

MỤC LỤC

A. Đặt vấn đề

- I. Lý do chọn đề tàiTrang 01
- II. Mục đích nghiên cứu.....Trang 02
- III. Đối tượng nghiên cứu.....Trang 02

B. Giải quyết vấn đề

- I. Thực trạng vấn đề nghiên cứu.....Trang 03
- II. Cơ sở lý thuyết
 - 1. Phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề.....Trang 03
 - 2. Một số kiến thức cơ bản sử dụng trong đề tài.....Trang 04
- III. Giải pháp và tổ chức thực hiện
 - 1. Quy về một biến bằng phương pháp thế.....Trang 07
 - 2. Quy về một biến có sẵn trong bài toán.....Trang 09
 - 3. Quy về một biến bằng phương pháp đặt ẩn phụ.....Trang 12
- IV. Kết quả và kinh nghiệm rút ra.....Trang 21

C. Kết luận và đề xuấtTrang 23

A. ĐẶT VẤN ĐỀ

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI.

Như chúng ta đã biết, trong những năm gần đây ngành giáo dục đã có rất nhiều chủ trương để nâng cao chất lượng dạy học bằng nhiều hình thức và biện pháp như: đổi mới phương pháp dạy học theo hướng tích cực, dạy học lấy học sinh làm trung tâm, đổi mới kiểm tra đánh giá học sinh...

Trong công cuộc đổi mới căn bản và toàn diện nền giáo dục nước nhà, đổi mới phương pháp dạy học là một trong những nhiệm vụ quan trọng hàng đầu. Trong quá trình công tác, trải qua nhiều phương pháp dạy học tích cực tôi nhận thấy phương pháp dạy học “Phát hiện và giải quyết vấn đề” có nhiều ưu điểm cũng như phù hợp với công tác giảng dạy bộ môn toán ở trường phổ thông nói chung và dạy học giải bài tập toán nói riêng. Tuy nhiên để có thể thành công trong phương pháp dạy học “Phát hiện và giải quyết vấn đề” ngoài năng lực chuyên môn và năng lực sư phạm của mỗi giáo viên còn đòi hỏi ở người giáo viên phải đầu tư nhiều thời gian và thực sự tâm huyết.

Để có một bài giảng thu hút được học trò, giúp học trò phát triển tư duy về môn toán và dẫn dắt học trò tới niềm say mê tìm tòi sáng tạo, tôi cũng như bao giáo viên yêu nghề và yêu toán khác thường trăn trở với những khó khăn của học trò trong quá trình tiếp cận từng bài toán.

Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức luôn là bài toán có mặt ở hầu hết trong các kỳ thi học sinh giỏi và kỳ thi THPT quốc gia. Không những thế nó còn là bài toán hay và khó nhất trong các đề thi.

Trong chương trình giảng dạy bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất luôn là chủ đề hấp dẫn đối với người dạy lẫn người học. Việc giảng dạy để làm sao học sinh học tốt chủ đề này luôn là một vấn đề khó. Chủ đề này thường dành cho học sinh giỏi nên các bài toán đưa ra thường hay và khó.

Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất có nhiều phương pháp, và không có phương pháp nào là vạn năng để giải được mọi bài toán mà chỉ có những phương pháp giải được một nhóm các bài toán mà thôi. Một trong những phương pháp khá hiệu quả là dùng đạo hàm cho hàm nhiều biến, tư tưởng cơ bản là quy về một biến để khảo sát. Không có một thuật giải chi tiết nào cho phương pháp này mà chỉ thông qua ví dụ để học sinh rèn luyện để tự mình tìm ra cách giải quyết như thế nào trong từng bài toán cụ thể và từ đó tìm thấy sơ đồ giải riêng cho mình.

Vì những lí do trên tôi viết đề tài “ *Kỹ thuật quy về một biến trong các bài toán tìm GTLN, GTNN của một biểu thức* ” để giúp cho học sinh có một cách tư duy tốt hơn khi gặp dạng bài toán này.

II. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Bản thân nghiên cứu đề tài này nhằm mục đích:

- Chia sẻ với quý Thầy, Cô, các bạn đồng nghiệp và các em học sinh kinh nghiệm để giải quyết bài toán tìm GTNN, GTLN trong đề thi tuyển sinh Đại học.
- Bản thân nhằm rèn luyện chuyên môn nhằm nâng cao nghiệp vụ sư phạm.

III. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

- Học sinh khối 12 THPT ôn thi học sinh giỏi và thi THPT quốc gia
- Giáo viên giảng dạy môn Toán bậc THPT
- Phạm vi nghiên cứu của đề tài này bao gồm:
 - + Nhắc lại cách tìm GTNN, GTLN của hàm số thông qua một vài ví dụ.
 - + Hệ thống một số dạng bài toán tìm GTNN, GTLN của một biểu thức chứa hai biến bằng cách thế một biến qua biến còn lại.
 - + Hệ thống một số dạng bài toán tìm GTNN, GTLN của một biểu thức chứa hai biến bằng cách đặt ẩn phụ theo tính đối xứng $t = x + y$, $t = x^2 + y^2$ hoặc $t = xy$.
 - + Hệ thống một số dạng bài toán tìm GTNN, GTLN của một biểu thức chứa ba biến bằng cách đặt ẩn phụ hoặc thế hai biến qua một biến còn lại.
 - + Hệ thống một số dạng bài toán tìm GTNN, GTLN của một biểu thức chứa hai biến bằng cách đặt ẩn phụ theo tính đẳng cấp $t = \frac{x}{y}$.

B. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

I. THỰC TRẠNG VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

- Trường THPT Hoàng Hóa 4 đóng trên địa bàn vùng nông thôn khó khăn về kinh tế, việc học tập và phấn đấu của các em học sinh chưa thực sự được quan tâm từ các bậc học dưới THPT vì vậy kiến thức cơ sở về môn Toán của các em hầu hết tập trung ở mức độ trung bình.
- Khi chưa áp dụng những nghiên cứu trong đề tài để dạy học giải bài tập tìm GTLN và GTNN, các em thường thụ động trong việc tiếp cận bài toán và phụ thuộc nhiều vào những kiến thức được giáo viên cung cấp chứ chưa ý thức tìm tòi, sáng tạo cũng như tạo được niềm vui, sự hưng phấn khi giải toán.

- Kết quả khảo sát ở một số lớp: 12A1 và 12A4 trong phần giải bài tập toán về tìm GTLN và GTNN của hàm số cũng như qua tìm hiểu ở các giáo viên dạy bộ môn Toán, chỉ có khoảng 5%- 10% học sinh hứng thú với bài toán này.

II. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

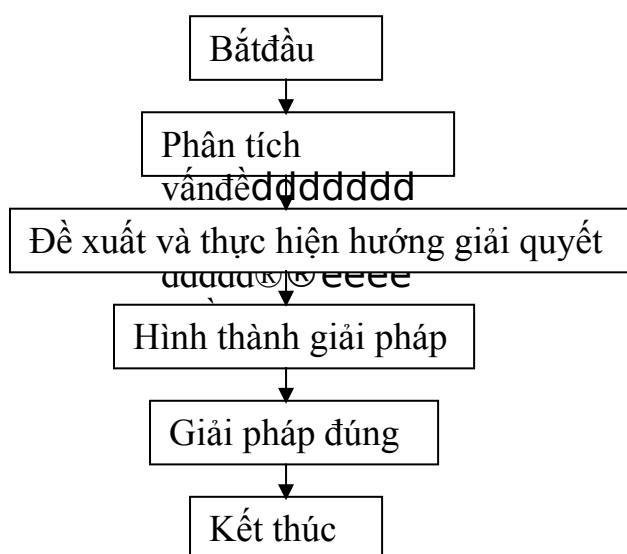
1. Phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề.

a. Bản chất.

Dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề là phương pháp dạy học trong đó giáo viên tạo ra những tình huống có vấn đề, điều khiển học sinh phát hiện vấn đề, hoạt động tự giác, tích cực, chủ động, sáng tạo để giải quyết vấn đề và thông qua đó chiếm lĩnh tri thức, rèn luyện kỹ năng và đạt được những mục đích học tập khác.

b. Quy trình thực hiện.

- Tìm cách giải quyết vấn đề thường được thực hiện theo sơ đồ:



c. Ưu điểm.

- Phương pháp này góp phần tích cực vào rèn luyện tư duy phê phán, tư duy sáng tạo cho học sinh. Trên cơ sở sử dụng vốn kiến thức và kinh nghiệm đã có học sinh sẽ xem xét, đánh giá, thấy được vấn đề cần giải quyết.
- Đây là phương pháp phát triển được khả năng tìm tòi, xem xét dưới nhiều góc độ khác nhau.
- Thông qua việc giải quyết vấn đề, học sinh lĩnh hội tri thức, kỹ năng và phương pháp nhận thức.

d. Hạn chế.

- Phương pháp này đòi hỏi người giáo viên phải đầu tư nhiều thời gian và công sức, phải có năng lực sư phạm tốt mới suy nghĩ để tạo ra được nhiều tình huống gợi vấn đề và hướng dẫn học sinh tìm tòi để phát hiện và giải quyết vấn đề

- Việc tổ chức tiết học hoặc một phần của tiết học theo phương pháp phát hiện và giải quyết vấn đề đòi hỏi phải có nhiều thời gian hơn so với các phương pháp thông thường.

2. Một số kiến thức cơ bản sử dụng trong đề tài.

2.1. Một số kiến thức cơ sở về đạo hàm

Trong mục này chúng tôi trình bày lại một số kiến thức về đạo hàm và một số công thức về đạo hàm.

• **Định lý 1.** Giả sử D là một khoảng hay hợp các khoảng.

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên D thì

$(u + v)' = u' + v'$	$(u - v)' = u' - v'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(ku)' = ku'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ với } v(x) \neq 0$	

• **Định lý 2.** Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

$(c)' = 0 (c \text{ là hằng số})$	
$(x)' = 1$	
$(x^n)' = nx^{n-1} (x \in \mathbb{R})$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0)$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x} (x > 0)$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \left(x^{-1} \frac{p}{2} + kp\right)$ $(\cot x)' = - (1 + \cot^2 x) \left(x^{-1} kp\right)$	$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$ $(\cot u)' = - u'(1 + \cot^2 u)$
--	--

2.2. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số

Trong mục này chúng tôi trình bày lại một số kiến thức về bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

• **Định nghĩa.** Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $D \subseteq \mathbb{R}$.

+) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ với mọi $x \in D$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là *giá trị lớn nhất* của hàm số f trên D , kí hiệu là $M = \max_{x \in D} f(x)$.

+) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \geq f(x_0)$ với mọi $x \in D$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là *giá trị nhỏ nhất* của hàm số f trên D , kí hiệu là $m = \min_{x \in D} f(x)$.

• **Nhận xét.** Như vậy, muốn chứng tỏ rằng số M (hoặc m) là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp D cần chỉ rõ:

+) $f(x) \leq M$ (hoặc $f(x) \geq m$) với mọi $x \in D$;

+) Tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$ (hoặc $f(x_0) = m$).

• **Nhận xét.** Người ta đã chứng minh được rằng hàm số liên tục trên một đoạn thì đạt được giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn đó.

Trong nhiều trường hợp, có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn mà không cần lập bảng biến thiên của nó.

Quy tắc tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $[a; b]$ như sau:

1. Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

2. Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.

3. So sánh các giá trị tìm được. Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của f trên đoạn $[a; b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của f trên đoạn $[a; b]$.

2.3. Một số thí dụ tìm GTNN, GTLN của hàm số

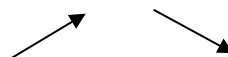
Trong mục này chúng tôi trình bày một số ví dụ tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2003)

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

Lời giải. Tập xác định $D = [-2; 2]$, $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có $\min_{x \in [-2; 2]} f(x) = f(-2) = -2$ và $\max_{x \in [-2; 2]} f(x) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Thí dụ 2. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2004)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[\frac{1}{e^3}; e^3]$

Lời giải. Ta có $y' = \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$

Từ đó có bảng biến thiên :

Vậy $\max_{x \in [\frac{1}{e^3}; e^3]} y = y(e^2) = \frac{4}{e^2} \Leftrightarrow x = e^2$

và $\min_{x \in [\frac{1}{e^3}; e^3]} y = y(1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$



III. GIẢI PHÁP VÀ TỔ CHỨC THỰC HIỆN

Như vậy chúng ta thấy rằng việc tìm GTNN, GTLN của hàm số khá đơn giản. Việc chuyển bài toán tìm GTNN, GTLN của một biểu thức không ít hơn hai biến sang bài toán tìm GTNN, GTLN của hàm số chứa một biến sẽ giúp chúng ta giải được bài toán tìm GTNN, GTLN của một biểu thức.

1. Quy về một biến bằng phương pháp thế

Trong phần này tôi trình bày một số dạng bài toán tìm GTNN, GTLN của biểu thức chứa hai biến bằng cách thế một biến qua biến còn lại. Từ đó xét hàm số và tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

Thí dụ 1. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$$

- **Phân tích và tìm tòi lời giải.**

Do giả thiết là mối liên hệ bậc nhất đối với x và y nên có thể rút ẩn x theo y (hoặc y theo x) để thế vào P

- **Lời giải.**

Từ giả thiết $x, y > 0, x + y = 1$ ta có $y = 1 - x, 0 < x < 1$.

Khi đó ta có $P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}}, f'(x) = \frac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}} - \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra $\min P = \min_{x \in (0,1)} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Thí dụ 2. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $y \neq 0, x^2 + x = y + 12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + x + 2y + 17$.

• **Phân tích và tìm tòi lời giải.**

Biểu thức P có chứa 2 biến x và y, muốn quy về một biến ta phải quy về biến x bằng cách thế y theo biểu thức chứa x từ giả thiết vào P để khảo sát.

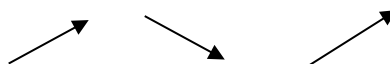
• **Lời giải.**

Từ giả thiết $y \neq 0, x^2 + x = y + 12$ ta có $y = x^2 + x - 12$ và $x^2 + x - 12 \neq 0$ hay $-4 \neq x \neq 3$. Khi đó $P = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7, x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}$.

Ta có $f'(x) = 3(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có $\min_{x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}} f(x) = f(1) = -12$, $\max_{x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}} f(x) = f(-3) = 20$.

Do đó $\min P = -12$ đạt được khi $x = 1, y = -10$ và $\max P = 20$ đạt được khi $x = -3, y = -6$ hoặc $x = 3, y = 0$.

Nhận xét. Qua các thí dụ này cho ta một kỹ thuật giảm biến khi tìm GTNN, GTLN của biểu thức hai biến bằng cách thế một biến qua biến còn lại và sử dụng các giả thiết để đánh giá biến còn lại. Từ đó tìm GTNN, GTLN của hàm số chứa một biến bị chặn.

Bài tập tương tự

Bài 1. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^3 + y^3 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Bài 2. Cho $x, y \geq 0$ thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$

Bài 3. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$

Bài 4. Cho $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + 3(x^2 - y^2) + 3(x + y)$

Bài 5. Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $0 < a, b \leq 4$, $a + b \leq 7$ và $2 \leq x \leq 3 \leq y$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2x^2 + y^2 + 2x + y}{xy(a^2 + b^2)}$

Bài 6. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^3 \leq y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 8x + 16$.

Bài 7. Cho $x, y \in (0, 1)$ thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^x + y^y$.

