CHUYÊN ĐỀ 6 - BẤT ĐẲNG THỨC VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Các bất đẳng thức cơ bản

- Bất đẳng thức BECNULI

Nếu $x > -1$ và $\alpha \geq 1$ thì $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x$

Nếu $x > -1$ và $0 < \alpha \leq 1$ thì $(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x$

- Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ thì $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi: $a_1 = a_2 = ... = a_n$

- Bất đẳng thức CAUCHY-SCHWARTZ

Với hai dãy số thực: $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n$

thì $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = kb_1, ..., a_n = kb_n$

- Bất đẳng thức sắp thứ tự

Cho hai dãy số tăng $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ và $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ $(n \geq 2)$

Nếu $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là một hoán vị của dãy $1, 2, ..., n$ thì:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

- Bất đẳng thức trung bình lũy thừa

Nếu $x_i > 0 \, \forall i = \overline{1,n}$ và $p \geq q > 0$ thì

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

- Bất đẳng thức SHUR

Cho $a, b, c > 0, r > 0$ thì:

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

- Bất đẳng thức CHEBYCHEP

Nếu hai dãy: $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$; $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$

thì: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \le n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

- Bất đẳng thức MIN-COP-XKI

Với hai dãy: $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$

thì $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$

Dùng đạo hàm chứng minh bất đẳng thức:

- Nếu $y = f(x)$ có $y' > 0$ trên *K* thì $f(x)$ đồng biến trên *K*:

$x > a \Rightarrow f(x) > f(a); x < b \Rightarrow f(x) < f(b)$

Đối với $y' < 0$ thì ta có bất đẳng thức ngược lại.

Việc xét dấu y' đôi khi phải cần đến $y'', y''', ...$ hoặc xét dấu bộ phận, chẳng hạn tử số của một phân số có mẫu dương,… Nếu $y'' > 0$ thì y' đồng biến từ đó ta có đánh giá $f'(x)$ rồi $f(x)$,…

- Bất đẳng thức có biểu thức dạng $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ là dùng định lý Lagrange $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, sự tồn tại số $c \in (a;b)$ hay giá trị $f'(c)$ cũng có đánh giá bất đẳng thức.

- Bất đẳng thức JENSEN: $\forall x \in (a;b)$ và $a_i \in (a;b) \forall i = \overline{1,n}$

Nếu $f''(x) < 0, \forall x \in (a;b)$ thì $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \le f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$

Nếu $f''(x) > 0, \forall x \in (a;b)$ thì $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$

- Phương pháp tiếp tuyến: Cho *n* số a_i thuộc *K* có tổng $a_1 + a_2 + ... + a_n = nb$ không đổi.

Bất đẳng thức có dạng $f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \ge nf(b)$.

Lập phương trình tiếp tuyến tại $x = b$: $y = Ax + B$.

Nếu $f(x) \ge Ax + B$ trên *K*, dấu bằng xảy ra khi $x = b$.

Khi đó $f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \ge A(a_1 + a_2 + ... + a_n) + nB$

$= Anb + nB = n(Ab + B) = nf(b)$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = b$.

Còn nếu $f(x) \le Ax + B$ trên *K*, dấu bằng xảy ra khi $x = b$ thì có ngược lại

$f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)\le nf(b)$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Đối với hàm số $y=f(x)$ trên *D*. Xét dấu đạo hàm y' hoặc từ bảng biến thiên có kết luận về GTLN, GTNN. Nếu cần thì đặt ẩn phụ $t=g(x)$ với điều kiện đầy đủ của *t*.

Nếu $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì: $\min f(x)=f(a)$ và $\max f(x)=f(b)$. Ngược lại với hàm nghịch biến.

Nếu $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x)=0$ có nghiệm x_i thì:

$$\min f(x)=\min\left\{f(a);f(x_1);f(x_2);...;f(b)\right\}$$
$$\max f(x)=\max\left\{f(a);f(x_1);f(x_2);...;f(b)\right\}$$

Nếu *f* lồi trên đoạn $[a;b]$ thì GTLN $=\max\left\{f(a);f(b)\right\}$ và nếu *f* lõm trên đoạn $[a;b]$ thì GTNN $=\min\left\{f(a);f(b)\right\}$.

Đối với các đại lượng, chọn đặt biến *x* (hoặc *t*), kèm điều kiện tồn tại. Dựa vào giả thiết, các quan hệ cho để xác lập hàm số cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 6.1: Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $2\sin x+\tan x>3x$ với mọi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

b) $\cos(x+y)<\frac{y\sin x}{x\sin y}$ với $x>0, y>0$ và $x+2y<\frac{5\pi}{4}$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $f(x)=2\sin x+\tan x-3x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ và:

$$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3=\cos x+\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3>0$$

Do đó hàm số *f* đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $f(x)>f(0)=0$

b) Xét hàm số: $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ với $0<t<\frac{5\pi}{4}$

Ta có $f'(t)=\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}=\frac{\cos t(t-\tan t)}{t^2}$

Nếu $0 < t < \frac{\pi}{2}$ thì do $\tan t > t \Rightarrow f'(t) < 0$.

Nếu $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$ thì $\cos t \le 0$ và $\sin t \ge 0 \Rightarrow f'(t) < 0$

Nếu $\pi < t < \frac{5\pi}{4}$ thì do $\cos t < 0; \tan t < t \Rightarrow f'(t) < 0$. Do đó $f'(t) < 0, 0 < t < \frac{5\pi}{4}$ nên f là hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{5\pi}{4}\right)$

Từ giả thiết có $0 < x < x + 2y < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sin(x+2y)}{x+2y} < \frac{\sin x}{x}$.

Do $x > 0$ và $x + 2y > 0$ nên từ đó có

$x\sin(x+2y) < x\sin x + 2y\sin x \Leftrightarrow x.2\cos(x+y)\sin y < 2y\sin x$

$\Rightarrow$ đpcm (vì $x > 0$ và $x + 2y < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow y < \frac{5\pi}{8} \Rightarrow \sin y > 0$)

Bài toán 6.2: Chứng minh các bất đẳng thức

a) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha} \ge \cos x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ với mọi $\alpha \le 3$.

b) $(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x} > 1, \forall x \ge \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

a) Khi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì có $0 < \sin x < x$ nên $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$

Suy ra $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \ge \cos x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Xét hàm số $F(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $F'(x) = \frac{2\cos^2 x - 3\cos x.\sqrt[3]{\cos x} + 1}{3\cos x.\sqrt[3]{\cos x}}$

Xét $G(t) = 2t^2 - 3t\sqrt[3]{t} + 1, t \in [0;1]$ thì $G'(t) = 4\left(t - \sqrt[3]{t}\right) \le 0, \forall t \in [0;1]$

nên $G(t)$ nghịch biến do đó $G(t) \ge G(1) = 0, \forall t \in [0;1]$

Suy ra $F'(x) \geq 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $F(x)$ đồng biến

Do đó $F(x) \geq F(0) = 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

b) BĐT $\Leftrightarrow 2x\sin\frac{\pi(2x+1)}{2x(x+1)}.\sin\frac{\pi}{2x(x+1)} > 1 - \cos\frac{\pi}{x+1} = 2\sin^2\frac{\pi}{2(x+1)}$

$\Leftrightarrow x\sin\frac{\pi(2x+1)}{2x(x+1)}.\sin\frac{\pi}{2x(x+1)} > \sin^2\frac{\pi}{2(x+1)}$

Vì $x \geq \sqrt{3} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2(x+1)} < \frac{\pi(2x+1)}{2x(x+1)} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\sin\pi(2x+1)}{2x(x+1)} > \sin\frac{\pi}{2(x+1)} > 0$

Ta sẽ chứng minh: $x\sin\frac{\pi}{2x(x+1)} > \sin\frac{\pi}{2(x+1)}$

Đặt $t = \frac{\pi}{2x(x+1)}, t > 0$ thì $(2) \Leftrightarrow x\sin t > \sin xt$

Xét $f(t) = x\sin t - \sin xt, t \geq 0, f'(t) = x\cos t - x\cos xt = x(\cos t - \cos xt)$

Vì $0 < t < xt < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f'(t) > 0$ với $t > 0$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty) \Rightarrow f(t) > f(0) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.3: Chứng minh bất đẳng thức với *n* nguyên dương:

a) $\sqrt[n]{x^n + y^n} \geq \sqrt[n+1]{x^{n+1} + y^{n+1}}$ với $n \geq 2$ và $x, y \geq 0$.

b) $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)\frac{x^i}{i!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \geq 0$ với mọi *x*.

Hướng dẫn giải

a) Với $x = 0$ hoặc $y = 0$, bất đẳng thức đúng.

