Ta có: $\frac{k}{a_1.a_2}=\frac{a_2-a_1}{a_1.a_2}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}$;

$$\frac{k}{a_2.a_3}=\frac{a_3-a_2}{a_2.a_3}=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3};$$

.....

$$\frac{k}{a_{n-1}.a_n}=\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}.a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n};$$

Do đó:

$$S=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+...+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)$$

Bài 4: Tính tổng $A=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+...+\frac{2}{99.101}$

Lời giải:

Ta có:

$$A=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+...+\frac{2}{99.101}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{101}=\frac{1}{1}-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$$

Vậy $S=\frac{100}{101}$

Bài 5: Tính tổng $S=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+...+\frac{1}{97.99}$

Lời giải:

Ta có:

$$S=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+...+\frac{1}{97.99}$$

$$S=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+...+\frac{1}{97.99}$$

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+\frac{2}{7.9}+...+\frac{2}{97.99}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{99}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}.\frac{98}{99}$$

$$S=\frac{49}{99}$$

Vậy $S=\frac{49}{99}$

Bài 6: Tính nhanh tổng sau :

a) $A=\frac{3^2}{2.5}+\frac{3^2}{5.8}+\frac{3^2}{8.11}+\frac{3^2}{11.14}+\frac{3^2}{14.17}$

b) $B=\frac{4}{11.16}+\frac{4}{16.21}+\frac{4}{21.26}+...+\frac{4}{61.66}$

Lời giải:

a) Ta có :

$$A=\frac{3^2}{2.5}+\frac{3^2}{5.8}+\frac{3^2}{8.11}+\frac{3^2}{11.14}+\frac{3^2}{14.17}$$

$$A=\frac{3.3}{2.5}+\frac{3.3}{5.8}+\frac{3.3}{8.11}+\frac{3.3}{11.14}+\frac{3.3}{14.17}$$

$$A=3\left(\frac{3}{2.5}+\frac{3}{5.8}+\frac{3}{8.11}+\frac{3}{11.14}+\frac{3}{14.17}\right)$$

$$A=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{14}+\frac{1}{14}-\frac{1}{17}\right)$$

$$A=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{17}\right)$$

$$A=3.\frac{15}{34}$$

$$A=\frac{45}{34}$$

Vậy $S=\frac{45}{34}$

b) Ta có :

$$B=\frac{4}{11.16}+\frac{4}{16.21}+\frac{4}{21.26}+...+\frac{4}{61.66}$$

$$B=4\left(\frac{1}{11.16}+\frac{1}{16.21}+\frac{1}{21.26}+...+\frac{1}{61.66}\right)$$

$$\Rightarrow 5B=4\left(\frac{5}{11.16}+\frac{5}{16.21}+\frac{5}{21.26}+...+\frac{5}{61.66}\right)$$

$$5B=4\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{11}+\frac{1}{21}-\frac{1}{26}+...+\frac{1}{61}-\frac{1}{66}\right)$$

$$5B=4\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{66}\right)\Rightarrow 5B=4.\frac{55}{11.66}\Rightarrow B=\frac{4}{66}=\frac{2}{33}$$

Vậy $B=\frac{2}{33}$

Bài 7: Tính giá trị của biểu thức :

$$A=\left(\frac{3}{1.8}+\frac{3}{8.15}+\frac{3}{15.22}+...+\frac{3}{106.113}\right):\left(\frac{25}{50.55}+\frac{25}{55.60}+...+\frac{25}{95.100}\right)$$

Lời giải:

Đặt $B=\frac{3}{1.8}+\frac{3}{8.15}+\frac{3}{15.22}+...+\frac{3}{106.113}$

Ta có :

$$7B=3\left(\frac{7}{1.8}+\frac{7}{8.15}+\frac{7}{15.22}+...+\frac{7}{106.113}\right)$$

$$7B=3\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{22}+...+\frac{1}{106}-\frac{1}{113}\right)$$

$$7B=3\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{113}\right)=3.\frac{112}{113}\Rightarrow B=\frac{3.112}{7.113}=\frac{48}{113}$$

Đặt $C=\frac{25}{50.55}+\frac{25}{55.60}+...+\frac{25}{95.100}$

Ta có :

$$\frac{1}{5}C=\frac{5}{50.55}+\frac{5}{55.60}+...+\frac{5}{95.100}$$

$$\frac{1}{5}C=\frac{1}{50}-\frac{1}{55}+\frac{1}{55}-\frac{1}{60}+...+\frac{1}{95}-\frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{5}C=\frac{1}{50}-\frac{1}{100}=\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow C=\frac{1}{20}$$

Khi đó $A = B - C = \frac{48}{113} - \frac{1}{20} = \frac{847}{2260}$

Vậy $A = \frac{847}{2260}$.