2. Quy về một biến có sẵn trong bài toán

Thí dụ 3. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $2x + 4y + 7z = 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

- **Phân tích và tìm tòi lời giải.**

Biểu thức P có chứa 3 biến để làm giảm số biến thì từ giả thiết ta rút biến z theo x và y sau đó thay vào P rồi sau đó sử dụng đánh giá để chỉ còn biến x .

- **Lời giải.**

Từ giả thiết ta có: $z = \frac{2x + 4y}{2xy - 7}$, do $x, y, z > 0$ nên $2xy - 7 > 0$.

$$\text{Khi đó: } P = x + y + \frac{2x + 4y}{2xy - 7} = x + \frac{11}{2x} + \left(y - \frac{7}{2x} \right) + \left(\frac{2x + 4y}{2xy - 7} - \frac{2}{x} \right) =$$

$$=x + \frac{11}{2x} + \left(\frac{2xy-7}{2x} + \frac{2x^2+14}{x(2xy-7)} \right) \geq x + \frac{11}{2x} + \frac{2\sqrt{x^2+7}}{x}$$

Xét hàm số: $f(x) = x + \frac{11}{2x} + \frac{2\sqrt{x^2+7}}{x}, x \in (0; +\infty)$

Ta có:

$$f'(x) = 1 - \frac{11}{2x^2} + 2 \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}x - \sqrt{x^2+7}}{x^2} = \frac{(\sqrt{x^2+7}-4)(2x^2+8\sqrt{x^2+7}+21)}{2x^2\sqrt{x^2+7}} = 0 \Rightarrow x=3$$

Lập BBT của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta suy ra: $f(x) \geq f(3) = \frac{15}{2}$.

Vậy GTNN của P là $\frac{15}{2} \Leftrightarrow x=3; y=\frac{5}{2}; z=2$.

Thí dụ 4. (Đề thi HSG Hải Dương 2015). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $y+z=x(y^2+z^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải.**

Biểu thức P có chứa 3 biến và vai trò của hai biến y và z là như nhau. Do đó ta quy biểu thức P về biến x bằng cách sử dụng sử dụng bất đẳng thức Cauchy và Bunhiacopsky.

• **Lời giải.**

Theo bất đẳng thức bunhiacopsky ta có: $x(y+z)^2 \leq 2x(y^2+z^2)$

$$\Leftrightarrow x(y+z)^2 \leq 2(y+z) \Rightarrow y+z \leq \frac{2}{x}.$$

Theo bất đẳng thức côsi ta có:

$$(1+y)(1+z) \leq \frac{1}{4}(2+y+z)^2 \Leftrightarrow (1+y)(1+z) \leq \frac{1}{4}\left(2+\frac{2}{x}\right)^2 \Leftrightarrow (1+y)(1+z) \leq \frac{(1+x)^2}{x^2}$$

Lại theo BĐT côsi ta có: $P \geq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+y)(1+z)} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2x^2}{(1+x)^2} + \frac{4x^2}{(1+x)^3} \Leftrightarrow P \geq \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 1}{(1+x)^3}$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{10x - 2}{(1+x)^4} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

Lập bảng biến thiên ta thấy $P \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{91}{108}$

Vậy GTNN của biểu thức là $P = \frac{91}{108} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}; y = z = 5$

Thí dụ 5.(Đề thi HSG Thanh Hóa 2016). Cho 3 số thực dương x, y, z thay đổi, thỏa mãn $x + y + 1 = z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x^3}{x + yz} + \frac{y^3}{y + xz} + \frac{z^3}{z + xy} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{1+xy+x+y}}.$$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải.**

Biểu thức P có chứa 3 biến và vai trò của hai biến x và y là như nhau .
Do đó ta quy biểu thức P về biến z bằng cách sử dụng sử dụng bất đẳng thức Cauchy

• **Lời giải.**

Ta có $x, y, z > 0$ nên $(1+x)(1+y) \leq \frac{(x+y+2)^2}{4} = \frac{(z+1)^2}{4}$ dấu = xảy ra khi $x = y$

Lại có $1 + xy + x + y = (1+x)(1+y)$ và $2xy \leq x^2 + y^2$ dấu = xảy ra khi $x = y$

Khi đó ta có $P = \frac{x^4}{x^2 + xyz} + \frac{y^4}{y^2 + xyz} + \frac{z^3}{x + y + 1 + xy} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{(1+x)(1+y)}}$

$$P \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2) + 2xyz} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{(1+x)(1+y)}}$$

$$P \geq \frac{(x^2 + y^2)}{1+z} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{(1+x)(1+y)}}$$

$$\geq \frac{(x+y)^2}{2(1+z)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{(1+x)(1+y)}} \geq$$

$$\geq \frac{(x+y)^2}{2(1+z)} + \frac{4z^3}{(z+1)^2} + \frac{28}{(z+1)^2} = \frac{(z-1)^2}{2(1+z)} + \frac{4z^3 + 28}{(z+1)^2} = \frac{9z^3 - z^2 - z + 57}{(z+1)^2}$$

Xét hàm $f(z) = \frac{9z^3 - z^2 - z + 57}{(z+1)^2}, z > 1$

Ta có $f'(z) = \frac{(3z-5)(3z^2+14z+23)}{(z+1)^3}$, $z > 1$ $f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{5}{3}$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(z)$ ta nhận được $\min_{z \in (1; +\infty)} f(z) = f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{53}{8}$

Vậy GTNN của P bằng $\frac{53}{8}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{5}{3}$.