Với $xy > 0$, BĐT: $\sqrt[n]{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^n} \geq \sqrt[n+1]{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\sqrt[n]{1+t^n}}{\sqrt[n+1]{1+t^{n+1}}}$ với $t\in(0;+\infty)$

Ta có $f'(t)=\dfrac{t^{n-1}(1-t)}{\sqrt[n+1]{\left(1+t^{n+1}\right)^{n+2}}\sqrt[n]{\left(1+t^n\right)^{n-1}}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

BBT

x	0		1		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	1

Suy ra $f(t)\ge 1$ với mọi $t\in(0;+\infty)\Rightarrow$ đpcm.

b) Xét $f(x)=-1-x\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^i\dfrac{x^i}{i!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, x\in\mathbb{R}$

Với $x<0$ thì $f(x)\ge 1\ge 0$: đúng. Với $x>2n$ thì:

$$f(x)=1+\left(\frac{x^2}{2!}-x\right)+\left(\frac{x^4}{4!}-\frac{x^3}{3!}\right)+\ldots+\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)$$

$$=1+\frac{x}{2!}(x-2)+\frac{x^3}{4!}(x-4)+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}(x-2n)\ge 1\ge 0$$: đúng

Với $0\le x\le 2n$ thì *f* liên tục trên đoạn $[0;2n]$ nên tồn tại giá trị bé nhất tại x_0. Nếu $x_0=0$ hay $x_0=2n$ thì $f(x)\ge f(x_0)\ge 1\ge 0$.

Nếu $x_0\in(0;2n)$ thì *f* đạt cực tiểu tại đó.

$$f'(x)=-1+x-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\frac{x^{2n}}{(2n)!}-f(x)$$

Vì $f'(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=\dfrac{x_0^{2n}}{(2n)!}>0\Rightarrow f(x)\ge f(x_0)>0$: đúng

Bài toán 6.4: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-\left(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2\right)>0$ với 4 số *a, b, c, d* dương.

b) $\left|27c+2a^3-9ab\right|<2\sqrt{\left(a^2-3b\right)^3}$ với *a, b, c* là 3 số mà phương trình:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

a) Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq d > 0$

Xem vế trái là hàm số $f(a), a \geq 0$

$f'(a) = 4a^3 + 2bcd - 2a(b^2 + c^2 + d^2)$

$f''(a) = 12a^2 - 2(b^2 + c^2 + d^2) > 0$ nên f' đồng biến trên $(0; +\infty)$:

$a \geq b \Rightarrow f'(a) \geq f'(b)$. Vì $f'(b) = 2b(b^2 - c^2) + 2bd(c - d) \geq 0$ nên $f(a)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$:

$a > 0 \Rightarrow f(a) > f(0) = 0$: đpcm.

b) Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, D = \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Vì $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}, x_2 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$ với $a^2 - 3b > 0$

Và vì hệ số cao nhất của *f* dương nên $y_{CD} = f(x_1) > 0$ và $f(x_2) = y_{CT} < 0$.

Ta có $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{9}a\right) f'(x) + \dfrac{1}{9}(3b - a^2)x + c - \dfrac{ab}{9}$

$\Rightarrow f(x_i) = \dfrac{2}{9}(3b - a^2)x_i + c - \dfrac{ab}{9}$

Từ $f(x_1) > 0 \Rightarrow -2\sqrt{(a^2 - 3b)^3} < 2a^3 + 27c - 9ab$

$f(x_2) < 0 \Rightarrow 2a^3 + 27c - 9ab < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$

Do vậy: $\left|2a^3 + 27c - 9ab\right| < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$

Bài toán 6.5: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{x^2}{8} < \sqrt{1 + x} < 1 + \dfrac{1}{2}x$, với $x > 0$.

b) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{1 + xy}}$ với $x, y \in [0; 1]$.

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$ trên $[0;+\infty)$. Ta có:

$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\geq 0$ với $x\geq 0$ nên $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$

Do đó $f(x)>f(0)=0$ với mọi $x\geq 0$.

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{8}$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có: $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2}+\frac{x}{4}, g''(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}\geq 0$ nên g' đồng biến trên $[0;+\infty)$, do đó $g'(x)=g'(0)=0$. Suy ra *g* đồng biến trên $[0;+\infty)$ nên $g(x)>g(0)=0$ với mọi $x\in[0;+\infty)\Rightarrow$ đpcm.

b) Giữ *y* cố định, xét hàm số $f(x)=\frac{2}{\sqrt{1+xy}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ trên đoạn $[0;1]$.

Ta có $f'(x)=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}-\frac{y}{(1+xy)^{3/2}}$

Như vậy dấu của $f'(x)$ là dấu của

$$x^2(1+xy)^3-y^2(1+x^2)^3=(x-y)(x+y+3x^2y-x^5y^2)$$

Do *x, y* thuộc $[0;1]$ nên thừa số thứ hai luôn dương, như thế $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương tại *y*, suy ra *y* là điểm cực đại, suy ra $f(x)\geq f(y)=0$: đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Bài toán 6.6: Cho $x,y,z\geq 0$ và $x+y+z=1$. Chứng minh:

a) $0\leq xy+yz+zx-2xyz\leq\frac{7}{27}$

b) $xyz\left[x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+1\right]\leq\frac{7}{27}$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử *z* là số bé nhất thì $0\leq z\leq\frac{1}{3}$. Ta có

$$T+xy+yz+zx-2xyz=xy(1-2z)+(x+y)z\geq\frac{1}{3}xy(x+y)z\geq 0$$

Và có $T \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 (1-2z)+(x+y)z$

$=\frac{1}{4}(1-z)^2(1-2z)+(1-z)z=\frac{1}{4}\left(-2z^3+z^2+1\right)$

Xét $f(z)=-2z^3+z^2+1, 0 \le z \le \frac{1}{3}$ thì

$f'(z)=-6z^2+2z=2z(1-3z)\ge 0$ trên $f(z)$ đồng biến trên $\left[0;\frac{1}{3}\right]$, do đó:

$T=f(z)\le f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$.

b) Ta có: $xyz\left[x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+1\right]$

$=x^2y+x^2z+y^2x+z^2x+z^2y+yz^2+xyz$

$=(x+y+z)(xy+yz+zx)-2xyz=xy+yz+zx-2xyz$

Vì $x+y+z=1 \Rightarrow \exists$ ít nhất 1 trong 3 số $x,y,z \le \frac{1}{3}$. Giả sử $z \le \frac{1}{3}$

$\Rightarrow S(x,y,z)=xy+yz+zx-2xyz=xy(1-2z)+(x+y)z$

$\le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2(1-2z)+(x+y)z=\left(\frac{1-z}{2}\right)^2(1-2z)+(1-z)z=\frac{-2z^3+z^2+1}{4}$

Xét $f(z)=\frac{-2z^3+z^2+1}{4}$ trong $\left(0;\frac{1}{3}\right]$ thì $f'(z)=\frac{-3z^2+z}{2}\ge 0$ trên $\left(0;\frac{1}{3}\right]$ nên f đồng biến, do đó

$\max f(z)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$

Vậy $S(x,y,z)\le \frac{7}{27}$ dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài toán 6.7: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $|\cos b-\cos a|\le |b-a|$ với *a, b* tùy ý.

b) $\frac{1}{1+(x+1)^2}<\arctan\frac{1}{x^2+x+1}<\frac{1}{1+x^2}$ với mọi $x>0$.

Hướng dẫn giải

a) Nếu $a=b$ thì bất đẳng thức đúng.

Nếu $a \neq b$ thì bất đẳng thức tương đương: $\left|\dfrac{\cos b - \cos a}{b - a}\right| \leq 1$. Không mất tính tổng quát, giả sử $b > a$.

Hàm số $f(x) = \cos x$ liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x) = -\sin x$.

