

CHỦ ĐỀ 8: CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC (ý 2 bài 4 các đề)

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Gọi K là trung điểm BC .

- Chứng minh $\triangle AEF$ đồng dạng $\triangle ABC$.
- Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF .
- Đường phân giác góc FHB cắt AB và AC lần lượt tại M và N . Gọi I là trung điểm của MN , J là trung điểm của AH . Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài 2. Cho đường tròn (O) , dây CD cố định. Gọi B là điểm chính giữa cung nhỏ CD , kẻ đường kính AB cắt CD tại I . Lấy điểm H bất kỳ trên cung lớn CD , HB cắt CD tại E . Đường thẳng AH cắt đường thẳng CD tại P .

- Chứng minh: Tứ giác $PHIB$ nội tiếp.
- Chứng minh: $AH \cdot AP = AI \cdot AB$.
- Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và BP . Kẻ $KM \perp AB$ cắt AB tại M , cắt đường tròn (O) tại N . Chứng minh N, I, H thẳng hàng.

Bài 3. Cho đường tròn tâm (O) và dây BC cố định không đi qua O . Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho $AB < AC$. Kẻ đường kính AK , E là hình chiếu của C trên AK . M là trung điểm của BC .

- Chứng minh bốn C, E, M, O cùng thuộc một đường tròn.
- Kẻ $AD \perp BC$ tại D . Chứng minh $ADAK = ABAC$ và $DMDE$ cân.
- Gọi F là hình chiếu của B trên AK . Chứng minh khi A di chuyển trên cung lớn BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp $DDEF$ là 1 điểm cố định.

Bài 4. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AD . Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại E . Từ E kẻ EF vuông góc với AD ($F \in AD$). Đường thẳng CF cắt đường tròn tại điểm thứ hai là M . Giao điểm của BD và CF là N . Chứng minh :

- $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.
- FA là tia phân giác của $\angle BFM$.
- $BE \cdot DN = EN \cdot BD$.

Bài 5. Trên nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính BC , lấy điểm A sao cho $BA = R$.

- Chứng minh tam giác ABC vuông tại A và tính số đo các góc B, C của tam giác vuông ABC .
- Qua B kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn (O) , nó cắt tia CA tại D . Qua D kẻ tiếp tuyến DE với nửa đường tròn (O) (E là tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của OD và BE . Chứng minh rằng $OD \perp BE$ và $DI \cdot DO = DA \cdot DC$.
- Kẻ EH vuông góc với BC tại H . EH cắt CD tại G . Chứng minh IG song song với BC .

Bài 6. Cho đường tròn (O) cố định. Từ một điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn (O) , kẻ các tiếp tuyến AM và AN với đường tròn $(M; N$ là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C (B nằm giữa A và C). Gọi I là trung điểm của dây BC .

- Chứng minh rằng: $AMON$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi K là giao điểm của MN và BC . Chứng minh rằng: $AK \cdot AI = AB \cdot AC$
- Xác định vị trí của cát tuyến ABC để $IM = 2IN$.

Bài 7. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB vuông góc với dây CD tại điểm I (I nằm giữa A và O). Lấy điểm E bất kì trên cung nhỏ BC (E khác B và C). AE cắt CD tại K .

- Chứng minh bốn điểm K, E, B, I cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $AK \cdot AE = AI \cdot AB$.
- Gọi P là giao điểm của tia BE và tia DC , Q là giao điểm của AP và BK . Chứng minh IK là phân giác của $\angle IQ$. Chứng minh OQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQE .

Bài 8. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Dây cung MN vuông góc với AB , ($AM < BM$). Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB .

- Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.
- Chứng minh rằng $NB \cdot HK = AN \cdot HB$.
- Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 9. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính BC , đường thẳng qua O vuông góc với BC cắt AC tại D .

- Chứng minh rằng tứ giác $ABOD$ nội tiếp.
- Tiếp tuyến tại điểm A với đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm P , sao cho $PB = BO = 2\text{cm}$. Tính độ dài đoạn PA và số đo góc APC .

- Chứng minh rằng $\frac{PB}{PC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có hai đường cao BD, CE cắt nhau ở điểm H .