Bài 8: Tính nhanh : $A = \frac{9}{9.19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + ... + \frac{1}{1999.2009}$

Lời giải:

$$A = \frac{9}{9.19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + ... + \frac{1}{1999.2009}$$

$$10A = 9\left(\frac{10}{9.19} + \frac{10}{19.29} + \frac{10}{29.39} + ... + \frac{10}{1999.2009}\right)$$

$$10A = 9\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{39} + ... + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2009}\right)$$

$$10A = 9\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2009}\right)$$

$$10A = 9.\frac{2000}{9.2009} = \frac{2000}{2009} \Rightarrow A = \frac{200}{2009}$$

Vậy $A = \frac{200}{2009}$.

Bài 9: Thực hiện phép tính : $A = 3.\frac{1}{1.2} - 5.\frac{1}{2.3} + 7.\frac{1}{3.4} - ... + 15.\frac{1}{7.8} - 17.\frac{1}{8.9}$

Lời giải:

Ta có :

$$A = 3.\frac{1}{1.2} - 5.\frac{1}{2.3} + 7.\frac{1}{3.4} - ... + 15.\frac{1}{7.8} - 17.\frac{1}{8.9}$$

$$A = \frac{3}{1.2} - \frac{5}{2.3} + \frac{7}{3.4} - ... + \frac{15}{7.8} - \frac{17}{8.9}$$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - ... + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right)$$

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ... + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$$

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{9}$$

$$A = \frac{8}{9}$$

Vậy $A=\frac{8}{9}$.

Bài 10: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A=\frac{1}{1.300}+\frac{1}{2.301}+\frac{1}{3.302}+...+\frac{1}{101.400}$ và

$B=\frac{1}{1.102}+\frac{1}{2.103}+\frac{1}{3.104}+...+\frac{1}{299.400}$

Lời giải:

Ta có:

$299A=\frac{299}{1.300}+\frac{299}{2.301}+\frac{299}{3.302}+...+\frac{299}{101.400}$

$299A=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{300}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{301}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{302}\right)+...+\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{400}\right)$

$299A=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{101}\right)-\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{301}+\frac{1}{302}+...+\frac{1}{400}\right)$

$101B=\frac{101}{1.102}+\frac{101}{2.103}+\frac{101}{3.104}+...+\frac{101}{299.400}$

$101B=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{102}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{103}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{104}\right)+...+\left(\frac{1}{299}-\frac{1}{400}\right)$

$101B=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{299}\right)-\left(\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\frac{1}{104}+...+\frac{1}{400}\right)$

$101B=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}...+\frac{1}{101}\right)-\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{301}+...+\frac{1}{400}\right)$

Khi đó $299A=101B\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{101}{299}$.

Bài 11: Rút gọn : $A=\frac{1}{100}-\frac{1}{100.99}-\frac{1}{99.98}-\frac{1}{98.97}-...-\frac{1}{3.2}-\frac{1}{2.1}$

Lời giải:

Ta có:

$$A=\frac{1}{100}-\frac{1}{100.99}-\frac{1}{99.98}-\frac{1}{98.97}-\ldots-\frac{1}{3.2}-\frac{1}{2.1}$$

$$A=\frac{1}{100}-\left(\frac{1}{100.99}+\frac{1}{99.98}+\frac{1}{98.97}+\ldots+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{2.1}\right)$$

$$A=\frac{1}{100}-\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots++\frac{1}{97.98}+\frac{1}{98.99}+\frac{1}{99.100}\right)$$

$$A=\frac{1}{100}-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{97}-\frac{1}{98}+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

$$A=\frac{1}{100}-\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

$$A=\frac{1}{100}-1+\frac{1}{100}=\frac{-49}{50}$$

Vậy $A=\frac{-49}{50}$.

Dạng 2: Tổng dãy phân số có mẫu là tích n số tự nhiên liên tiếp $(n\geq 3)$.

1) Tính tổng sau: $S=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Nhận xét đề bài:

+ Tử các số hạng đều là 1.

+ Mẫu các số hạng đều là tích ba số tự nhiên liên tiếp.

+ Số hạng tổng quát có dạng: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Ta có:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}.\frac{2}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}.\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

Do đó:

$$\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)$$

$$\frac{1}{2.3.4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)$$

.....

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được:

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

- Nhận xét kết quả:

Nếu mẫu là tích 3 số tự nhiên liên tiếp thì tổng bằng tích nghịch đảo của $(3-1)$ với hiệu nghịch đảo của tích hai thừa số có giá trị nhỏ nhất và nghịch đảo của tích hai thừa số có giá trị lớn nhất.