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \Rightarrow \frac{\cos b - \cos a}{b - a} = -\sin c$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\cos b - \cos a}{b - a}\right| = |-\sin c| \leq 1 \text{: đpcm.}$$

b) BĐT: $\dfrac{1}{1+(x+1)^2} < \dfrac{\arctan(x+1) - \arctan x}{(x+1) - x} < \dfrac{1}{1+x^2}$

Hàm số $f(x) = \arctan x$ liên tục trên $[x; x+1]$ và có $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (x; x+1)$ sao cho:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \Rightarrow \frac{\arctan(x+1) - \arctan x}{(x+1) - x} = \frac{1}{1+c^2}$$

Vì $c \in (x; x+1)$ nên $\dfrac{1}{1+(x+1)^2} < \dfrac{1}{1+c^2} < \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.8: Cho các số thực dương. Chứng minh.

a) $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \leq \dfrac{a+b+c}{2}$

b) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dfrac{63}{4}$ với tổng $a + b + c + d = 1$

Hướng dẫn giải

a) Bất đẳng thức thuần nhất nên ta chuẩn hóa: $a + b + c = 3$. Do đó

$\dfrac{a^2}{3-a} + \dfrac{b^2}{3-b} + \dfrac{c^2}{3-c} \leq \dfrac{3}{2}$. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{3-x}$ với $0 < x < 3$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{6x - x^2}{(3-x)^2}; f''(x) = \dfrac{18}{(3-x)^3}$

Vì $f''(x) > 0$ trên $(0;3)$ nên f lõm, theo bất đẳng thức Jensen thì có

VT $=f(a)+f(b)+f(c)\geq 3f\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$.

b) Ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\geq a^2+b^2+c^2+d^2+\dfrac{63}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}-a^2+\dfrac{1}{b}-b^2+\dfrac{1}{c}-c^2+\dfrac{1}{d}-d^2\geq\dfrac{63}{4}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}-x^2$ với $0<x<1$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}-2x; f''(x)=\dfrac{2}{x^3}-2$

Vì $f''(x)>0$ trên $(0;1)$ nên f lõm, theo bất đẳng thức Jensen thì có

VT = $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\geq 4f\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)=\dfrac{63}{4}$

Dấu = xảy ra khi $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$.

Bài toán 6.9: Chứng minh:

a) $\left(a^a b^b c^c\right)^2\left(a^{-(b+c)}+b^{-(c+a)}+c^{-(a+b)}\right)^3\geq 27$ với $a,b,c>0$

b) $a^b b^a\leq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{a+b}$ với $a,b>0$

Hướng dẫn giải

a) Với $a,b,c>0$, trước hết ta chứng minh rằng

$\left(a^a b^b c^c\right)^2\geq a^{b+c}.b^{c+a}.c^{a+b}$

$\Leftrightarrow 2\left[a\ln a+b\ln b+c\ln c\right]\geq(b+c)\ln a+(c+a)\ln b+(a+b)\ln c$

$\Leftrightarrow \ln a(2a-b-c)+\ln b(2b-c-a)+\ln c(2c-a-b)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(\ln a-\ln b)+(b-c)(\ln b-\ln c)+(c-a)(\ln c-\ln a)\geq 0$: đúng

Ta cần chứng minh rằng

$a^{b+c}.b^{c+a}.c^{a+b}\left(a^{-(b+c)}+b^{-(c+a)}+c^{-(a+b)}\right)^3\geq 27$

Đặt $x=a^{b+c}, y=b^{c+a}, z=c^{a+b}, x,y,z>0$

BĐT $\Leftrightarrow xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^3 \geq 27 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$: đúng

b) BĐT: $b\ln a + a\ln b \leq (a+b)\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow a\ln\left(\frac{2b}{a+b}\right)+b\ln\left(\frac{2a}{a+b}\right)\leq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b}\ln\left(\frac{2}{\frac{a}{b}+1}\right)+\ln\left(\frac{\frac{2a}{b}}{\frac{a}{b}+1}\right)\leq 0$$

Giả sử $a \leq b$, đặt $t=\frac{a}{b}$ thì $0<t\leq 1$.

Bất đẳng thức tương đương: $t\ln\left(\frac{2}{t+1}\right)+\ln\left(\frac{2t}{t+1}\right)\leq 0, 0<t\leq 1$.

Xét hàm số $f(t)=t\ln\left(\frac{2}{t+1}\right)+\ln\left(\frac{2t}{t+1}\right), 0<t\leq 1$.

$$f'(t)=\ln\left(\frac{2}{t+1}\right)-\frac{t}{t+1}+\frac{1}{t(t+1)}=\ln\left(\frac{2}{t+1}\right)+\frac{1-t^2}{t(t+1)}$$

$=\ln\left(\frac{2}{t+1}\right)+\frac{1-t}{t}>0$ nên f là hàm đồng biến.

Ta có $f(t)\leq f(1)=0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.10: Chứng minh rằng

a) $\frac{4+\sqrt{x}}{4-x}+\frac{4+\sqrt{y}}{4-y}+\frac{4+\sqrt{z}}{4-z}\geq 5$ với $x,y,z>0$ khác 4.

b) $\ln\frac{x+y}{x}>\frac{2y}{2x+y}$ với $x,y>0$

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm $f(x)=\frac{4+\sqrt{x}}{4-x}$ trên $(0;3)$. Ta có $f'(1)=\frac{13}{18}$ nên tiếp tuyến tại $x=1$ là:

$y=\frac{13}{18}(x-1)+\frac{5}{3}$ hay $y=\frac{13}{18}x+\frac{17}{18}$

Bằng biến đổi tương đương hoặc sử dụng đạo hàm ta chứng minh được:

$\frac{4+\sqrt{x}}{4-x}\geq\frac{13}{18}x+\frac{17}{18}$, với mọi $x\in(0;3)$

Tương tự: $\frac{4+\sqrt{y}}{4-y} \geq \frac{13}{18}y + \frac{17}{18}$ và $\frac{4+\sqrt{z}}{4-z} \geq \frac{13}{18}z + \frac{17}{18}$

Cộng 3 bất đẳng thức trên và $x+y+z=3$ ta được đpcm.

b) Đặt $\frac{x+y}{x} = t > 1 \Leftrightarrow y = x(t-1) \Rightarrow \frac{2y}{2x+y} = 2\frac{t-1}{t+1}$

Ta cần chứng minh $\ln t > 2\frac{t-1}{t+1}, \forall t > 1 \Leftrightarrow \ln t - 2\frac{t-1}{t+1} > 0, \forall t > 1$

Xét hàm số $f(t) = \ln t - 2\frac{t-1}{t+1}, t \in (1;+\infty)$. Ta có:

$f'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0, \forall t > 1$ nên f là hàm đồng biến.

Suy ra $f(t) > f(1) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.11: Cho $0 < a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ và $a_n a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \leq 1$

Chứng minh rằng: $\frac{n}{1+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i}$

Hướng dẫn giải

Với $a_1, a_2 > 0$ và $a_1, a_2 \leq 1$. Ta chứng minh:

$$\frac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}} \geq \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\left(1-\sqrt{a_1a_2}\right)}{\left(1+\sqrt{a_1a_2}\right)(1+a_1)(1+a_2)} \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2$ hoặc $a_1a_2 = 1$

Áp dụng ta có: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} \leq \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{2}{1+\sqrt{a_1a_{n+1-i}}}$

Dấu bằng xảy ra khi n chẵn và: $a_1 = a_2 = ... = a_n$ hoặc $a_1a_{n+1-i} = 1$

Xét $f(x) = \frac{1}{1+e^x}, x \leq 0, f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}; f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3} \leq 0$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen vào hàm lõm với các $x_i \leq 0$ và:

$$e^{x_i}=\sqrt{a_i a_{n+1-i}}\le 1:\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}\le\sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{2}{1+\sqrt{a_i a_{n+1-i}}}\le\frac{n}{1+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}}$$

Bài toán 6.12: Chứng minh với mọi số nguyên dương *n*:

a) $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\le\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

b) $f_n(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+...+\frac{1}{n}\sin x\ge 0,\ \forall x\in\left[0;\pi\right]$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ liên tục trên $\left[0;+\infty\right)$ và có $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ trên $(0;+\infty)$.

Theo định lý Lagrange, với mọi $n\ge 1$ tồn tại $x_1\in(n-1;n)$ và $x_2\in(n;n+1)$ sao cho:

$$f'(x_1)=\frac{f(n)-f(n-1)}{n-(n-1)},f'(x_2)=\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}$$

Hay $\frac{1}{2\sqrt{x_1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1},\frac{1}{2\sqrt{x_2}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Vì $0<x_1<n<x_2$ nên $\frac{1}{2\sqrt{x_1}}>\frac{1}{2\sqrt{n}}>\frac{1}{2\sqrt{x_2}}$

Do đó $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\Rightarrow$ đpcm.

b) Xét $x=0,x=\pi$ thì $f_n(x)=0$: đúng.