3. Quy về một biến bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Dạng 1: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức chứa 2 biến có tính chất đối xứng

Trong phần này chúng tôi trình bày một số dạng bài toán tìm GTNN, GTLN của biểu thức chứa hai biến mà giả thiết hoặc biểu thức đó thể hiện tính đối xứng. Từ đó bằng phép đặt ẩn phụ ta chuyển về bài toán tìm G của hàm số.

Thí dụ 6. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x + y + 1 = 1$ và $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{x + y + 1}$.

- **Phân tích và tìm lời giải.**

Biểu thức P có chứa 2 biến và vai trò của hai biến x và y là như nhau. Do đó ta quy biểu thức P về một biến bằng cách đặt ẩn phụ $t = x + y$ hoặc $t = xy$, tuy nhiên do giả thiết bài toán nếu đặt $t = xy$ thì khi thế vào biểu thức P phức tạp hơn rất nhiều.

- **Lời giải.**

Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết: $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$

ta có $(x + y)^2 - xy = (x + y) + 1$ hay $xy = t^2 - t - 1$.

Áp dụng bất đẳng thức $(x + y)^2 \geq 4xy$ suy ra $t^2 - 4t - 4 \leq 0$ hay $-\frac{2}{3} \leq t \leq 2$.

Khi đó $P = \frac{t^2 - t - 1}{t + 1}$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - t - 1}{t + 1}$, $f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t + 1)^2}$, $f'(t) = 0$

ở $t = 0$ hoặc $t = -2$ (loại).

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có $\min P = \min_{t \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right]} f(t) = f(0) = -1$ đạt được khi $(x; y) = (-1; 1)$ hoặc $(x; y) = (1; -1)$ và $\max P = \max_{t \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right]} f(t) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = (2) = \frac{1}{3}$ đạt được khi $x = y = -\frac{1}{3}$ hoặc $x = y = 1$.

Thí dụ 7. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2009)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$ với x, y là các số thỏa mãn $(x + y)^3 + 4xy^3 \geq 2$.

• **Phân tích và tìm tòi lời giải.**

Biểu thức A có chứa 2 biến và vai trò của hai biến x và y là như nhau. Do đó ta quy biểu thức A về một biến bằng cách đặt ẩn phụ $t = x + y$ hoặc $t = xy$, tuy nhiên do giả thiết bài toán nếu đặt $t = xy$ hoặc $t = x + y$ thì khi thế vào biểu thức P xuất hiện bậc 4 phức tạp hơn rất nhiều. Do đó ta chọn cách đặt $t = x^2 + y^2$

• **Lời giải.**

Dựa vào bất đẳng thức hiển nhiên: $(x + y)^2 \geq 4xy$ nên

$$(x + y)^3 + 4xy^3 \geq 2 \Leftrightarrow (x + y)^3 + (x + y)^2 \geq (x + y)^3 + 4xy^3 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^3 + (x + y)^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + y) - 1 \leq \frac{(x + y)^2}{4} \Leftrightarrow (x + y) - 1 \leq \frac{(x + y)^2}{4} \quad (1)$$

Do $(x + y)^2 + (x + y) + 2 = \frac{1}{4}(x + y) + \frac{1}{2} + \frac{7}{4} > 0$ và từ (1) suy ra: $x + y \geq 1$.

Vậy nếu cặp $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $x + y \geq 1$ (2).

Ta biến đổi A như sau:

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$= \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^4 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 1 \quad (3)$$

Do $x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2}$ nên từ (3) suy ra:

$$A \geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 = \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$$

Vì $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2}$ nên từ (2) ta có: $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$.

Đặt $f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$ với $t = x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$. Ta có: $f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 > 0, \forall t \geq \frac{1}{2}$.

Suy ra: $\min_{t \geq \frac{1}{2}} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$ (4)

Từ (4) suy ra $A \geq \frac{9}{16}$. Mặt khác dễ thấy khi $x = y = \frac{1}{2}$ thì $A = \frac{9}{16}$.

Vậy $\min A = \frac{9}{16}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Thí dụ 8. (Đề thi tuyển sinh Đại học B – 2011)

Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} - 9\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$

• Phân tích và tìm tòi lời giải.

Nhận thấy cả giả thiết và yêu cầu bài toán đều chứa biểu thức đối xứng a và b nên cách tư duy cũng hướng về phương pháp chung đó. Tuy nhiên nếu đặt $t = xy$ hoặc $t = x + y$ thì khi thế vào biểu thức P xuất hiện bậc 6 tính toán phức tạp. Do đó ta chọn cách đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ bài toán lại trở nên dễ dàng hơn rất nhiều

• Lời giải.