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Bài 1: Tính $A=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{37.38.39}$

Lời giải:

Ta có:

$$A=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{37.38.39}$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)+...+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{37.38}-\frac{1}{38.39}\right)$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{37.38}-\frac{1}{38.39}\right)$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{38.39}\right)$$

$$A=\frac{185}{741}$$

Vậy $A=\frac{185}{741}$.

Bài 2: Tính tổng $S=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{97.98.99}$

Lời giải:

Ta có:

$$S=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{97.98.99}\Rightarrow 2S=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+...+\frac{2}{97.98.99}$$

$$\Rightarrow 2S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+...+\frac{1}{98}\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)$$

$$\Rightarrow 2S=\frac{1}{2}.\frac{1}{1}-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{2}-\frac{1}{3}.\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.\frac{1}{3}-\frac{1}{4}.\frac{1}{5}+...+\frac{1}{98}.\frac{1}{97}-\frac{1}{98}.\frac{1}{99}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1}-\frac{1}{98.99}=\frac{2425}{4851}$$

$$\Rightarrow S=\frac{2425}{9702}$$

Vậy $A=\frac{2425}{9702}$.

2) Tính tổng sau: $S=\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

- Nhận xét đề bài:

+ Tử các số hạng đều là 1.

+ Mẫu các số hạng đều là tích bốn số tự nhiên liên tiếp.

+ Số hạng tổng quát có dạng: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

Ta có:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}.\frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}.\frac{(k+3)-k}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right]$$

Do đó:

$$\frac{1}{1.2.3.4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}\right)$$

$$\frac{1}{2.3.4.5}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}\right)$$

.....

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được:

$$S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

Bài 3: Tính $B=\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+...+\frac{1}{27.28.29.30}$

Lời giải:

Nhận xét: $\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}=\frac{3}{1.2.3.4};\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}=\frac{3}{2.3.4.5};...;\frac{1}{27.28.29}-\frac{1}{28.29.30}=\frac{3}{27.28.29.30}$

Ta có:

$$B=\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+...+\frac{1}{27.28.29.30}$$

$$\Rightarrow 3B=\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{28.29.30}=\frac{4059}{28.29.30}$$

$$\Rightarrow B=\frac{1353}{8120}$$

Vậy $A=\frac{1353}{8120}$.

Bài 4: Tính $D=\frac{18}{10.11.12.13}+...+\frac{18}{96.97.98.99}$

Lời giải:

Ta có:

$$D=\frac{18}{10.11.12.13}+...+\frac{18}{96.97.98.99}$$

$$D=6\left(\frac{1}{10.11.12}-\frac{1}{97.98.99}\right)$$

$$D=6.\frac{97.49.3-20}{97.98.99.20}$$

$$D=\frac{14239}{3136980}$$

Vậy $D=\frac{14239}{3136980}$.

Dạng 3. Tích dãy phân số theo quy luật

Bài 1: Tính tích.

a) $A=\frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}.\frac{4^2}{3.5}...\frac{20^2}{19.20}$ b) $B=\frac{1^2}{1.2}.\frac{2^2}{2.3}.\frac{3^2}{3.4}...\frac{10^2}{10.11}$

Lời giải:

a) Ta có:

$$A=\frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}.\frac{4^2}{3.5}...\frac{20^2}{19.20}=\frac{2.2}{1.3}.\frac{3.3}{2.4}.\frac{4.4}{3.5}...\frac{20.20}{19.20}=\frac{(2.3.4...20)(2.3.4...20)}{(1.2.3....19)(3.4.5...21)}=\frac{20.2}{21}=\frac{40}{21}$$

b) Ta có:

$$B=\frac{1^2}{1.2}.\frac{2^2}{2.3}.\frac{3^2}{3.4}...\frac{10^2}{10.11}=\frac{1.1}{1.2}.\frac{2.2}{2.3}.\frac{3.3}{3.4}...\frac{10.10}{10.11}=\frac{(1.2.3...10)(1.2.3...10)}{(1.2.3...10)(2.3.4...11)}=\frac{1}{11}$$

Bài 2: Tính tích: $C=\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3+4}\right)...\left(1-\frac{1}{1+2+3+...+2016}\right)$

Lời giải:

Ta có:

$$C=\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3+4}\right)...\left(1-\frac{1}{1+2+3+...+2016}\right)$$

$$C=\left(1-\frac{1}{\frac{(1+2).2}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\frac{(1+3).3}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\frac{(1+4)4}{2}}\right)...\left(1-\frac{1}{\frac{(1+2016).2016}{2}}\right)$$

$$C=\frac{2}{3}.\frac{5}{6}.\frac{9}{10}...\frac{2016.2017-2}{2016.2017}$$

$$C=\frac{4}{6}.\frac{10}{12}.\frac{18}{20}...\frac{2016.2017-2}{2016.2017}$$

$$C=\frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}...\frac{2015.2018}{2016.2017}$$

$$C=\frac{1004}{3009}$$

Vậy $C=\frac{1004}{3009}$

Bài 3: Tính: $A=\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{3^2}-1\right)\left(\frac{1}{5^2}-1\right)\left(\frac{1}{7^2}-1\right)...\left(\frac{1}{99^2}-1\right)$