Xét $0<x<\pi$. Ta chứng minh qui nạp $f_n(x)\ge 0$

Khi $n=1$: $f_1(x)=\sin x>0,\ \forall x\in(0;\pi)$: đúng

Giả sử công thức đúng đến *n*: $f_n(x)\ge 0,\ \forall x\in(0;\pi)$

Ta chứng minh: $f_{n+1}(x)\ge 0,\ \forall x\in(0;\pi)$. Giả sử có số $x_0\in(0;\pi)$ mà $f_{n+1}(x_0)<0$. Vì $f_{n+1}(x)$ liên tục và có đạo hàm nên tồn tại điểm cực tiểu x_1 để: $f_{n+1}(x_1)<0,0<x_1<\pi$. Ta có

$$f'_{n+1}(x)=\cos x+\cos 2x+...+\cos(n+1)x=\frac{\sin\frac{2n+3}{2}x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Mà $f'_{n+1}(x_1)=0 \Rightarrow \sin\frac{2n+3}{2}x_1=\sin\frac{x_1}{2}>0$

Do đó: $\left|\cos\frac{2n+3}{2}x_1\right|=\left|\cos\frac{x_1}{2}\right|=\cos\frac{x_1}{2}>0$

Vì $f_{n+1}(x)=f_n(x)+\frac{\sin(n+1)x}{n+1}$ nên

$(n+1).(f_{n+1}(x_1)-f_n(x_1))=\sin(n+1)x_1=\sin\left(\frac{2n+3}{2}x_1-\frac{x_1}{2}\right)$

$=\sin\frac{2n+3}{2}x_1.\cos\frac{x_1}{2}-\cos\frac{2n+3}{2}x_1.\sin\frac{x_1}{2}$

$\geq\sin\frac{2n+3}{2}x_1.\cos\frac{x_1}{2}-\left|\cos\frac{2n+3}{2}x_1\right|.\sin\frac{x_1}{2}$

$=\sin\frac{x_1}{2}.\cos\frac{x_1}{2}-\cos\frac{x_1}{2}.\sin\frac{x_1}{2}=0$

Do đó: $f_{n+1}(x_1)\geq f_n(x_1)\Rightarrow f_n(x_1)<0$: vô lý $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.13: Cho *a, b, c* là những số thực dương sao cho $abc=1$.

Chứng minh: $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}$

Hướng dẫn giải

BĐT $\Leftrightarrow a^4+b^3+b^4+b^3+c^4+c^3\geq\frac{3}{4}(a+1)(b+1)(c+1)$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$a^4+a^3+b^4+b^3+c^4+c^3\geq\frac{1}{4}\left[(a+1)^3+(b+1)^3+(c+1)^3\right]$$

Xét hàm: $f(t)=t^4+t^3-\frac{1}{4}(t+1)^3$

$g(t)=(t+1)(4t^2+3t+1)$ thì $f(t)=\frac{1}{4}(t-1).g(t)$

Vì $g(t)$ là hàm số tăng trong khoảng $(0;+\infty)$ và $g(t)>0, \forall t>0$.

Do đó $a^4+a^3+b^4+b^3+c^4+c^3-\frac{1}{4}\left[(a+1)^3+(b+1)^3+(c+1)^3\right]$

$$=f(a)+f(b)+f(c)=\frac{1}{4}(a-1)g(a)+\frac{1}{4}(b-1)g(b)+\frac{1}{4}(c-1)g(c)$$

Giả sử $a\ge b\ge c$ thì $g(a)\ge g(b)\ge g(c)>0$

Vì $abc=1$ nên ta có: $a\ge 1, c\le 1$

Từ đó: $(a-1)g(a)\ge(a-1)g(b)$ và $(c-1)g(b)\le(c-1)g(c)$

Nên: $\frac{1}{4}(a-1)g(a)+\frac{1}{4}(b-1)g(b)+\frac{1}{4}(c-1)g(c)$

$$\ge\frac{1}{4}\left[(a-1)+(b-1)+(c-1)\right]g(b)=\frac{1}{4}(a+b+c-3)g(b)$$

$\ge\frac{1}{4}\left(3\sqrt[3]{abc}-3\right)g(b)=0$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

Từ đó $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 6.14: Chứng minh bất đẳng thức sau:

$x^a\left(y^b-z^b\right)+y^a\left(z^b-x^b\right)+z^a\left(x^b-y^b\right)\ge 0$ với $x\ge y\ge z>0; a\ge b>0$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x)=x^{\frac{a}{b}}$ với $\frac{a}{b}\ge 1$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{a}{b}x^{\frac{a}{b}-1}\Rightarrow f''(x)=\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}-1\right)x^{\frac{a}{b}-2}>0$$

Do đó $f'(x)$ tăng trên $(z^b;y^b)$

Theo định lý Lagrange: $f(y^b)-f(z^b)=f'(c_1)\left[y^b-z^b\right], c_1\in(z^b,y^b)$

$$y^a-z^a=f'(c_1)\left[y^b-z^b\right]$$

Tương tự: $x^a-y^a=f'(c_2)\left[x^b-y^b\right], c_2\in(y^b,x^b)$

nên: $(x^a-y^a)(y^b-z^b)=f'(c_2)\left[x^b-y^b\right]\left[y^b-z^b\right]$

$$(y^a-z^a)(x^b-y^b)=f'(c_1)\left[x^b-y^b\right]\left[y^b-z^b\right]$$

Và $c_2\ge c_1$ nên $f'(c_2)\ge f'(c_1)\Rightarrow(x^a-y^a)(y^b-z^b)\ge(y^a-z^a)(x^b-y^b)$

$\Rightarrow x^a\left(y^b-z^b\right)+y^a\left(z^b-x^b\right)+z^a\left(x^b-y^b\right)\ge 0$ (đpcm)

Bài toán 6.15: Cho 4 số không âm *a, b, c, d* thỏa $a+b+c+d=1$. Chứng minh:

$abc+bcd+cda+dab \le \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd$.

Hướng dẫn giải

Đặt $F(a,b,c,d)=abc+bcd+cda+dab-\frac{176}{27}abcd$

Không mất tổng quát ta giả sử *a* là số lớn nhất, *d* là số bé nhất trong 4 số *a, b, c, d*. Ta có:

$F(a,b,c,d)=bc(a+d)+ad\left(b+c-\frac{176}{27}bc\right)$

Nếu $b+c-\frac{176}{27}bc \le 0$ thì:

$$F(a,b,c,d)\le bc(a+d)\le\left(\frac{b+c+a+d}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

Nếu $b+c-\frac{176}{27}bc > 0$ thì:

$$F(a,b,c,d)\le bc(a+d)+\left(\frac{a+d}{2}\right)^2\left(b+c-\frac{176}{27}bc\right)$$

$$=F\left(\frac{a+d}{2},b,c,\frac{a+d}{2}\right)$$

Đặt $a_0=a, b_0=b, c_0=c, d_0=d$ và gọi a_1,b_1,c_1,d_1 là 4 số $\frac{a+d}{2},b,c,\frac{a+d}{2}$ theo thứ tự giảm dần.

Nếu $b_1+c_1-\frac{176}{27}b_1c_1 \le 0$ thì tương tự lí luận trên:

$F(a_1,b_1,c_1,d_1)\le F(a_2,b_2,c_2,d_2)$ với a_2,b_2,c_2,d_2 là 4 số $\frac{a_1+d_1}{2},b_1,c_1,\frac{a_1+d_1}{2}$ theo thứ tự giảm dần.

Tiếp tục quá trình này ta lập được dãy (a_n,b_n,c_n,d_n) vô hạn (vì nếu hữu hạn thì ta có $F(a,b,c,d)\le\frac{1}{27}$) thỏa 2 tính chất sau đây:

(1) $a_{n+1},b_{n+2},c_{n+1},d_{n+1}$ là 4 số theo thứ tự giảm dần của 4 số

$$\frac{a_n+d_n}{2},b_n,c_n,\frac{a_n+d_n}{2}$$

(2) $F(a_n,b_n,c_n,d_n)\le F(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1},d_{n+1})$

Từ tính chất (1) ta suy ra: $0 \le a_{n+2} - d_{n+2} \le \frac{a_n - d_n}{2}, n \ge 0$

Và vì thế a_n, b_n, c_n, d_n cùng có giới hạn là $\frac{1}{4}$.

Do tính liên tục của hàm $F(a,b,c,d)$ ta có:

$$F(a,b,c,d) < \lim_{n\to\infty} F(a_n,b_n,c_n,d_n) = F\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi: bốn số bằng $\frac{1}{4}$ khi dãy vô hạn, hay một số bằng 0 và ba số còn lại bằng $\frac{1}{3}$ khi dãy hữu hạn.

Bài toán 6.16: Cho $a,b,c \ge -1, a+b+c=1$.

Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \le \frac{9}{10}$.