Với a, b dương, ta có: $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) + ab = a^2b + ab^2 + 2(a + b) \Leftrightarrow 2\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + 1 = (a + b) + 2\frac{a}{b} + \frac{1}{b}$$

$$\text{Mà } (a + b) + 2\frac{a}{b} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{2(a + b)\frac{a}{b} + \frac{1}{b}} = 2\sqrt{2\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\frac{1}{b}}$$

$$\text{suy ra: } 2\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + 1 \geq 2\sqrt{2\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\frac{1}{b}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{5}{2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}, t \geq \frac{5}{2}, \text{ suy ra: } P = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$$

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$, với $t \geq \frac{5}{2}$

$$\text{Ta có } f'(t) = 12t^2 - 18t - 12 > 0, \text{ suy ra: } \min_{t \geq \frac{5}{2}} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}.$$

Vậy, $\min P = -\frac{23}{4}$ đạt khi và chỉ khi :
$$\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5}{2} \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{5}{2} \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{5}{2}ab \\ a + b = 2 \end{cases}$$

 $(a;b) = (2;1)$ hoặc $(a;b) = (1;2)$

Nhận xét. Qua các thí dụ trên, cho ta một kỹ thuật giảm biến của bài toán tìm GTNN, GTLN của biểu thức hai biến có tính đối xứng: Do tính đối xứng nên ta luôn có thể biến đổi đưa về một trong các dạng đặt $t = x + y$, $t = x^2 + y^2$, $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ hoặc $t = xy$, từ đó đưa về tìm GTNN, GTLN của hàm số ẩn t .

Dạng 2: Tìm GTLN,GTNN của biểu thức chứa 3 biến có tính chất đối xứng

Trong phần này chúng tôi trình bày một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa ba biến bằng cách đặt ẩn phụ hoặc thế hai biến qua một biến còn lại. Từ đó, chuyển được bài toán về bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

Thí dụ 9. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B-2010)

Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải.**

Nhận thấy cả giả thiết và yêu cầu bài toán đều chứa biểu thức đối xứng a, b và c vậy cách giải bài này có tương tự như đối với dạng 2 biến đối xứng hay không. Để trả lời cho cách tư duy này ta phải đi biến đổi biểu thức M bằng cách sử dụng bất đẳng thức đúng hiển nhiên và giả thiết.

• **Lời giải.**

Ta có: $M \geq (ab + bc + ca)^2 + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{1 - 2(ab + bc + ca)}$

Đặt $t = ab + bc + ca$, ta có: $0 \leq t \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{1}{3}$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1 - 2t}$ trên $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, ta có: $f'(t) = 2t + 3 - \frac{2}{\sqrt{1 - 2t}}$

$f(t) = 2 - \frac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}} \leq 0$, dấu bằng chỉ xảy ra tại $t = 0$, suy ra $f(t)$ nghịch biến.

Xét trên đoạn $[\frac{1}{3}, 1]$ ta có: $f(t) \geq f(\frac{1}{3}) = \frac{11}{3} - 2\sqrt{3} > 0$, suy ra $f(t)$ đồng biến.

Do đó: $f(t) \geq f(0) = 2, \forall t \in [\frac{1}{3}, 1]$.

Vì thế: $M \geq f(t) \geq 2, \forall t \in [\frac{1}{3}, 1]$.

Vậy $M_{\min} = 2 \hat{=} \begin{cases} ab = bc = ca \\ ab + bc + ca = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} (a; b; c)$ là một trong các bộ số:

$(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)$

Thí dụ 10. Cho $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x + y + z + xy + yz + zx$$

• **Phân tích và tìm lời giải.**

Bài toán này giả thiết và yêu cầu bài toán đều chứa biểu thức đối xứng đối với x, y và z vậy cách giải bài này tương tự như đối với dạng 2. Ta quy về một biến bằng cách đặt $t = x + y + z$

• **Lời giải.**

Đặt $t = x + y + z$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ suy ra $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$. Khi đó

$$P = (x + y + z) + \frac{1}{2}(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}(t^2 + 2t - 1)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 2t - 1)$, $f'(t) = t + 1$, $f'(t) = 0 \hat{=} t = -1$.

Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có

$$\min P = \min_{t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]} f(t) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -1 \text{ đạt được khi } t = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hay } (x; y; z) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; 0\right)$$

và các hoán vị của nó;

$$\max P = \max_{t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 + \sqrt{3} \text{ đạt được khi } t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hay } (x; y; z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Thí dụ 11. Cho a, b, c là các số thực dương và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2}{3 + ab + bc + ca} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải.**

Sử dụng bất đẳng thức cơ bản để đưa biểu thức P về hàm chứa abc. Sau đó đặt $\sqrt[3]{abc} = t$

• **Lời giải.**

Áp dụng Bất đẳng thức: $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ta có:

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) = 9abc > 0 \Rightarrow ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Ta có: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$, $\forall a, b, c > 0$. Thật vậy:

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{(abc)^2} + abc = (1 + \sqrt[3]{abc})^3$$

$$\text{Khi đó: } P \leq \frac{2}{3(1 + \sqrt[3]{abc})} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{1 + \sqrt[3]{abc}} = Q \quad (1).$$

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{abc} = t; \text{ vì } a, b, c > 0 \text{ nên } 0 < abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1$$

$$\text{Xét hàm số } Q = \frac{2}{3(1+t^3)} + \frac{t^2}{1+t^2}, t \in (0; 1] \Rightarrow Q'(t) = \frac{2t(t-1)(t^5-1)}{(1+t^3)^2(1+t^2)^2} \geq 0, \forall t \in (0; 1].$$

$$\text{Do đó hàm số đồng biến trên } (0; 1] \Rightarrow Q = Q(t) \leq Q(1) = \frac{1}{6} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2): } P \leq \frac{1}{6}.$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{1}{6}, \text{ đạt được khi và chỉ khi: } a = b = c = 1.$$

Bài tập tương tự

Bài 1/ Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y + 1 = 3xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{3x}{y(x+1)} + \frac{3y}{x(y+1)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

Bài 2/ Cho x, y không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{y^2 + 1} + \frac{y^2}{x^2 + 1}$

Bài 3/ Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$$

Bài 4/ Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{1+y}} + \frac{y}{\sqrt{1+x}}$$

Bài 5/ Cho $x, y \neq 0$ thay đổi thỏa mãn $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Bài 6/ Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 - xy + y^2$.