Lời giải:

Ta có:

$$A=\frac{1}{2.3}.\frac{3}{2.5}.\frac{5}{2.7}...\frac{97}{2.99}=\frac{(1.3.5...97)}{2^{49}(3.5.7...99)}=\frac{1}{2^{49}.99}$$

Vậy $A=\frac{1}{2^{49}.99}$

Bài 4: Tính: $A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{400}\right)$

Lời giải:

Ta có:

$$A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{400}\right)$$

$$A=\frac{3}{4}.\frac{8}{9}.\frac{15}{16}\ldots\frac{399}{400}$$

$$A=\frac{1.3}{2.2}.\frac{2.4}{3.3}.\frac{3.5}{4.4}\ldots\frac{19.21}{20.20}$$

$$A=\frac{(1.2.3\ldots19)(3.4.5\ldots21)}{(2.3.4\ldots20)(2.3.4\ldots20)}$$

$$A=\frac{21}{20.2}$$

$$A=\frac{21}{40}$$

Vậy $A=\frac{21}{40}$

Bài 5: Tính:

a) $A=\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2018.2020}\right)$ b) $B=\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{100}\right)$

Lời giải:

a) Ta có:

$$A=\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2018.2020}\right)$$

$$A=\frac{2^2}{1.3}.\frac{3^2}{2.4}.\frac{4^2}{3.5}\ldots\frac{2019^2}{2018.2019}$$

$$A=\frac{(2.3.4\ldots2019)(2.3.4\ldots2019)}{(1.2.3\ldots2.18)(3.4.5\ldots2019)}$$

$$A=2.2019=4038$$

Vậy $A=4038$

b) Ta có:

$$B=\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

$$B=\left(\frac{5}{5}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{6}{6}-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(\frac{99}{99}-\frac{1}{99}\right)\left(\frac{100}{100}-\frac{1}{100}\right)$$

$$B=\frac{4}{5}.\frac{5}{6}\cdots\frac{98}{99}.\frac{99}{100}$$

$$B=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$$

Vậy $B=\frac{1}{25}$

Bài 6: Tính tích:

a) $C=\frac{2^2}{3}.\frac{3^2}{8}.\frac{4^2}{15}.\frac{5^2}{24}.\frac{6^2}{35}.\frac{7^2}{48}.\frac{8^2}{63}.\frac{9^2}{80}$

b) $D=\frac{8}{9}.\frac{15}{16}.\frac{24}{25}\cdots\frac{2499}{2500}.$

Lời giải:

a) Ta có:

$$C=\frac{2^2}{3}.\frac{3^2}{8}.\frac{4^2}{15}.\frac{5^2}{24}.\frac{6^2}{35}.\frac{7^2}{48}.\frac{8^2}{63}.\frac{9^2}{80}=\frac{2.2}{1.3}.\frac{3.3}{2.4}.\frac{4.4}{3.5}.\frac{5.5}{4.6}.\frac{6.6}{5.7}.\frac{7.7}{6.8}.\frac{8.8}{7.9}.\frac{9.9}{8.10}$$

$$=\frac{(2.3.4.5.6.7.8.9)(2.3.4.5.6.7.8.9)}{(1.2.3.4.5.6.7.8)(3.4.5.6.7.8.9.10)}=\frac{9.2}{10}=\frac{9}{5}$$

Vậy $C=\frac{9}{5}$

b) Ta có:

$$D=\frac{8}{9}.\frac{15}{16}.\frac{24}{25}\cdots\frac{2499}{2500}=\frac{2.4}{3.3}.\frac{3.5}{4.4}.\frac{4.6}{5.5}\cdots\frac{49.51}{50.50}=\frac{(2.3.4\ldots49)(4.5.6\ldots51)}{(3.4.5\ldots50)(3.4.5\ldots50)}=\frac{2.51}{50.3}=\frac{17}{25}$$

Vậy $D=\frac{17}{25}$

Bài 7: Tính giá trị của biểu thức: $A=\frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2015.2017}\right)$

