

Môn thi: TOÁN - BẢNG A

Thời gian: **150** phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Đặt $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$
và $P = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Chứng minh rằng: S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.

b) Cho $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ (với $n \in \mathbb{N}, n > 1$). Chứng minh A không phải là số chính phương.

Câu 2 (4,5 điểm).

a) Giải phương trình: $10\sqrt{x^3 + 1} = 3x^2 + 6$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 3 \\ y + \frac{1}{z} = 3 \\ z + \frac{1}{x} = 3 \end{cases}$$

Câu 3 (4,5 điểm).

a) Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$

b) Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ thỏa mãn $x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = x^2 + y^2 + z^2$

Câu 4 (4,5 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A. (M không trùng với B và C). Gọi N và P lần lượt là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB và AC.

a) Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

b) Khi $\angle BOC = 120^\circ$, xác định vị trí của điểm M để $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 (2,5 điểm).

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

--- Hết ---

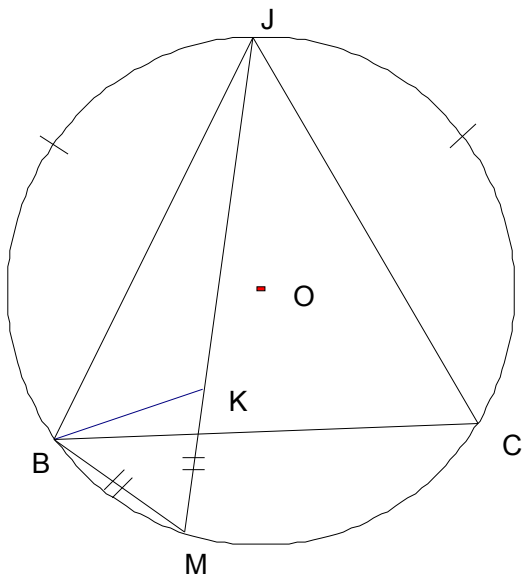
Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

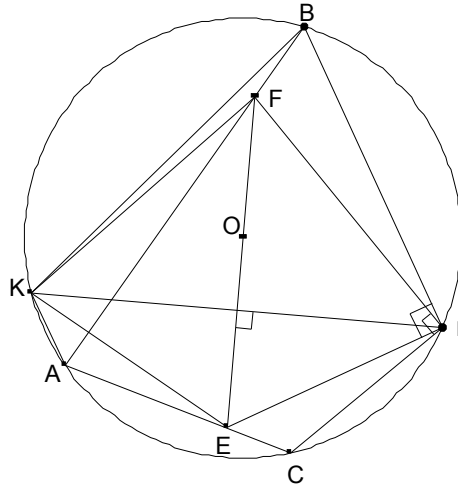
ĐÁP ÁN ĐỀ CHÍNH THỨC
Môn: TOÁN - Bảng A

Câu:	Nội dung
1.	
	Với $a \in \mathbb{Z}$ thì $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$ là tích 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3. Mà $(2.3)=1$
	$\Rightarrow a^3 - a : 6$
	$\Rightarrow S - P = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_n^3 - a_n) : 6$
	Vậy $S : 6 \Leftrightarrow P : 6$
	$n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2(n+1)^2.(n^2 - 2n + 2)$
	với $n \in \mathbb{N}, n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$
	và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$
	Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương $\Rightarrow$ đpcm
2.	
	$10\sqrt{x^3 + 1} = 3(x^2 + 2)$ $\Leftrightarrow 10\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)} = 3(x^2 + 2)$ điều kiện $x \geq -1$
	Đặt $\sqrt{x+1} = a \quad (a \geq 0)$ $\sqrt{x^2 - x + 1} = b \quad (b > 0)$
	Ta có: $10ab = 3a^2 + 3b^2$ $\Leftrightarrow (a-3b)(3a-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b \\ b=3a \end{cases}$
	Trường hợp 1: $a = 3b$ Ta có: $\sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2 - x + 1} \quad (1)$ $\Leftrightarrow 9x^2 - 9x + 9 = x + 1$ $\Leftrightarrow 9x^2 - 10x + 8 = 0$ $\Delta' = 25 - 9.8 < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm
	Trường hợp 2: $b = 3a$ Ta có: $3\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x + 1}$ $\Leftrightarrow 9(x+1) = x^2 - x + 1$