- Chứng minh: Tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.
- Tia CE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là G . Chứng minh: $DBHG$ cân ở B .
- Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng CH và CG . Đường thẳng NO cắt cạnh AC tại điểm P . Chứng minh: $CD \cdot CP = CM \cdot CG$ và $MB \perp MP$.

Bài 11. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường cao AD và đường phân giác trong AO (D, O thuộc cạnh BC). Kẻ OM vuông góc với AB tại M , ON vuông góc với AC tại N .

a) Chứng minh: Tứ giác $AMON$ nội tiếp

b) Chứng minh $\widehat{BDM} = \widehat{ODN}$

c) $\sin \frac{\widehat{BAC}}{2} \leq \frac{BC}{AB + AC}$

Bài 12. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(O; R)$ (A, B là các tiếp điểm). Đoạn thẳng OM cắt đường thẳng AB tại H và cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm I .

a) Chứng minh bốn điểm M, A, B, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ đường kính AD của $(O; R)$. Đoạn thẳng MD cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm C khác D . Chứng minh $MA^2 = MH \cdot MO = MC \cdot MD$.

c) Chứng minh $IH \cdot IO = IM \cdot OH$.

Bài 13. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . AD, BE, CF là ba đường cao của tam giác ABC cắt nhau tại H .

a) Chứng minh bốn điểm A, F, H, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ đường kính AM của đường tròn (O) . Chứng minh $AD \cdot AM = AB \cdot AC$

c) Gọi P là giao điểm của AH và EF . I là giao điểm của AM và BC . K là trung điểm của BC . Chứng minh: H, K, M thẳng hàng và $PI \parallel HK$.

Bài 14. Cho đường tròn (O, R) và dây AB cố định (AB không là đường kính). Gọi N là trung điểm của AB . Qua N , kẻ đường kính CD của đường tròn (O) (C thuộc cung nhỏ AB). Lấy điểm M bất kỳ trên cung lớn AB ($M \neq A, M \neq B$), MC cắt AB tại F . Hai đường thẳng DM và AB cắt nhau tại E .

a) Chứng minh bốn điểm M, N, C, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Hai đường thẳng DF và CE cắt nhau tại I . Chứng minh $KI \cdot KM = KC \cdot KD$ và NE là tia phân giác của $\widehat{MNI}$

c) Chứng minh rằng: $\frac{KC}{KD} = \frac{CN}{DN}$

Bài 15. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao BE, CF cắt nhau ở H .

a) Chứng minh bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Tia EF cắt tia CB tại M . Chứng minh: $MF \cdot ME = MB \cdot MC$

c) Tia AH cắt BC tại D . Đường thẳng qua B và song song với AC , cắt tia AD tại P , cắt đoạn thẳng AM tại Q . Chứng minh FC là tia phân giác của góc EFD và $BP = BQ$.

Bài 16. Cho tam giác ABC ba góc nhọn nội tiếp $(O; R)$, hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $BFCE$ nội tiếp và $AO \perp EF$

b) Chứng minh: $\sin^2 \angle BAC + \cos^2 \angle BAC = 1$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$

c) Gọi S là diện tích tam giác ABC , chứng minh: $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC$. Cho $AB = 6; AC = 8; BC = 2\sqrt{13}$ tính diện tích tam giác ABC

Bài 17. Cho $(O; R)$ đường kính AB cố định. Dây CD vuông góc với AB tại H nằm giữa A và O . Lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ. BF cắt CD tại I ; AF cắt tia DC tại K .

a) Chứng minh rằng tứ giác $AHIF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $HA \cdot HB = HI \cdot HK$.

c) Đường tròn ngoại tiếp ΔKIF cắt AI tại E . Chứng minh rằng khi H chuyển động trên đoạn OA thì E thuộc một đường tròn cố định.

Bài 18. Cho đường tròn (O) đường kính BC . Điểm A thuộc đường tròn thỏa mãn $AB < AC$ (A khác B, A khác C). Lấy điểm D trên cạnh AC sao cho $AD = AB$. Vẽ hình vuông $BADE$. Tia AE cắt (O) tại F .

a) Tam giác FBC là tam giác gì? Tại sao?

b) Chứng minh: $\angle FDC = \angle FCD$.

c) Vẽ tia Bx là tiếp tuyến của (O) tại B , Bx cắt CF tại I . Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Bài 19. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax , lấy P trên Ax

($AP > R$). Từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O) .