Lời giải:

$$A=\frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)...\left(1+\frac{1}{2015.2017}\right)$$

$$A=\frac{1}{2}.\frac{2.2}{1.3}.\frac{3.3}{2.4}.\frac{4.4}{3.5}...\frac{2016.2016}{2015.2017}$$

$$A=\frac{1}{2}.\frac{(2.3.4...2016)(2.3.4...2016)}{(1.2.3...2015)(3.4.5...2017)}$$

$$A=\frac{1}{2}.\frac{2016}{1}.\frac{2}{2017}$$

$$A=\frac{2016}{2017}$$

$$A=\frac{2016}{2017}$$

Vậy

Bài 8: So sánh: $V=\frac{1}{2^{20}-1}$ và $U=\frac{1.3.5...39}{21.22.23...40}$

Lời giải:

$$U=\frac{1.3.5...39}{21.22.23...40}=\frac{1.3.5...37.39}{(21.23.25...39)(22.24.26...40)}=\frac{1.3.5...37.39}{(21.23.25...39).2^{10}(11.12.13...20)}$$

$$=\frac{1.3.5...37.39}{2^{10}(21.23.25...39).(11.13...19)(12.14...20)}=\frac{1.3.5...37.39}{2^{10}(11.13.55...39).2^5.(6.7.8.9.10)}$$

$$=\frac{1.3.5...37.39}{2^{15}(7.9.11...39).(6.8.10)}=\frac{1.3.5...37.39}{2^{15}(7.9....39).2^5.3.5}=\frac{1.3.5...37.39}{2^{20}.3.5.7...39}=\frac{1}{2^{20}}$$

Mà $\frac{1}{2^{20}}<\frac{1}{2^{20}-1}\Rightarrow U<V$

Dạng 4: Tính tổng dãy phân số có mẫu là lũy thừa các số tự nhiên.

Bài 1: Tính tổng sau**:** $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{2005}}$ (1)

Lời giải:

Cách 1: Ta thấy mỗi số hạng liền sau của tổng đều kém số hạng liền trước của nó 2 lần.

$$2S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{2004}}\ (2)$$

Trừ vế với vế của (2) cho (1) ta được $S=1-\frac{1}{2^{2005}}=\frac{2^{2005}-1}{2^{2005}}$

Cách 2: Ta có: $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{2006}}\quad(3)$

Trừ vế với vế của (1) cho (3) ta được: $s-\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{2006}}=\frac{2^{2005}-1}{2^{2006}}\Þ\frac{1}{2}S=\frac{2^{2005}-1}{2^{2006}}\Þ S=\frac{2^{2005}-1}{2^{2005}}$

Bài 2: Tính nhanh: $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^8}$

Lời giải:

Ta có: $3A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^7}\quad(1)$

$$A=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^7}\quad(2)$$

Lấy $(1)-(2)$ được: $2A=1-\frac{1}{3^8}=1-\frac{1}{6561}=\frac{6560}{6561}$

Do đó: $A=\frac{6560}{6561}$

Bài 3: Tính tổng sau: $A=\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+...+\frac{1}{7^{100}}$

Lời giải:

Ta có: $\frac{1}{7}A=\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^4}...+\frac{1}{7^{100}}+\frac{1}{7^{101}}$

$$A-\frac{1}{7}A=\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7^2}\right)+\left(\frac{1}{7^2}-\frac{1}{7^3}\right)+...+\left(\frac{1}{7^{100}}-\frac{1}{7^{101}}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7^{101}}\right)$$

$$\Þ\frac{6}{7}A=\frac{7^{100}-1}{7^{101}}\Þ A=\frac{7^{100}-1}{6.7^{100}}$$

Bài 4: Tính tổng: $G=\frac{3}{5}+\frac{3}{5^4}+\frac{3}{5^7}+...+\frac{3}{5^{100}}$

Lời giải:

Ta có:

$$G=\frac{3}{5}+\frac{3}{5^4}+\frac{3}{5^7}+...+\frac{3}{5^{100}}=3\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^7}+...+\frac{1}{5^{100}}\right)$$

Đặt $A=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^7}+...+\frac{1}{5^{100}}\right)\Rightarrow \frac{1}{5^3}A=\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{5^{10}}+...+\frac{1}{5^{103}}$

$$A-\frac{1}{125}A=\left(\frac{1}{5^4}-\frac{1}{5^4}\right)+\left(\frac{1}{5^7}-\frac{1}{5^7}\right)+...+\left(\frac{1}{5^{100}}-\frac{1}{5^{100}}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5^{103}}\right)$$

$$\frac{124.A}{125}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5^{03}}=\frac{5^{102}-1}{5^{103}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{5^{102}-1}{5^{100}.124}$$

Bài 5: Tính tổng: $C=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+...+\frac{1}{2^{99}}$

Lời giải:

Ta có: $\frac{1}{2^2}C=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+...+\frac{1}{2^{99}}+\frac{1}{2^{101}}$

$$C-\frac{1}{4}C=\frac{3}{4}C=\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^5}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{98}}-\frac{1}{2^{98}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{101}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}C=\frac{2^{100}-1}{2^{101}}\Rightarrow C=\frac{2^{100}-1}{3.2^{99}}$$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Tính giá trị biểu thức: $D=\frac{3^2}{2.5}+\frac{3^2}{5.8}+\frac{3^2}{8.11}+\frac{3^2}{11.14}+\frac{3^2}{14.17}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Hoằng Hóa năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$D=\frac{3^2}{2.5}+\frac{3^2}{5.8}+\frac{3^2}{8.11}+\frac{3^2}{11.14}+\frac{3^2}{14.17}$$

$$D=\frac{3.3}{2.5}+\frac{3.3}{5.8}+\frac{3.3}{8.11}+\frac{3.3}{11.14}+\frac{3.3}{14.17}$$

$$D=3.\left(\frac{3}{2.5}+\frac{3}{5.8}+\frac{3}{8.11}+\frac{3}{11.14}+\frac{3}{14.17}\right)$$

$$D=3.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{14}+\frac{1}{14}-\frac{1}{17}\right)=3.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{17}\right)=3.\frac{15}{34}=\frac{45}{34}$$

Vậy $D=\frac{45}{34}$

Bài 2: Tính hợp lí: $C=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{98.99.100}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Ba Vì năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$C=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{98.99.100}$$

$$\Rightarrow 2C=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+...+\frac{2}{98.99.100}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...\frac{1}{98.99}+\frac{1}{99.100}$$

$$=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{99.100}=\frac{50.99-1}{100.99}=\frac{4949}{9900}$$

$$\Rightarrow C=\frac{4949}{19800}$$

Bài 3: Thực hiện phép tính sau:

$$B=\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+...+\frac{1}{2015.2018}$$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Nghi Xuân năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$B=\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+...+\frac{1}{2015.2018}$$

$$B=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2.5}+\frac{3}{5.8}+\frac{3}{8.11}+...+\frac{3}{2015.2018}\right)$$

$$B=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+...+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2018}\right)$$

$$B=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2018}\right)$$

$$B=\frac{336}{2018}$$

Bài 4: Tính giá trị biểu thức: $C=\frac{5}{2.1}+\frac{4}{1.11}+\frac{3}{11.2}+\frac{1}{2.15}+\frac{13}{15.4}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện nga Sơn năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$C=\frac{5}{2.1}+\frac{4}{1.11}+\frac{3}{11.2}+\frac{1}{2.15}+\frac{13}{15.4}=\frac{5}{2}+\frac{4}{11}+\frac{3}{22}+\frac{1}{30}+\frac{13}{60}=\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{30}+\frac{13}{60}\right)+\left(\frac{4}{11}+\frac{3}{22}\right)$$

$$=\left(\frac{5.30}{2.30}+\frac{1.2}{30.2}+\frac{13.1}{60.1}\right)+\left(\frac{4.2}{11.2}+\frac{3}{22}\right)=\frac{150+12+13}{60}+\frac{11}{22}$$

$$=\frac{165}{60}+\frac{11}{22}=\frac{11}{4}+\frac{1}{2}=\frac{13}{4}$$

Vậy $C=\frac{13}{4}$

Bài 5: Tính: $C=\frac{-1}{20}+\frac{-1}{30}+\frac{-1}{42}+\frac{-1}{56}+\frac{-1}{72}+\frac{-1}{90}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Như Thanh năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$C=\frac{-1}{20}+\frac{-1}{30}+\frac{-1}{42}+\frac{-1}{56}+\frac{-1}{72}+\frac{-1}{90}$$

$$C=-\left(\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+\frac{1}{8.9}+\frac{1}{9.10}\right)$$

$$C=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$

$$C=-\frac{1}{4}+\frac{1}{10}=\frac{-3}{20}$$

Vậy $C=\frac{-3}{20}$

Bài 6: Tính hợp lí giá trị biểu thức sau: $B=\frac{2}{60.63}+\frac{2}{63.66}+\frac{2}{66.69}+...\frac{2}{117.120}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Nông Cống năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$B=\frac{2}{60.63}+\frac{2}{63.66}+\frac{2}{66.69}+...\frac{2}{117.120}$$

$$B=\frac{2}{3}.\left(\frac{3}{60.63}+\frac{3}{63.66}+\frac{3}{66.69}+...\frac{3}{117.120}\right)$$

$$B=\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{63}+\frac{1}{63}-\frac{1}{66}+\frac{1}{66}-\frac{1}{69}+...+\frac{1}{117}-\frac{1}{120}\right)$$

$$B=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{120}\right)$$

$$B=\frac{1}{180}$$

Vậy $C=\frac{1}{180}$

Bài 7: Tính giá trị các biểu thức:

a) $A=\left(2019-\frac{1}{2019}\right)\left(2018-\frac{1}{2019}\right)$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Nghĩa Đàn năm học 2018-2019)