Hướng dẫn giải

Bổ đề: Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Nếu $(x+y)(xy-3) \le 0$ thì $f(x) + f(y) \le 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Chứng minh: Ta có: $f(x) + f(y) \le 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[x(1+y^2) + y(1+x^2)\right]\left[\left(4+(x+y)^2\right)\right] \le 4(x+y)(1+x^2)(1+y^2)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left[4(1+x^2)(1+y^2) - (1+xy)(4+x^2+y^2+2xy)\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left[2x^2y^2 + 3(x^2+y^2) - 6xy - (x^2+y^2xy)\right] \ge 0$$

$\Leftrightarrow (x+y)(3-xy)(x-y)^2 \ge 0$. Từ đó suy ra đpcm

Trở lại bài toán. Ta xét hai trường hợp

- Tồn tại 1 trong 3 số, chẳng hạn *c*, sao cho $-\frac{1}{3} \le c \le 1$. Khi đó:

$$a+b \ge 0, ab \le \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(1-c)^2}{4} < 3; c + \frac{1}{3} \ge 0, \frac{c}{3} < 3$$

$$\frac{(a+b)}{2}+\frac{\left(c+\frac{1}{3}\right)}{2}\geq 0,\left[\frac{(a+b)}{2}\right]\left[\frac{\left(c+\frac{1}{3}\right)}{2}\right]\leq\frac{\left(a+b+c+\frac{1}{3}\right)^2}{4}=\frac{4}{9}<3$$

Áp dụng bổ đề ta có:

$$f(a)+f(b)+f(c)+f\left(\frac{1}{3}\right)\leq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(\frac{c+\frac{1}{3}}{2}\right)\leq 4f\left(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+\frac{1}{3}}{2}}{2}\right)$$

$=4f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{10}$. Từ đó suy ra đpcm.

- Cả ba số *a, b, c* đều không nằm trong đoạn $\left[-\frac{1}{3};1\right]$. Khi đó do điều kiện $a,b,c\geq -1$, ta phải có hai số âm và 1 số dương (Nếu ngược lại, giả sử $b,c>0$ thì ta có $a+b+c>-1+1+1=1$, vô lý). Giả sử, chẳng hạn $a,b<0$.

Khi đó $f(a)+f(b)+f(c)\leq f(c)\leq\frac{1}{2}<\frac{9}{10}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài toán 6.17: Cho các số dương *a, b, c, d*. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacốpxki:

$$\left[\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\right]$$

$$\left[a(b+2c+3d)+b(c+2d+3a)+c(d+2a+3b)+d(a+2b+3c)\right]\geq(a+b+c+d)^2$$

Do đó: $\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}$

$$\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Ta chứng minh: $\dfrac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)} \ge \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 3(a+b+c+d)^2 \ge 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 \ge 0$: Đúng

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d$.

Bài toán 6.18: Cho 3 số không âm *x, y, z* thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{4+2\ln(1+x)-y}+\frac{1}{4+2\ln(1+y)-z}+\frac{1}{4+2\ln(1+z)-x}$$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra $0 \le x,y,z \le 3$ nên $4+2\ln(x+1)-y>0$

và $4+2\ln(y+1)-z>0$ và $4+2\ln(z+1)-x>0$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$P \ge \frac{9}{12+2\ln(x+1)-x+2\ln(y+1)-y+2\ln(z+1)-z}$$

Xét $f(t)=2\ln(1+t)-t$ với $0 \le t \le 3$ với $f'(t)=\dfrac{1-t}{1+t}$

$f'(t)=0$ có một nghiệm $t=1$.

Lập bảng biến thiên thì được:

$-1<f(t)\le -1+\ln 4$, suy ra: $-3<f(x)+f(y)+f(z)\le -3+3\ln 4$

Do đó: $P \ge \dfrac{3}{3+\ln 4}$ .min $P=\dfrac{3}{3+\ln 4}$ đạt được khi $x=y=z=1$.

Bài toán 6.19: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=|x|+\left|1+\dfrac{2}{x-1}\right|$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y=|x|+\left|1+\dfrac{2}{x-1}\right|=|x|+\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$. Điều kiện $x \ne 1$.

Khi $-1 \le x \le 0$ thì hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{1-x}$.

Ta có $y'=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x-1)^2}, y'=0 \Leftrightarrow x=1-\sqrt{2}$.

$y(-1)=1, y(0)=1, f\left(1-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-2$

So sánh thì $\min\limits_{-1\le x\le 0} y=2\sqrt{2}-2$ tại $x=1-\sqrt{2}$

Khi $x<-1$ hoặc $x>1$ thì $y>1>2\sqrt{2}-2$

Khi $0<x<1$ thì $y>1>2\sqrt{2}-2$

Vậy $\min y=2\sqrt{2}-2$ tại $x=1-\sqrt{2}$.

Bài toán 6.20: Cho các số nguyên dương *p, q, n*.

a) Tìm giá trị lớn nhất của $y=\cos^p x.\sin qx$ với $0\le x\le\frac{\pi}{2}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $y=\tan^n x+\cot^n x-n^2\cos^2 2x, 0<x<\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

a) Với $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ thì $\sin x\ge 0, \cos x\ge 0$ nên $y\ge 0$.

Ta có $y^2=\left(\cos^2 x\right)^p.\left(\sin^2 x\right)^p$. Đặt $t=\cos^2 x, 0\le t\le 1$ thif

$$y^2=f(t)=t^p.(1-t)^q, f'(t)=t^{p-1}.(1-t)^{q-1}.\left[p-(p+q)t\right]$$

nên $f'(t)=0\Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=\frac{p}{p+q}$ hoặc $t=1$.

Ta có $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{p}{p+q}\right)=\frac{p^p.q^q}{(p+q)^{p+q}}>0$ nên suy ra $\max y=\sqrt{\frac{p^p.q^q}{(p+q)^{p+q}}}$

b) Xét $0<x\le\frac{\pi}{4}$ thì $\cot x>\tan x>0, \sin 4x>0$

Ta có $y'=n\tan^{n-1}x\left(1+\tan^2 x\right)-n.\cot^{n-1}x\left(1+\cot^2 x\right)$

$=n\left(\tan^{n-1}x-\cot^{n-1}x\right)+n\left(\tan^{n+1}x-\cot^{n+1}x\right)-2n^2\sin 4x<0$

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ nên $\min\limits_{x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)} f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$.

Vậy $\min y=2$.

Bài toán 6.21: Cho các số thực *x, y* thỏa mãn $(x+y)^3+4xy\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=3(x^4+y^4+x^2y^2)-2(x^2+y^2)+1$.

Hướng dẫn giải

Kết hợp $(x+y)^3+4xy\ge 2$ với $(x+y)^2\ge 4xy$ suy ra:

$$(x+y)^3+(x+y)^2\ge 2\Rightarrow x+y\ge 1.$$

$$A=3(x^4+y^4+x^2y^2)-2(x^2+y^2)+1$$

$$=\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2+\frac{3}{2}(x^4+y^4)-2(x^2+y^2)+1$$

$$\ge\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2+\frac{3}{4}(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)+1$$

$\Rightarrow A\ge\frac{9}{4}(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)+1$. Đặt $t=x^2+y^2$, ta có

$x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}\ge\frac{1}{2}\Rightarrow t\ge\frac{1}{2}$, do đó $A\ge\frac{9}{4}t^2-2t+1$

Xét $f(t)=\frac{9}{4}t^2-2t+1; f'(t)=\frac{9}{2}t-2>0$ với mọi $t\ge\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \min\limits_{t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}$. Do đó $A\ge\frac{9}{16}$ dấu = xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của *A* bằng $\frac{9}{16}$.

Bài toán 6.22: Cho *a, b, c* là các số thực thỏa mãn $4(a+b+c)-9=0$. Tìm GTNN của $S=\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)^a\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)^b\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)^c$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\ln S=a\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)+b\ln\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)+c\ln\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)$

Xét hàm số $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}; f''(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}>0,\ \forall x.$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lõm trên $\mathbb{R}$ nên có tiếp tuyến tại mọi điểm luôn nằm dưới đồ thị. Tiếp tuyến của $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ tại $x=\frac{3}{4}$ là

$$y=\left(\ln 2+\frac{3}{5}\right)x-\frac{9}{20}.$$

Do đó $x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\geq\left(\ln 2+\frac{3}{5}\right)x-\frac{9}{20}, \forall x\in\mathbb{R}$ và đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{3}{4}$. Từ đó, ta được

$$M=f(a)+f(b)+f(c)\geq\left(\ln 2+\frac{3}{5}\right)(a+b+c)-\frac{27}{20}$$

$$=\left(\ln 2+\frac{3}{5}\right)\frac{9}{4}-\frac{27}{20}=\frac{9\ln 2}{4} \text{ nên } \ln S\geq\frac{9\ln 2}{4}\Leftrightarrow S\geq 2^{\frac{9}{4}}=4\sqrt[4]{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $4\sqrt[4]{2}$, đạt được khi $a=b=c=\frac{3}{4}$.

Bài toán 6.23: Cho $x>0$ và y tùy ý. Tìm GTLN, GTNN của

$$M=\frac{xy^2}{\left(x^2+3y^2\right)\left(x+\sqrt{x^2+12y^2}\right)}$$

Hướng dẫn giải

Xét $y=0$ thì $M=0$. Xét $y\neq 0$ thì:

$$M=\frac{xy^2\left(\sqrt{x^2+12y^2}-x\right)}{\left(x^2+3y^2\right).12y^2}=\frac{\sqrt{1+\frac{12y^2}{x^2}}-1}{3\left(4+\frac{12y^2}{x^2}\right)}$$

Đặt $t=\frac{12y^2}{x^2}, t>0$ thì $M=f(t)=\frac{\sqrt{1+t}-1}{3(t+4)}$

Ta có $f'(t)=\frac{2-t+2\sqrt{1+t}}{6(t+4)^2.\sqrt{1+t}}, f'(t)=0\Leftrightarrow t=8$.