Dạng 3: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức chứa các biến có tính chất đẳng cấp

Trong phần này chúng tôi trình bày một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa hai biến mà giả thiết hoặc biểu thức đó thể hiện tính đẳng cấp. Từ đó xét hàm số và tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

Thí dụ 12. (Đề thi tuyển sinh Đại học A – 2011)

Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[4; 16]$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 1600$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức } P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$$

- **Phân tích và tìm tòi lời giải.**

Biểu thức P có dạng đẳng cấp nhưng có chứa 3 biến do đó để quy về một ẩn ta sử dụng bất đẳng thức phụ để đánh giá P sau đó đặt ẩn phụ để quy về một biến

- **Lời giải.**

Ta biến đổi P được:

$$P = \frac{1}{2 + \frac{3y}{x}} + \frac{1}{1 + \frac{z}{y}} + \frac{1}{1 + \frac{x}{z}}$$

Trước hết ta chứng minh : $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ (*), với a và b dương và

$ab \geq 1$. Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow (a+b+2)(1+\sqrt{ab}) \geq 2(1+a)(1+b)$

$\Leftrightarrow (a+b)\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} \geq a+b+2ab \Leftrightarrow (\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$, luôn đúng với a, b dương và $ab \geq 1$. Dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi : $a = b$ hoặc $ab = 1$.

Áp dụng (*), với x và y thuộc đoạn $[1; 4]$ và $x \geq y$, ta có:

$$P = \frac{1}{2 + \frac{3y}{x}} + \frac{1}{1 + \frac{z}{y}} + \frac{1}{1 + \frac{x}{z}} \geq \frac{1}{2 + \frac{3y}{x}} + \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi : $\frac{z}{y} = \frac{x}{z}$ hoặc $\frac{x}{y} = 1$ (1)

Đặt $\sqrt{\frac{x}{y}} = t, t \in [1; 2]$. Khi đó: $P \geq \frac{t^2}{2t^2 + 3} + \frac{2}{1+t}$.

Xét hàm số : $f(t) = \frac{t^2}{2t^2 + 3} + \frac{2}{1+t}, t \in [1; 2]$,

Ta có: $f'(t) = \frac{-2t^3(4t-3) + 3(2t-1) + 9}{(2t^2+3)^2(1+t)^2} < 0$,

$\Rightarrow f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$. Dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi $t = 2$

$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = 4 \Leftrightarrow x = 4, y = 1$ (2).

Suy ra $P \geq \frac{34}{33}$.

Từ (1) và (2) suy ra dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi : $x = 4, y = 1$ và $z = 2$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{34}{33}$, khi $x = 4, y = 1, z = 2$.

Thí dụ 13. Cho a, b, c là ba số thực không đồng thời bằng 0 thỏa mãn $(a+b+c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của : $P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$

• **Phân tích và tìm tòi lời giải.**

Biểu thức P có dạng đẳng cấp nhưng có chứa 3 biến do đó để quy về một ẩn ta sử dụng bất đẳng thức phụ để đánh giá P sau đó đặt ẩn phụ để quy về một biến

• **Lời giải.**

Ta có $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{4}(a+b+c)^2$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{4(a^3 + b^3 + c^3)}{(a+b+c)^3} = 4 \left(\frac{a}{a+b+c} \right)^3 + 4 \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^3 + 4 \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^3$$

Đặt $x = \frac{4a}{a+b+c}$; $y = \frac{4b}{a+b+c}$; $z = \frac{4c}{a+b+c}$ từ phép đặt ta có :

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ xy+yz+xz=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=4-x \\ yz=4-x(y+z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=4-x \\ yz=x^2-4x+4 \end{cases} (*)$$

$$16P = x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + (y+z)^3 - 3yx(y+z) = 3x^3 - 12x^2 + 12x + 16$$

$$P = \frac{3}{16}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$$

Từ (*) để tồn tại y và z khi và chỉ khi : $(4-x)^2 \geq 4(4-4x+x^2) \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$

Như vậy bài toán trở thành tìm GTLN và GTNN $P = \frac{3}{16}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$ trên

$$x \in \left[0; \frac{8}{3}\right] .$$

$$\text{Ta có: } P' = \frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 2 \end{cases} ;$$

$$\text{Ta có: } P(0) = 1; P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{9}; P(2) = 1; P\left(\frac{8}{3}\right) = 1$$

$$* \text{Max} P = \frac{11}{9} \text{ tại } x = \frac{8}{3}; y = z = \frac{2}{3}; x = \frac{2}{3}; y = z = \frac{8}{3}$$

$$* \text{Min} P = 1 \text{ tại } x = 0; y = z = 2; \text{ hoặc } x = 2; y = z = 0$$

Bài tập tương tự

1/ Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $xy \leq y - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{y^2} + 9\frac{y^3}{x^3}$$

2/ Cho $x, y \geq 0$. Chứng minh rằng $3x^3 + 7y^3 \geq 9xy^2$.