Lời giải:

a) Ta có:

$$A = \left(2019 - \frac{1}{2019}\right) + \left(2018 - \frac{1}{2019}\right)$$

$$A = 2019 - \frac{1}{2019} - 2018 + \frac{1}{2019}$$

$$A = 2019 - 2018 - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019}$$

$$A = 1$$

Vậy $A = 1$

Bài 8: Thực hiện phép tính:

a) $B = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{16} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{400} - 1\right)$ b) $C = \dfrac{\frac{2010}{1} + \frac{20009}{2} + \frac{2008}{3} + \ldots + \frac{1}{2010}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{2011}}$

(Trích đề HSG Toán 6 thành phố Chí Linh năm học 2018-2019)

Lời giải:

a) Ta có:

$$B = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{16} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{400} - 1\right)$$

$$B = \frac{-3}{4} \cdot \frac{-8}{9} \cdot \frac{-15}{15} \ldots \frac{-399}{400}$$

$$B = -\frac{3.8.15 \ldots 399}{2^2.3^2.4^2 \ldots 20^2}$$

$$B = -\frac{1.3.2.4.3.5 \ldots 19.21}{2.2.3.3.4.4 \ldots 20.20}$$

$$B = -\frac{1.2.3 \ldots 19}{2.3.4 \ldots 20} \cdot \frac{3.4.5 \ldots 21}{2.3.4 \ldots 20}$$

$$B = -\frac{1}{20} \cdot \frac{21}{2} = -\frac{21}{40}$$

Vậy $B = -\frac{21}{40}$

b) Ta có:

$$\frac{2010}{1}+\frac{2009}{2}+\frac{2008}{3}+...+\frac{1}{2010}=\left(\frac{2009}{2}+1\right)+\left(\frac{2008}{3}+1\right)+\left(\frac{2007}{4}+1\right)+...+\left(\frac{1}{2010}+1\right)+1$$

$$=\frac{2011}{2}+\frac{2011}{3}+\frac{2011}{4}+...+\frac{2011}{2010}+\frac{2011}{2011}=2011.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2010}+\frac{1}{2011}\right)$$

Do đó

$$C=\frac{\frac{2010}{1}+\frac{20009}{2}+\frac{2008}{3}+...+\frac{1}{2010}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...\frac{1}{2011}}=\frac{2011\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...\frac{1}{2011}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...\frac{1}{2011}}=2011$$

Vậy $C=2011$.

Bài 9: Tính $A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{2018}\right)\left(1-\frac{1}{2019}\right)$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Thanh Trì năm học 2012018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{2018}\right)\left(1-\frac{1}{2019}\right)$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}...\frac{2017}{2018}.\frac{2018}{2019}=\frac{1}{2019}$$

Vậy $A=\frac{1}{2019}$

Bài 10: Cho $A=\frac{34}{7.13}+\frac{51}{13.22}+\frac{85}{22.37}+\frac{68}{37.49}$ và $B=\frac{39}{7.16}+\frac{65}{16.31}+\frac{52}{31.43}+\frac{26}{43.49}$

Tính $\frac{A}{B}$.

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Vĩnh Yên năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$A=\frac{34}{7.13}+\frac{51}{13.22}+\frac{85}{22.37}+\frac{68}{37.49}$$

$$A=\frac{17.2}{7.13}+\frac{17.3}{13.22}+\frac{17.5}{22.37}+\frac{17.4}{37.49}$$

$$A=\frac{17}{3}\left(\frac{3.2}{7.13}+\frac{3.3}{13.22}+\frac{3.5}{22.37}+\frac{3.4}{37.49}\right)$$

$$A=\frac{17}{3}\left(\frac{6}{7.13}+\frac{9}{13.22}+\frac{15}{22.37}+\frac{12}{37.49}\right)$$

$$A=\frac{17}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{22}+\frac{1}{22}-\frac{1}{37}+\frac{1}{37}-\frac{1}{49}\right)$$

$$A=\frac{17}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{49}\right)$$

Ta lại có:

$$B=\frac{39}{7.16}+\frac{65}{16.31}+\frac{52}{31.43}+\frac{26}{43.49}$$

$$B=\frac{13.3}{7.16}+\frac{13.5}{16.31}+\frac{13.4}{31.43}+\frac{13.2}{43.49}$$

$$B=\frac{13}{3}\left(\frac{3.3}{7.16}+\frac{3.5}{16.31}+\frac{3.4}{31.43}+\frac{3.2}{43.49}\right)$$

$$B=\frac{13}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{31}+\frac{1}{31}-\frac{1}{43}+\frac{1}{43}-\frac{1}{49}\right)$$

$$B=\frac{13}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{49}\right)$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{17}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{49}\right)}{\frac{13}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{49}\right)}=\frac{17}{13}$$

Vậy $\frac{A}{B}=\frac{17}{13}$.