BBT

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$1/18$	$\searrow$	0

Do đó: $0 < M \le \frac{1}{18}$. Kết hợp thì $0 \le M \le \frac{1}{18}$.

Vậy max $M = \frac{1}{18}$ khi $2x^2 = 3y^2$, min $M = 0$ khi $y = 0$.

Bài toán 6.24: Cho các số thực *x, y, z* không âm thỏa mãn điều kiện:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2 + 3xyz$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $x^3 + y^3 + z^3 = 2 + 3xyz$

$\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 2$

$\Leftrightarrow (x + y + z)\left[\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2}(x + y + z)^2\right] = 2$

Đặt $t = x + y + z$. Khi đó $t > 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{t^2}{3} + \frac{4}{3t}$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{4}{3t}$ trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(t) = \frac{2}{3}t - \frac{4}{3t^2} = \frac{2(t^3 - 2)4}{3t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{2}$

Lập BBT thì $\min\limits_{t \in (0;+\infty)} f(t) = f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$, đạt được khi $t = \sqrt[3]{2}$

Ta có $P \ge x^2 + y^2 + z^2 \ge \sqrt[3]{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt[3]{2}, y = z = 0$.

Vậy $\min P = \sqrt[3]{4}$, đạt được khi $x = \sqrt[3]{2}, y = z = 0$.

Bài toán 6.25: Cho các số thực *x, y* thỏa mãn điều kiện:

$$x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}.$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x\ge y\ge 1$. Suy ra $x+y\ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức $(au+bv)^2\le(a^2+b^2)(u^2+v^2)$ ta có:

$$(x+y)^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}\right)^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2}.\sqrt{y+1}\right)^2\le 3(x+y)$$

Suy ra $0\le x+y\le 3$. Đặt $t=x+y$ thì $t\in[0;3]$

$$P=(x+y)^2+2(x+y)+8\sqrt{4-(x+y)}+2=t^2+2t+8\sqrt{4-t}+2$$

Xét hàm $f(t)=t^2+2t+8\sqrt{4-t}+2$ trên $[0;3]$

$$f'(t)=2t+2-\frac{4}{\sqrt{4-t}};f''(t)=2-\frac{2}{\left(\sqrt{4-t}\right)^3}>0$$ với mọi $t\in[0;3]$

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $[0;3]$

Do đó $f'(t)>f'(0)=0$ với mọi $t\in[0;3]$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0;3]$

Vậy $\max P=\max\limits_{[0;3]}f(t)=f(3)=25$, đạt khi $t=3\Leftrightarrow x=2,y=1$

$\min P=\min\limits_{[0;3]}f(t)=f(0)=18$, đạt khi $t=0\Leftrightarrow x=1,y=1$

Bài toán 6.27: Cho các số thực *x, y, z* không âm thỏa mãn:

$$x\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{2-x^2}=2$$

Hướng dẫn giải

Ta có $(a-b)^2\ge 0\Rightarrow ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$ với mọi *a, b*. Áp dụng:

$$x\sqrt{2-y^2}\le\frac{x^2+2-y^2}{2},y\sqrt{2-x^2}\le\frac{y^2+2-x^2}{2}$$

Suy ra $2=x\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{2-x^2}\le 2$.

Do đó dấu đẳng thức xảy ra nên $x=\sqrt{2-y^2}$ và $y=\sqrt{2-x^2}$.

Suy ra $x, y \geq 0$ và $x^2 + y^2 = 2$

Đặt $t = x + y$. Khi đó $0 \leq t \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = 2$

Đặt $t = x + y$. Khi đó $t \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = 2$

Mặt khác $t^2 = (x + y)^2 \geq x^2 + y^2 = 2$. Suy ra $t \geq \sqrt{2}$

Do đó $t \in \left[\sqrt{2}; 2\right]$. Ta có $xy = \dfrac{(x + y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = \dfrac{t^2}{2} - 1$

Suy ra $P = (x + y)^3 + 12(x + y) - 12xy - 12 + \sqrt{xy}$

$$= (x + y)^3 + 12(x + y) - 12\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) - 12 + \sqrt{\frac{t^2}{2} - 1}$$

$$= t^3 - 6t^2 + 12t + \sqrt{\frac{t^2}{2} - 1}$$

Xét hàm $f(t) = t^3 - 6t^2 + 12t + \sqrt{\dfrac{t^2}{2} - 1}$ trên $\left[\sqrt{2}; 2\right]$. Ta có:

$f'(t) = 3t^2 - 12t + 12 + \dfrac{t}{2\sqrt{\left(\dfrac{t^2}{2} - 1\right)^3}} > 0$, với mọi $t \in \left[\sqrt{2}; 2\right]$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{2}; 2\right]$

Vậy $\max\limits_{\left[\sqrt{2};2\right]} f(t) = f(2) = 9$; $\min\limits_{\left[\sqrt{2};2\right]} f(t) = f\left(\sqrt{2}\right) = 14\sqrt{2} - 12$.

Bài toán 6.28: Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn điều kiện:

$$x + y + z = 4 \text{ và } xy + yz + zx = 5$$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} y + z = 4 - x \\ yz = 5 - x(4 - x) \end{cases}$

$$S^2 \geq 4P \Leftrightarrow (4 - x)^2 \geq 4\left[5 - x(4 - x)\right] \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 2$$

Mà: $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$

$=(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right]+3xyz$

$=4+3xyz$, nên

$P=(4+3xyz).\dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=\dfrac{20}{xyz}+15=\dfrac{20}{x^3-4x^2+5x}+15$

Xét hàm $f(x)=x^3-4x^2+5x$ trên $\left[\dfrac{2}{3};2\right]$

$f'(x)=3x^2-8x+5, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1, x=\dfrac{5}{3}$

$f(1)=f(2)=2, f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{5}{27}, f\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{50}{27}$

Do đó $0<f(x)\le 2$ với mọi $x\in\left[\dfrac{2}{3};2\right]$ nên $P\ge 25$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=2, y=z=1$ hoặc các hoán vị

Vậy $\min P=25$, đạt được khi $x=2, y=z=1$ hoặc các hoán vị.

Bài toán 6.29: Cho các số thực dương *a, b, c*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{9}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}}-\frac{16}{\sqrt{1+a^2+b^2+c^2}}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $1+a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{1}{2}(1+a)^2+\dfrac{1}{2}(b+c)^2\ge\dfrac{1}{4}(1+a+b+c)^2$

Suy ra: $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2+c^2}}\le\dfrac{2}{1+a+b+c}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}\le\dfrac{a+b}{2}.\dfrac{a+2c+b+2c}{2}$

$=\dfrac{1}{4}(a+b)(a+b+4c)=\dfrac{1}{12}.3(a+b)(a+b+4c)$

$\le\dfrac{1}{12}\dfrac{\left[3(a+b)+(a+b+4c)\right]^2}{4}=\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}}\ge\dfrac{3}{(a+b+c)^2}$

nên $P \geq \frac{27}{(a+b+c)^2} - \frac{32}{1+a+b+c}$

Đặt $t = a+b+c$ thì $t > 0$ và $P \geq \frac{27}{t^2} - \frac{32}{t+1}$

Xét hàm $f(t) = \frac{27}{t^2} - \frac{32}{t+1}$ trên $(0;+\infty), f'(t) = -\frac{54}{t^3} + \frac{32}{(t+1)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t-3)(16t^2+21t+9) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Lập BBT thì $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = -5$

Do đó $P \geq -5$, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là −5, đạt khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 6.30: Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 4^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|+2}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $|\sin x| = t, 0 \leq t \leq 1$ thì $y = 4^t + 2^{\sqrt{1-t^2}+2}, 0 \leq t \leq 1$.

$$y' = 4^t \ln 4 + 2^{\sqrt{1-t^2}+2}.\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 4^t = 2^{\sqrt{1-t^2}}.\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}} \Leftrightarrow \frac{2^{2t}}{2t} = \frac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}$

Xét hàm số $f(u) = \frac{2^u}{u}, 0 < u < 2$.

$f'(u) = \frac{u2^u \ln 2 - 2^u}{u^2} = \frac{2^u(u.\ln 2 - 1)}{u^2}; f'(u) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < u \leq \frac{1}{\ln 2}$

Vì $1 < \frac{1}{\ln 2} < 2$ và $f(1) = f(2) = 2$.