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, P, M, O cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh: $BM \parallel OP$. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N . Chứng minh tứ giác $OBMP$ là hình bình hành.

c) Giả sử AN cắt OP tại K ; PM cắt ON tại I ; PN cắt OM tại J . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài 20. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Điểm M nằm trên nửa đường tròn ($M \neq A; B$). Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) lần lượt tại C và D .

a) Chứng minh rằng: tứ giác $ACMO$ nội tiếp.

b) Gọi P là giao điểm CD và AB . Chứng minh: $PA \cdot PO = PC \cdot PM$

c) Gọi E là giao điểm của AM và BD; F là giao điểm của AC và BM. Chứng minh: Ba điểm E, F; P thẳng hàng.

Bài 21. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm S. Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ điểm O đến đường thẳng BC .

a) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng SO và SC . Chứng minh $\angle BAH = \angle CAD$.

c) Vẽ đường cao CE của tam giác ABC . Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BE . Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại điểm K. Chứng minh $BQ \cdot BA = BD \cdot BI$.

Bài 22. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 4 cm . Vẽ đường tròn tâm O đường kính AD ; kẻ BM là tiếp tuyến của đường tròn tâm O (M là tiếp điểm, $M \neq A$), BM cắt CD tại K.

a) Chứng minh 4 điểm A, B, M, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $OB \perp OK$ và $BM \cdot MK = \frac{AB^2}{4}$.

c) Đường thẳng AM cắt CD tại E. Chứng minh K là trung điểm của đoạn thẳng ED và tính chu vi của tứ giác $ABKD$.

Bài 23. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , kẻ đường cao BE của $\triangle ABC$. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ E đến AB và BC.

a) Chứng minh tứ giác $BHEK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $BH \cdot BA = BK \cdot BC$.

c) Kẻ đường cao CF của tam giác ABC ($F \in AB$) và I là trung điểm của EF . Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Bài 24. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Kẻ đường kính AQ của đường tròn (O) cắt cạnh BC tại I.

a) Chứng minh bốn điểm A, F, H, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\angle BAD = \angle CAQ$.

c) Gọi P là giao điểm của AH và EF . Chứng minh $\triangle AEP$ đồng dạng với $\triangle ABI$ và $PI \parallel HQ$.

Bài 25. Cho đường tròn (O) và điểm M ở ngoài đường tròn. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MPQ ($MP < MQ$). Gọi I là trung điểm của dây PQ.

a. Chứng minh bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn.

b. Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường thẳng BI và đường tròn (O). Chứng minh: $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ và $AE \parallel PQ$.

c. Gọi K là trung điểm của EA. Chứng minh ba điểm O; I; K thẳng hàng.

Bài 26. Cho đường tròn tâm (O), đường kính $AB = 2R$. Trên đường tròn (O) lấy điểm C bất kì (C không trùng với A và B). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BC ở điểm D. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng DO. Tia AH cắt đường tròn (O) tại điểm F (không trùng với A).

a) Chứng minh tứ giác AHCD nội tiếp được một đường tròn.

b) Chứng minh $\triangle CFH$ là tam giác vuông.

c) Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{BH \cdot BC}{BF}$.

Bài 27. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của (O). Đoạn thẳng MC cắt AB tại K và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Gọi I, H lần lượt là các giao điểm của MO với BD, AB.

a) Chứng minh bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MO song song với BC và $IM^2 = ID \cdot IB$.

c) Gọi L là giao điểm của IK, HC. Chứng minh ba điểm M, B, L thẳng hàng.

Bài 28. Cho nửa (O) đường kính $AB = 2R$, C là điểm bất kì nằm trên nửa đường tròn sao cho C khác A và $AC < CB$. Điểm D thuộc cung nhỏ BC sao cho: $\widehat{COD} = 90^\circ$. Gọi E là giao điểm của AD và BC, F là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của EF.

a) Chứng minh: CEDF là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh: $FC \cdot FA = FD \cdot FB$

c) Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O)

d) Hỏi khi C thay đổi thỏa mãn điều kiện bài toán, E thuộc đường tròn cố định nào?