Bài 11: Tính giá trị của biểu thức: $A=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^4}+...+\frac{1}{3^{199}}-\frac{1}{3^{200}}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Ngọc Lặc năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$3A = 3+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{198}}-\frac{1}{3^{199}}$$

$$3A+A = \left(3+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{198}}-\frac{1}{3^{199}}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^4}\ldots+\frac{1}{3^{199}}-\frac{1}{3^{200}}\right)= 5-\frac{1}{3^{200}}$$

$$4A = 5-\frac{1}{2^{200}} \Rightarrow A = \left(5-\frac{1}{2^{200}}\right):4$$

Bài 12: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết:

$$A = \frac{4}{7.31}+\frac{6}{7.41}+\frac{9}{10.41}+\frac{7}{10.57} \text{ và } B = \frac{7}{19.31}+\frac{5}{19.43}+\frac{3}{23.43}+\frac{11}{23.57}$$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Phú Xuyên năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{A}{5} = \frac{4}{35.31}+\frac{6}{35.41}+\frac{9}{50.41}+\frac{7}{50.57} = \frac{1}{31}-\frac{1}{35}+\frac{1}{35}-\frac{1}{41}+\frac{1}{41}-\frac{1}{50}+\frac{1}{50}-\frac{1}{57} = \frac{1}{31}-\frac{1}{57}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{7}{38.31}+\frac{5}{38.43}+\frac{3}{46.43}+\frac{11}{46.57} = \frac{1}{31}-\frac{1}{38}+\frac{1}{38}-\frac{1}{43}+\frac{1}{43}-\frac{1}{46}+\frac{1}{46}-\frac{1}{57} = \frac{1}{31}-\frac{1}{57}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{5} = \frac{B}{2} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{5}{2}.$$

Bài 13: Tính tổng $S = 1-\frac{11}{6}+\frac{19}{12}-\frac{29}{20}+\frac{41}{30}-\frac{55}{42}+\frac{71}{56}-\frac{89}{72}+\frac{109}{90}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Gia Lộc năm học 2018-2018)

Lời giải:

$$S = 1-\frac{11}{6}+\frac{19}{12}-\frac{29}{20}+\frac{41}{30}-\frac{55}{42}+\frac{71}{56}-\frac{89}{72}+\frac{109}{90}$$

$$S = 1 - 1 - \frac{5}{6} + 1 + \frac{7}{12} - 1 - \frac{9}{20} + 1 + \frac{11}{30} - 1 - \frac{13}{42} + 1 + \frac{15}{56} - 1 - \frac{19}{72} + 1 + \frac{19}{90}$$

$$S = 1 - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72} + \frac{19}{90}$$

$$S = 1 - \frac{2+3}{2.3} + \frac{3+4}{3.4} - \frac{4+5}{4.5} + \frac{5+6}{5.6} - \frac{6+7}{6.7} + \frac{7+8}{7.8} - \frac{8+9}{8.9} + \frac{9+10}{9.10}$$

$$S = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

Vậy $S = \frac{3}{5}$.

Bài 14: Tính tổng $S = \frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \frac{9}{4^2.5^2} + ... + \frac{19}{9^2.10^2}$

(Trích đề HSG Toán 6 Ninh Bình năm học 2018-2019).

Lời giải:

Ta có:

$$S = \frac{2^2 - 1^2}{1^2.2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2.3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2.4^2} + \frac{5^2 - 4^2}{4^2.5^2} + ... + \frac{10^2 - 9^2}{9^2.10^2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

Vậy $S = \frac{99}{100}$.

Bài 15: Hãy so sánh:

$A = 124\left(\frac{1}{1.1985} + \frac{1}{2.1986} + ... + \frac{1}{16.2000}\right)$ và $B = \frac{1}{1.17} + \frac{1}{2.18} + ... + \frac{1}{1984.2000}$

(Trích đề HSG Toán 6 huyện Ninh Giang năm học 2018-2019).

Lời giải:

Ta có:

$$A = 124\left(\frac{1}{1.1985} + \frac{1}{2.1986} + ... + \frac{1}{16.2000}\right)$$

$$= \frac{124}{1984}\left(1 - \frac{1}{1985} + ... + \frac{1}{16} - \frac{1}{2000}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{16}\right)\right] - \left(\frac{1}{1985} + \frac{1}{1986} + ... + \frac{1}{2000}\right)$$

$$B=\frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+...+\frac{1}{1984}-\frac{1}{17}-\frac{1}{18}-...-\frac{1}{1984}\right)-\left(\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$B=\frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]=A$$

Vậy $A=B$.

❣ HẾT ❣

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
https://www.vnteach.com
Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây
https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6