3/ Cho $x, y \geq 0$. Chứng minh rằng $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$.

4/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$ với $x, y > 0$.

IV. KẾT QUẢ VÀ KINH NGHIỆM RÚT RA.

1. Kết quả:

- Sau khi áp dụng những kết quả nghiên cứu trong đề tài, qua khảo sát cho thấy: Có trên 60% các em học sinh có hứng thú với bài học và 30% trong số đó biết cách tìm tòi và xây dựng những bài toán mới từ những bài toán gốc được giáo viên gợi ý hoặc được các em tự tìm tòi.
- Trong các kỳ thi thử THPT quốc gia trên toàn tỉnh có khoảng 30-40% học sinh ở các lớp trên có thể giải quyết bài toán tìm GTLN, GTNN ở dạng không quá khó trong các đề thi đó.

2. Kinh nghiệm rút ra.

- Khi tiếp cận bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức, ta cần nghiên cứu kỹ những mối quan hệ giữa các giả thiết đã cho và biểu thức cần tìm. Nếu dữ liệu bài toán xoay quanh hai hoặc ba biến nào đó, câu hỏi đầu tiên của chúng ta là: “Giữa chúng có chăng một mối quan hệ ràng buộc nào đó?” và đặt ra những giả thuyết như giữa chúng có tính chất đối xứng, chúng có tính chất đẳng cấp,... Từ đó kiểm chứng giả thuyết đặt ra bằng đặc biệt hóa bài toán, phỏng đoán dấu bằng xảy ra và dự đoán kết quả GTLN hoặc GTNN.
 - Để quy biểu thức cần tìm GTLN, GTNN về một biến ta cần xem xét và đánh giá giả thiết
- + Nếu giả thiết chứa hai biến bậc nhất có thể thế một biến qua biến còn lại.

+ Nếu giả thiết và biểu thức có chứa 2 biến đối xứng thì đặt ẩn phụ theo tính đối xứng $t = x + y$, $t = x^2 + y^2$ hoặc $t = xy$..

+ Nếu giả thiết và biểu thức chứa hai biến đối xứng và một biến độc lập thì quy về biến độc lập đó

+ Nếu biểu thức có tính đẳng cấp thì đặt ẩn phụ theo tính đẳng cấp $t = \frac{x}{y}$..

3. Ý nghĩa của SKKN

Với sáng kiến kinh nghiệm này hy vọng góp thêm một tài liệu cho quý Thầy, Cô và các bạn đồng nghiệp ; giúp các em học sinh có thêm những kinh nghiệm cho loại toán này, từ đó tự tin hơn khi thi Đại học.

4. Khả năng ứng dụng và triển khai

Sáng kiến kinh nghiệm này có thể triển khai như một chuyên đề để bồi dưỡng học sinh giỏi ; cũng như dùng để giảng dạy cho các em học sinh ôn tập thi đại học, nhằm giúp các em học sinh có thể vượt qua trở ngại tâm lí từ trước tới nay cho loại bài toán này.

C. KẾT LUẬN VÀ ĐỀ XUẤT

I. NHỮNG KẾT LUẬN

Qua thực tế giảng dạy chúng tôi thấy rằng vấn đề nào dù khó mà giáo viên quan tâm và truyền thụ cho học sinh bằng lòng say mê và nhiệt tình của mình thì sẽ cuốn hút các em vào con đường nghiên cứu. Bài toán tìm GTNN, GTLN của một biểu thức không phải là một vấn đề mới, nhưng thực tế đây là vấn đề khó và không hứng thú đối với nhiều học sinh. Thậm chí còn nhiều Thầy, Cô chưa thực sự quan tâm đúng mức vấn đề này.

II. NHỮNG KIẾN NGHỊ, ĐỀ XUẤT

Trong dạy học giải bài tập toán, giáo viên cần xây dựng bài giảng thành hệ thống những bài tập có phương pháp và quy trình giải toán.

Khuyến khích học sinh xây dựng bài tập toán liên quan đến những dạng bài tập toán trong bài giảng. Phát triển và nhân rộng những đề tài có ứng dụng thực tiễn cao, đồng thời viết thành những bộ sách tham khảo cho học sinh và giáo viên.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh hóa ngày 20 tháng 5 năm 2016</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. Người viết Lê Xuân Ninh
---------------------------------------	--

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA
TRƯỜNG THPT HOÀNG HÓA 4

-----□□□□-----

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

TÊN ĐỀ TÀI

**KỸ THUẬT QUY VỀ MỘT BIẾN
TRONG BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN
NHẤT GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU
THỨC**

Người thực hiện: Lê Xuân Ninh

Chức vụ: Hiệu trưởng

Đơn vị công tác: Trường THPT Hoàng Hóa 4

Sáng kiến kinh nghiệm môn: Toán học

THANH HÓA NĂM 2016