Suy ra $f(u) \leq 2, \forall u \in [1;2]$ và $f(u) > 2, \forall u \in (0;1)$

Giả sử $1 \leq 2t < 2$ thì $\frac{2^{2t}}{2t} \leq 2 < \frac{2^{\sqrt{1+t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}$: không thỏa mãn.

Do đó $0 < 2t < 1$. Vì $f(u)$ nghịch biến trên $(0;1)$ nên phương trình

$f(2t)=f\left(\sqrt{1-t^2}\right)\Leftrightarrow 2t=\sqrt{1-t^2}\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{5}}$

Ta có $y(0)=9, y(1)=8, y\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=5.4^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$, so sánh thì

$\min y=8$, khi $\cos x=0$ và $\max y=5.4^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$, khi $|\sin x|=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Bài toán 6.31: Cho các số thực *x, y, z* thỏa mãn $x+y+z=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6x^2+6y^2+6z^2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $x+y+z=0$ nên $z=-(x+y)$ và có 2 số không âm hoặc không dương. Do tính chất đối xứng ta có thể giả sử $xy\geq 0$

Ta có $P=3^{|x-y|}+3^{|2y+x|}+3^{|2x+y|}-\sqrt{12\left(x^2+y^2+xy\right)}$

$=3^{|x-y|}+3^{|2y+x|}+3^{|2x+y|}-\sqrt{12\left[(x+y)^2-xy\right]}$

$\geq 3^{|x-y|}+2.3^{\frac{|2y+x|+|2x+y|}{2}}-\sqrt{12\left[(x+y)^2-xy\right]}$

$\geq 3^{|x-y|}+2.3^{\frac{3|x+y|}{2}}-2\sqrt{3}|x+y|$

Đặt $t=|x+y|\geq 0$, xét $f(t)=2.\left(\sqrt{3}\right)^{3t}-2\sqrt{3}t$

$f'(t)=2.3\left(\sqrt{3}\right)^{3t}.\ln\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}.\left(\sqrt{3}.\left(\sqrt{3}\right)^{3t}\ln\sqrt{3}-1\right)>0$

$\Rightarrow f$ đồng biến trên $[0;+\infty)\Rightarrow f(t)\geq f(0)=2$

Mà $3^{|x-y|}\geq 3^0=1$ nên $P\geq 3^0+2=3$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=0$.

Vậy $\min P=3$.

Bài toán 6.32: Cho các số thực không âm *a, b, c* thỏa mãn điều kiện: $3\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+bc+ca=12$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+ab+bc+ca$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết *a, b, c* không âm thỏa mãn:

$3\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+bc+ca=12$ ta có $a+b+c=\sqrt{24-5\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Và $12 \ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \le 4$

$12 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)+a^2+b^2+c^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 3$

Suy ra $a^2+b^2+c^2 \in [3;4]$

Đặt $t=\sqrt{24-5\left(a^2+b^2+c^2\right)}$ thì $t \in [2;3]$

Do đó $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{24-5\left(a^2+b^2+c^2\right)}}+12-3\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$$=\frac{\frac{1}{5}\left(24-t^2\right)}{t}+12-3\frac{24-t^2}{5}=\frac{1}{5}\left(3t^2-t+\frac{24}{t}\right)-\frac{12}{5}$$

Xét hàm $f(t)=3t^2-t+\dfrac{24}{t}$ trên $[2;3]$.

$f'(t)=6t-1-\dfrac{24}{t^2}=(t-1)+\left(5t-\dfrac{24}{t^2}\right)>0$ với mọi $t \in [2;3]$

nên *f* đồng biến trên đoạn $[2;3]$.

Do đó $\max\limits_{[2;3]} f(t)=f(3)=32; \min\limits_{[2;3]} f(t)=f(2)=22$ nên $2 \le P \le 4$.

Vậy $\max P=4$, đạt khi $a=b=c=1$.

$\text{Min}\, P=2$, đạt khi $a=2, b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài toán 6.33: Cho các số dương *x, y, z* thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2+\left(\frac{y+2\sqrt{yz}+x}{y+1}\right)^2+\left(\frac{z+2\sqrt{zx}+y}{z+1}\right)^2$$

Hướng dẫn giải

Với 2 vectơ u, v ta có $|u.v| \le |u|.|v|$

Chọn $u=\left(x;\sqrt{2x};1\right), v=\left(1;\sqrt{2y};z\right)$ thì

$$\left(x+2\sqrt{xy}+z\right)^2=\left(x-1+\sqrt{2x}.\sqrt{2y}+1.z\right)^2 \le \left(x^2+2x+1\right)\left(1+2y+z^2\right)$$

Do đó: $\left(\dfrac{x+2\sqrt{xy}+z}{x+1}\right)^2 \le 1+2y+z^2$.

Tương tự $\left(\dfrac{y+2\sqrt{yz}+x}{y+1}\right)^2 \le 1+2z+x^2; \left(\dfrac{z+2\sqrt{zx}+y}{z+1}\right)^2 \le 1+2x+y^2$

Nên $P \le 3+2(x+y+z)+x^2+y^2+z^2 \le 6+2\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} = 12$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của *P* là 12, dấu = khi $x=y=z=1$.

Bài toán 6.34: Cho các số thực *x, y, z* đều thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^3+3}{y^2+2}+\frac{y^3+3}{z^2+2}+\frac{z^3+3}{x^2+2}.$$

Hướng dẫn giải

Vì $a,b\in[0;1]$ nên ta có:

$$\frac{a^3+3}{b^2+2} \le \frac{a^2+3}{b^2+2} = (a^3+3).\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2}{b^2+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+3)-\frac{1}{2}(a^2+3).\frac{b^2}{b^2+2}$$

$$\le \frac{1}{2}(a^2+3)-\frac{1}{2}(a^2+3).\frac{b^2}{3} = \frac{1}{2}(a^2-b^2)+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}a^2b^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a,b\in\{0;1\}$.

Tương tự: $\dfrac{b^3+3}{c^2+2} \le \dfrac{1}{2}(b^2-c^2)+\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{6}b^2c^2$

$$\frac{c^3+3}{a^2+2} \le \frac{1}{2}(c^2-a^2)+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}c^2a^2$$

Suy ra $P \le \dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{6}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \le \dfrac{9}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của *P* là $\dfrac{9}{2}$, đạt được khi trong ba số *a, b, c* có nhiều nhất một số bằng 1, các số còn lại bằng 0.

Bài toán 6.35: Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn điều kiện:

$4(x+y+z)=3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{2+x+yz}+\frac{1}{2+y+zx}+\frac{1}{2+z+xy}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $3xyz = 4(x+y+z) \geq 4.3\sqrt{xyz}$ nên $xyz \geq 8$

Và: $2 + x + yz \geq 2\sqrt{2\sqrt{2x}} + yz \geq 2\sqrt{2\sqrt{2x}.yz} = 2\sqrt{2\sqrt{2xyz}.\sqrt{yz}} \geq 4\sqrt{2}.\sqrt[4]{yz}$

Suy ra $\dfrac{1}{2+x+yz} \leq \dfrac{1}{4\sqrt{2}}.\dfrac{1}{\sqrt[4]{yz}} \leq \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{yz}}\right)$

$\leq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{yz}\right) = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{yz}\right)$

Tương tự: $\dfrac{1}{2+x+yz} \leq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{zx}\right), \dfrac{1}{2+x+yz} \leq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{xy}\right)$

Do đó $P \leq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx}\right) = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{8}$

Vậy $\max P = \dfrac{3}{8}$, khi $x = y = z = 2$.

Bài toán 6.36: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\begin{cases} -x^2 + 4x + 21 \geq 0 \\ -x^2 + 3x + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 5$. Với $-2 < x < 5$:

$$y' = \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+21}} - \frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x+10}}$$

$$= \frac{(4-2x)\sqrt{-x^2+3x+10} - (3-2x)\sqrt{-x^2+4x+21}}{2\sqrt{-x^2+4x.21}.\sqrt{-x^2+3x+10}}$$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow (4-2x)\sqrt{-x^2+3x+10} = (3-2x)\sqrt{-x^2+4x+21}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4-2x)(3-2x) \geq 0 \\ (4-2x)^2(-x^2+3x+10) = (3-2x)^2(-x^2+4x+11) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \text{ hay } x > 2 \\ -51x^2 + 104x - 29 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Ta có $y(-2)=3; y=\frac{1}{3}=\sqrt{2}; y(5)=4$. Vậy $\min y=\sqrt{2}$ tại $x=\frac{1}{3}$.