	$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + \sqrt{33} \text{ (TM)} \\ x_2 = 5 - \sqrt{33} \text{ (TM)} \end{cases}$ Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 5 \pm \sqrt{33}$
	$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 3 \\ y + \frac{1}{z} = 3 \\ z + \frac{1}{x} = 3 \end{cases}$ $\Rightarrow z = \frac{3x-1}{x}$ Từ (3) thay vào (2) $\Rightarrow 3xy + 3 = 8x + y$ (4) Từ (1) $\Rightarrow xy + 1 = 3y \Leftrightarrow 3xy + 3 = 9y$ (5) Từ (4) và (5) $\Rightarrow 8x + y = 9y \Rightarrow x = y$ Chứng minh tương tự : $y = z$ Từ đó $\Rightarrow x = y = z$ Thay vào (1) $\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$ $\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow$ hệ có 2 nghiệm $x = y = z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
3.	
	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ Áp dụng bất đẳng thức (với $x, y > 0$) Ta có: $\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right)$; $\frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z}$ Suy ra: $\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z} \right)$ (1) Tương tự: $\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{4z} \right)$ (2) $\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{2z} \right)$ (3) Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$ $\Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$

	$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{4}$ Dấu "=" xảy ra
	Áp dụng bất đẳng thức CôSi cho x^{2011}, x^{2011} và 2009 số 1 ta có: $\frac{x^{2011} + x^{2011} + 1 + 1 + \dots + 1}{2009} \geq 2011 \sqrt[2011]{(x^2)^{2011}}$ $\Rightarrow 2x^{2011} + 2009 \geq 2011x^2 \quad (1)$ Tương tự: $2y^{2011} + 2009 \geq 2011y^2 \quad (2)$ $2z^{2011} + 2009 \geq 2011z^2 \quad (3)$ Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{2(x^{2011} + y^{2011} + z^{2011}) + 3 \cdot 2009}{2011}$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ Giá trị lớn nhất của M là 3 khi và chỉ khi $x = y = z = 1$
4.	
	Gọi giao điểm của BH với AC là E AH với BC là F, CH với AB là I $\Rightarrow$ HECF là tứ giác nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{ACB} \quad (1)$ Mà $\widehat{ACB} = \widehat{AMB}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung) Ta có: $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ (Do M, N đối xứng AB) (2) Từ (1), (2) $\Rightarrow$ AHBN là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NAB} = \widehat{NHB} \quad (*)$ Mà $\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$ (Do M, N đối xứng qua AB $(**)$) Từ (*), $(**)$ $\Rightarrow \widehat{NHB} = \widehat{BAM}$ Chứng minh tương tự: $\widehat{PHC} = \widehat{MAC}$ $\Rightarrow \widehat{NHB} + \widehat{PHC} = \widehat{BAM} + \widehat{MAC} = \widehat{BAC}$ Mà $\widehat{BAC} + \widehat{HHE} = 180^\circ$

	$\Rightarrow \widehat{NHB} + \widehat{PHC} + \widehat{BHC} = 180^\circ \text{ (vì } \widehat{HHE} = \widehat{BHC} \text{)}$ $\Rightarrow N, H, P \text{ thẳng hàng}$
	Gọi J là điểm chính giữa của cung lớn BC $\widehat{BOC} = 120^\circ \Rightarrow \triangle BJC \text{ đều}$ Trên đoạn JM lấy K sao cho MK = MB $\Rightarrow \triangle JKB = \triangle CMB$
	
	$\Rightarrow BM + MC = JM$ $\frac{1}{BM} + \frac{1}{MC} \geq \frac{4}{BM + MC}$ $\Rightarrow \frac{1}{BM} + \frac{1}{MC} \geq \frac{4}{JM}$
	JM lớn nhất $\Leftrightarrow$ JM là đường kính (O) lúc đó M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Vậy $\frac{1}{BM} + \frac{1}{MC}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa cung nhỏ BC
5.	
	+ Khi $\widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} = 90^\circ$. $\Rightarrow$ F trùng với B, E trùng với C lúc đó EF là đường kính. $\Rightarrow$ EF đi qua điểm O cố định.



+ Khi $\angle BAC < 90^\circ \Rightarrow \angle BIC > 90^\circ$.

Gọi K là điểm đối xứng của I qua EF.

$$\Rightarrow \angle EIF = \angle EAF \text{ (cùng bù } \angle BIC)$$

$$\angle KFI = \angle EIF \text{ (Do I và K đối xứng qua EF)}$$

$$\Rightarrow \angle KFI = \angle EAF$$

$$\Rightarrow AKFE \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \angle KAB = \angle KEF \text{ (cùng chắn } \angle KF) \quad (1)$$

$$\angle IEF = \angle KEF \text{ (Do K và I đối xứng qua EF)} \quad (2)$$

$$\angle IEF = \angle BIK \text{ (cùng phụ } \angle KIE) \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \angle KAB = \angle BIK$$

$$\Rightarrow AKBI \text{ là tứ giác nội tiếp}$$

$$\Rightarrow K \in (O)$$

Mà EF là đường trung trực của KI $\Rightarrow E, O, F$ thẳng hàng.

+ Khi $\angle BAC > 90^\circ \Rightarrow \angle BIC < 90^\circ$ chứng minh tương tự.

Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm O cố định.

--- Hết ---