Bài 29. Cho đường tròn (O; R) và dây MN cố định ($MN < 2R$). Kẻ đường kính AB vuông góc với dây MN tại E (điểm A thuộc cung nhỏ MN). Lấy điểm C thuộc dây MN (C khác M, N, E). Đường thẳng BC cắt (O; R) tại điểm K (K khác B).

a. Chứng minh AKCE là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh $BM^2 = BK \cdot BC$.

c. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AK và MN; D là giao điểm của hai đường thẳng AC và BI. Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của $\triangle DEK$.

Bài 30. Cho nửa đường tròn tâm O , bán kính $AB = 2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB . Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E ; MB cắt nửa đường tròn (O) tại D ($D \neq B$).

- Chứng minh rằng bốn điểm A, M, C, O cùng thuộc một đường tròn.
- Tính diện tích hình quạt OCB theo R , trong trường hợp $\angle AMC = 60^\circ$ và chứng minh $\angle ADE = \angle ACO$.
- Gọi H là hình chiếu của C trên AB . Chứng minh rằng MB đi qua trung điểm của CH .

Bài 31. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ các tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn $(O; R)$, (P và Q là các tiếp điểm). Kẻ đường kính PA . Tiếp tuyến tại A với đường tròn $(O; R)$ cắt PQ tại B .

- Chứng minh: AQ song song với OM .
- Chứng minh: $PQ \cdot PB = 4R^2$.
- Gọi K là trung điểm của MO . Tia PK cắt AQ tại I . Chứng minh tứ giác $MIAO$ là hình bình hành.

Bài 32. Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . Từ điểm M bất kì trên tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến thứ hai MC (C là tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của OM và AC .

- Chứng minh bốn điểm A, M, C, O cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $OI \cdot OM = OA^2$ và $OM \parallel BC$.
- Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB , MB cắt đường tròn (O) tại D và cắt CH tại K . Chứng minh K là trung điểm của CH .

Bài 33. Cho tứ giác $ABCD$ có AB nhỏ hơn AD ; BC nhỏ hơn CD nội tiếp đường tròn đường kính BD , AB cắt DC tại E ; CB cắt DA tại F , DB cắt EF tại G .

- Chứng minh rằng $BD \perp EF$ tại G
- Chứng minh bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh rằng $BA \cdot BE = BC \cdot BF = BD \cdot BG$

d. Chứng minh rằng B là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ACG$

Bài 34. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .

- Chứng minh bốn điểm A, B, D, E cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $DB \cdot DC = DH \cdot DA$.
- Đường thẳng AO cắt đường tròn tâm O tại điểm K khác điểm A . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng HK và BC . Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng BC .

d) Tính $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$.

Bài 35. Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AK , BE và CF cắt nhau tại H . Gọi I là trung điểm của đoạn AH , N là trung điểm của đoạn BC .

- Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.
- Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH .
- Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Bài 36. Cho đường tròn (O) và dây cung AB . Trên tia đối của tia AB lấy điểm C . Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ của đường tròn (O) cắt dây AB tại D . Tia CP cắt đường tròn (O) tại điểm I (điểm I khác điểm P). Các dây AB và QI cắt nhau tại K .

- Chứng minh tứ giác $PDKI$ nội tiếp.
- Chứng minh rằng $CI.CP = CK.CD$ và IC là phân giác góc ngoài tại đỉnh I của tam giác AIB .
- Giả sử ba điểm A, B, C cố định. Chứng minh khi đường tròn (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua hai điểm A và B thì đường thẳng QI luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 37. Cho đường tròn (O) , từ điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm), OA cắt BC tại E .

- Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.
- Chứng minh BC vuông góc với OA và $BA.BE = AE.BO$.
- Gọi I thuộc đoạn thẳng BE , đường thẳng qua I và vuông góc OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D và F . Chứng minh F là trung điểm của AC .

Bài 38. Cho đường tròn (O) , từ điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm), OA cắt BC tại E .

- Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.
- Chứng minh BC vuông góc với OA và $BA.BE = AE.BO$.
- Gọi I thuộc đoạn thẳng BE , đường thẳng qua I và vuông góc OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D và F . Chứng minh F là trung điểm của AC .

Bài 39. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và AH là đường cao của tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB và AC .