Bài toán 6.37: Cho hàm số *f*, xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$$f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x).f(1-x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Hướng dẫn giải

Đặt $z=\cot x$ thì $f(z)=f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x=\frac{z^2+2z-1}{z^2+1}$

suy ra $g(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+1}.\frac{(1-x)^2+2(1-x)-1}{(1-x)^2+1}$

Đặt $y=1-x$ và $t=xy$. Do $x\in[-1;1]$ nên ta có $t\in\left[-2;\frac{1}{4}\right]$

thì $g(x)=\frac{t^2+8t-2}{t^2-2t+2}=h(t)$

$h'(t)=-\frac{2(5t^2-4t-6)}{(t^2-2t+2)^2}, h'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{2-\sqrt{34}}{5}$

Lập BBT thì: $\max\limits_{x\in[-1;1]} g(x)=\max\limits_{t\in\left[-2;\frac{1}{4}\right]} h(t)=h\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{25}$

$\min\limits_{x\in[-1;1]} g(x)=\min\limits_{t\in\left[-2;\frac{1}{4}\right]} h(t)=h\left(\frac{2-\sqrt{34}}{5}\right)=4-\sqrt{34}$.

Bài toán 6.38: Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$$

Ta có $(a+c)(b+c)=4c^2\Leftrightarrow\left(\frac{a}{c}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)=4$

Đặt $x=\frac{a}{c}; y=\frac{b}{c}$ thì $(x+1)(y+1)=4$

$\Leftrightarrow S+P=3\Leftrightarrow P=3-S$. Do đó

$$P=32\left[\left(\frac{x}{y+3}\right)^3+\left(\frac{y}{x+3}\right)^3\right]-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\geq 8\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=8\left[\frac{S^2+3S-2P}{3S+P+9}\right]^3-\frac{S}{\sqrt{2}}=8\left[\frac{S^2+3S-2(3-S)}{3S+(3-S)+9}\right]^3-\frac{S}{\sqrt{2}}$$

$$=8\left(\frac{S^2+5S-6}{2S+12}\right)^3-\frac{S}{\sqrt{2}}=8\left(\frac{S-1}{2}\right)^3-\frac{S}{\sqrt{2}}$$

$$=(S-1)^3-\frac{S}{\sqrt{2}},S\geq 2$$

$$P'=3(S-1)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}0,\forall S\geq 2$$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi $x=y=1$.

Vậy $\min P=P(2)=1-\sqrt{2}$.

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 6.1: Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $\tan x>x+\frac{x^3}{3}$ với mọi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

b) $b.\tan a>a.\tan b$ với $0<a<b<\frac{\pi}{2}$

Hướng dẫn

a) Xét $f(x)=\tan x-x-\frac{x^3}{3},0\leq x<\frac{\pi}{2}$

b) Xét $f(x)=\frac{\tan x}{x},0<x<\frac{\pi}{2}$

Bài toán 6.2: Cho *a, b, c* là các số dương, đặt $X=\frac{b+c}{a+b+c},Y=\frac{c+a}{a+b+c}$.

Chứng minh $\frac{1}{1+X^2}+\frac{1}{1+Y^2}\leq\frac{8}{5}$.

Hướng dẫn

$X+Y=\dfrac{a+b+2c}{a+b+c}\ge 1$, nếu cố định X và giảm giá trị của Y thì vế trái của bất đẳng thức tăng lên nên ta chỉ cần chứng minh khi $X+Y=1$.

Bài toán 6.3: Chứng minh

a) $\dfrac{(a-b)^2}{8a}\le\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\le\dfrac{(a-b)^2}{8b}$ với $a\ge b>0$.

b) $\dfrac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2}+\dfrac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{(c+b-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2}\ge\dfrac{1}{2}$ với $a,b,c>0$.

Hướng dẫn

a) Dùng định lý Lagrange

b) VT bậc 0. Đặt $x=\dfrac{a}{(a+b+c)},y=\dfrac{b}{(a+b+c)},z=\dfrac{c}{(a+b+c)}$

Bài toán 6.4: Chứng minh

a) $\dfrac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\dfrac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\dfrac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\le\dfrac{6}{5}$ với $a,b,c>0$.

b) $\dfrac{a}{a^2+1}+\dfrac{b}{b^2+1}+\dfrac{c}{c^2+1}\le\dfrac{9}{10}$ với $a,b,c\ge\dfrac{-3}{4}$ và $a+b+c=1$.

Hướng dẫn

a) Chuẩn hóa: $a+b+c=3$ và dùng tiếp tuyến tại $x=1$

b) Tiếp tuyến tại $x=\dfrac{1}{3}$ của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Bài toán 6.5: Chứng minh

a) $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\ge\sqrt{3}$ với tam giác *ABC*.

b) $\dfrac{2x^n}{1+x^{n+1}}\le\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{n-1}\le\dfrac{1}{n}.\dfrac{x^n-1}{x-1}$ với $x>0,x\ne 1,n\ge 1,n\in\mathbb{N}$

Hướng dẫn

a) Dùng bất đẳng thức Jensen cho $f(x)=\tan\dfrac{x}{2},0<x<\pi$

b) Chứng minh bằng quy nạp

Bài tập 6.6: Cho *ABC* là tam giác có ba góc nhọn, cạnh là *a, b, c*. Chứng minh:

a) $\pi(a+b+c) \le 3(aA+bB+cC)$ b) $3(a+b+c) \le \pi\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\right)$

Hướng dẫn

a) Áp dụng bất đẳng thức Trebusep

b) Áp dụng bất đẳng thức Trebusep

Bài tập 6.7: Chứng minh bất đẳng thức:

a) $\frac{|x|}{2019+|x|}+\frac{|y|}{2019+|y|} \ge \frac{|x-y|}{2019+|x-y|}$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

b) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$ với $a,b,c>0$.

Hướng dẫn

a) Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{2019+t}, t \ge 0$,

b) BĐT $\Leftrightarrow (a+b)^2+(b+c)^2+(a+b)(b+c)$

$$\le \frac{a^2c}{b}+a^2+ab+ac+\frac{b^2(a+b)}{c}+b^2+ab+c^2+bc\frac{cb(b+c)}{a}$$

Bài toán 6.8: Chứng minh rằng:

a) $(\cot x)^{\cos 2x} \ge \frac{1}{\sin 2x}$ với $0<x<\frac{\pi}{2}$.

b) $\left|\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right| \le \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ với $a,b,c \in [1;2]$.

Hướng dẫn

a) Đặt $t=\tan^2 x, t>0$. Đưa về $t.\ln t \ge (t+1).\ln\frac{t+1}{2}$.

b) Dồn biến với giả sử $2 \ge a \ge b \ge c \ge 1$.

Xét $f(a)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \Rightarrow f'(a) \ge 0$

Bài tập 6.9: Cho các số dương *a, b, c, d*. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{b^4}{(b+c)(b^2+c^2)}+\frac{c^4}{(c+d)(c^2+d^2)}+\frac{d^4}{(d+a)(d^2+a^2)} \ge \frac{a+b+c+d}{4}$

b) $2(a^3+b^3+c^3)+3(a^2+b^2+c^2)+12abc \ge \frac{5}{3}, a+b+c=1$.

Hướng dẫn

a) Dùng BCS.

b) Đặt $x = ab + bc + ca, y = abc$.

Đưa về chứng minh: $18y - 12x + 5 \geq \frac{5}{3}$.

Bài toán 6.10: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $f(x) = \frac{1}{\sin x + 4} - \frac{1}{\cos x - 4}$

b) $f(x) = \frac{\sin^6 x|\cos x| + \cos^6 x|\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|}$

Hướng dẫn

a) Đặt $t = \cos x - \sin x$ rồi xét hàm.

Kết quả $\min f = \frac{4}{8 + \sqrt{2}}; \max f = \frac{4}{8 - \sqrt{2}}$

b) Kết quả $\max f = \frac{5}{27}, \min f = 0$.

Bài toán 6.11: Cho các số dương có tổng bằng 1

a) Tìm GTNN của $6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

b) Tìm GTLN của $\frac{1 - b - c}{\sqrt{1 + a^2}} + \frac{1 - c - a}{\sqrt{1 + b^2}} + \frac{1 - a - b}{\sqrt{1 + c^2}}$

Hướng dẫn

a) Dùng phương pháp tiếp tuyến. Kết quả $\frac{1}{8}$ khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$

b) Kết quả $\frac{3}{\sqrt{10}}$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài toán 6.12: Cho các số thực không âm *x, y* thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = (4x^3 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$$

Hướng dẫn

$$S = 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 9xy + 25xy$$

$$= 16x^2y^2 + 12\left[(x + y)^3 - 3xy(x + y)\right] + 34xy = 16x^2y^2 - 2xy + 12$$

Đặt $t = xy$, ta được $S = 16t^2 - 2t + 12$

$0 \le xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$

Xét hàm $f(t) = 16t^2 - 2t + 12$ trên đoạn $\left[0; \frac{1}{4}\right]$

Kết quả max $S = \frac{25}{2}$, $\min S = \frac{191}{16}$