- Chứng minh bốn điểm A, M, H, N cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $\angle ABC = \angle ANM$ và OA vuông góc với MN .
- Cho biết $AH = R\sqrt{2}$. Chứng minh M, O, N thẳng hàng.

Bài 40. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không đi qua tâm. Gọi A là một điểm bất kì trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Kẻ các đường cao AD, BE của tam giác ABC .

- Chứng minh: Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
- Kẻ đường kính AK của đường tròn tâm O . Gọi F là hình chiếu của điểm B trên AK . Chứng minh rằng: $AB \cdot AC = AK \cdot AD$ và $DF \perp AC$
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh: ba điểm E, F, M thẳng hàng.

Bài 41. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc tại O . Gọi I là trung điểm của OB . Tia CI cắt đường tròn (O) tại E . Gọi H là giao điểm của AE và CD .

- Chứng minh bốn điểm O, I, E, D cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh: $AH \cdot AE = 2R^2$ và $OA = 3 \cdot OH$.
- Gọi K là hình chiếu của O trên BD , Q là giao điểm của AD và BE . Chứng minh: Q, K, I thẳng hàng.

Bài 42. Cho (O) đường kính AB . Kẻ đường kính CD vuông góc với AB . Lấy M thuộc cung nhỏ BC , AM cắt CD tại E . Qua D kẻ tiếp tuyến với (O) cắt đường thẳng BM tại N . Gọi P là hình chiếu vuông góc của B lên DN

- Chứng minh các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $EN \parallel CB$.
- Chứng minh $AM \cdot BN = 2R^2$ và tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.

Bài 43. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn ($AB < AC$). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

- Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$.
- Gọi I là trung điểm của AH . Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- Vẽ CI cắt đường tròn (O) tại M (M khác C), EF cắt AD tại K . Chứng minh ba điểm B, K, M thẳng hàng.

Bài 44. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Gọi K là trung điểm BC .

- Chứng minh $\triangle AEF$ đồng dạng $\triangle ABC$.
- Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF .
- Đường phân giác góc FHB cắt AB và AC lần lượt tại M và N . Gọi I là trung điểm của MN, J là trung điểm của AH . Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài 45. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn và đường cao BE . Gọi H, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ điểm E đến AB, AC .

a) Chứng minh tứ giác $BHEK$ nội tiếp;

b) Chứng minh: $BH \cdot BA = BK \cdot BC$;

c) Gọi F là chân đường vuông góc kẻ từ điểm C đến đường thẳng AB , I là trung điểm của đoạn thẳng EF . Chứng minh rằng H, I, K thẳng hàng.

Bài 46. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường cao AD và đường phân giác trong AO (D, O thuộc cạnh BC). Kẻ $OM \perp AB$ tại M , $ON \perp AC$ tại N .

a) Chứng minh bốn điểm O, M, D, N cùng nằm trên một đường tròn. (dấu cách của dấu phẩy, dấu chấm viết không đúng)

b) Chứng minh: $\angle BDM = \angle DPN$.

c) Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt MN tại I , AI cắt BC tại K . Chứng minh K là trung điểm của BC .

Bài 47. Cho $(O; R)$ đường kính AB . Bán kính CO vuông góc với AB , M là điểm bất kì trên cung nhỏ AC (M khác A và C), MB cắt AC tại H . Gọi K là hình chiếu của H trên AB .

a) Chứng minh bốn điểm C, B, H, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh CA là phân giác $\angle MCK$.

c) Kẻ Ax là tiếp tuyến của nửa đường tròn tại A . Lấy $P \in Ax$ sao cho $\frac{AP \cdot MB}{MA} = R$. Chứng minh PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK .

Bài 48. Từ điểm A nằm ngoài (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính CD của (O) .

a) Chứng minh $BD \parallel AO$.

b) AD cắt (O) tại E (A, E, D theo thứ tự). Chứng minh rằng $AB^2 = AE \cdot AD$.

c) Vẽ $BH \perp DC$ tại H . Gọi I là trung điểm của BH . Chứng minh ba điểm A, I, D thẳng hàng.

Bài 49. Cho tam giác ABC nhọn với $AB > AC$. Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H .

a/ Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

b/ Gọi D là giao điểm của AH và BC . Chứng minh DA phân giác của $\angle MDN$

c/ Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I, J . Chứng minh D là trung điểm IJ

Bài 50. Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB , AC lần lượt tại E và D ; BD cắt CE tại H , AH cắt BC tại I . Từ A kẻ tiếp tuyến AM , AN của đường tròn (O) (M , N là tiếp điểm).

a) Chứng minh tứ giác $AEHD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AB \cdot BE = BI \cdot BC$, từ đó suy ra $AB \cdot BE + AC \cdot CD = BC^2$

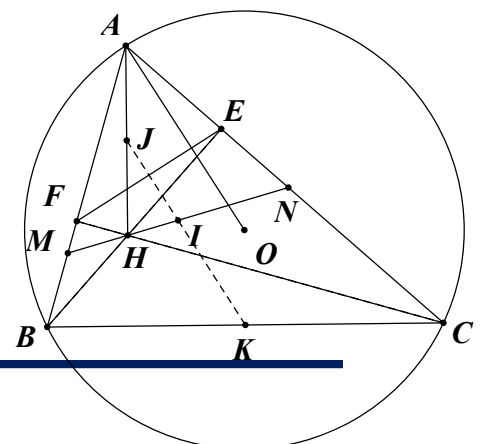
c) Chứng minh ba điểm M , H , N thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a) Vẽ đúng hình đến ý 1)

$$BE \perp AC \Rightarrow \angle BEC = 90^\circ$$



$$\Rightarrow \Delta AHI \sim \Delta ABP (g.g) \Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AB}{AP} \Leftrightarrow AH \cdot AP = AI \cdot AB$$

c) . Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và BP . Kẻ $KM \perp AB$ cắt AB tại M , cắt đường tròn (O) tại N . Chứng minh N, I, H thẳng hàng.

Tứ giác $PHIB$ nội tiếp nên $\angle HIP = \angle HBP$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{HP}$) (1);

Tam giác ABP có hai đường cao PI, BH cắt nhau tại $E \Rightarrow E$ là trực tâm của $\Delta ABP \Rightarrow AE \perp BP$

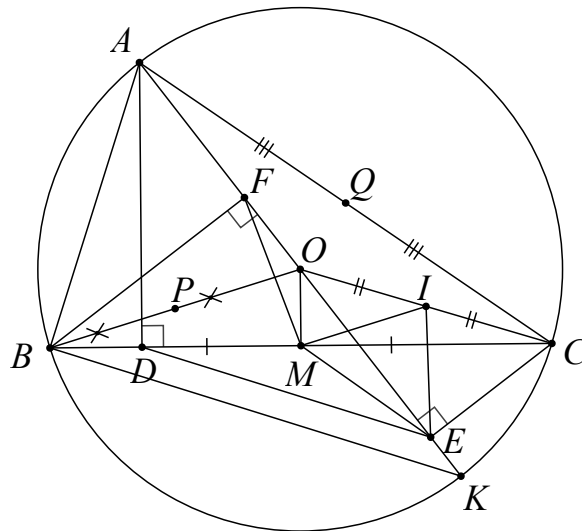
hay $AK \perp BP \Rightarrow \angle EKB = 90^\circ$, mà $\angle EIB = 90^\circ$ (GT) $\Rightarrow$ tứ giác $BKEI$ nội tiếp đường tròn đường kính $BE \Rightarrow \angle EIK = \angle EBP$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{EK}$) (2);

Mà $\angle EKB = 90^\circ \Rightarrow K \in (O)$, lại có $AB \perp KN$ tại $M \Rightarrow MK = MN$ (quan hệ vuông góc đường kính và dây) $\Rightarrow \Delta IMK = \Delta IMN (c.g.c) \Rightarrow \angle MIK = \angle MIN \Rightarrow 90^\circ - \angle MIK = 90^\circ - \angle MIN \Rightarrow \angle EIK = \angle DIN$ (3);

Từ (1), (2), (3) ta có $\angle HIP = \angle DIN (= \angle HBP = \angle EIK) \Rightarrow \angle HIP + \angle PIN = \angle DIN + \angle PIN = \angle PID = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle HIN = 180^\circ \Rightarrow H, I, N$ thẳng hàng.

Bài 3.



a) Chứng minh bốn C, E, M, O cùng thuộc một đường tròn.

ΔOBC cân tại O , M là trung điểm của BC nên OM vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao.

Suy ra $OM \perp BC \Rightarrow \angle OMC = 90^\circ$

Theo bài ra, E là hình chiếu của C trên AK nên $CE \perp AK \Rightarrow CE \perp EO \Rightarrow \angle OEC = 90^\circ$.

Gọi I là trung điểm của OC

Dễ dàng chứng minh $IO = IE = IM = IC$

Do đó C, E, M, O cùng thuộc một đường tròn (I) .

b) *Chứng minh $\angle ADAK = \angle BAC$

Xét ΔDBA và ΔDKA có

$$+) \angle ADB = \angle ACK = 90^\circ$$

$$+) \angle ABD = \angle AKC \quad (\text{Hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AC)$$

Nên $\Delta DBA \sim \Delta DKA$

Do đó ta có: $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AK}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

Hay $AD \cdot AK = AB \cdot AC$ (đpcm).

***Chứng minh DMDE** cân.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AD} \wedge \widehat{BC} \\ \widehat{AE} \wedge \widehat{EC} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{ADC} = 90^\circ \\ \widehat{AEC} = 90^\circ \end{array} \right\}$$

Theo bài ra

Gọi Q là trung điểm của AC

Dễ dàng chứng minh $QA = QC = QD = QE$

Suy ra bốn điểm A, C, D, E cùng thuộc đường tròn (Q)

Suy ra $\widehat{CAE} = \widehat{CDE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung CE) (1)

Xét (O) ta có: $\widehat{CBK} = \widehat{CAE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung CK) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EBK} = \widehat{EDE}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị (3)

Suy ra $DE \parallel BK$

Xét đường tròn (I) có: $\widehat{EMC} = \widehat{EOC}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{EC}$). (4)

Xét đường tròn (O) có: $\widehat{KBC} = \frac{1}{2} \widehat{KOC}$ (Góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{KC}$). (5)

Từ (3); (4) và (5) suy ra: $\widehat{EMC} = \widehat{EDE}$.

DMDE có $\widehat{EMC} = \widehat{MDE} + \widehat{MED}$ (góc ngoài của tam giác) mà $\widehat{EMC} = \widehat{MDE}$

Nên $\widehat{MDE} = \widehat{MED}$. Do đó, DMDE cân tại M .

c) Chứng minh khi A di chuyển trên cung lớn BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp $DDEF$ là 1 điểm cố định.

Gọi P là trung điểm của BO

Dễ dàng chứng minh được $PB = PO = PF = PM$

Suy ra bốn điểm O, M, B, F cùng thuộc đường tròn (P)

Nên $\widehat{OBM} = \widehat{MFO}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{MO}$).

Xét đường tròn (I) có: $\widehat{MEO} = \widehat{MCO}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{MO}$).

Mà $\widehat{OBM} = \widehat{OCM}$ (DOCB cân tại O).

Do đó $\widehat{MFO} = \widehat{MEO} \Rightarrow DEMF$ cân tại $M \Rightarrow ME = MF$

Mà $ME = MD$ (Tam giác MDE cân tại M).

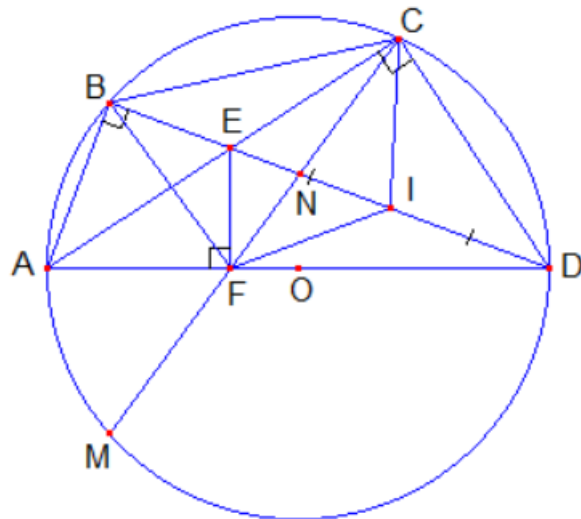
Suy ra: $MD = ME = MF$.

Suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF .

Mà M là trung điểm của BC nên M là điểm cố định.

Vậy khi A di chuyển trên cung lớn BC thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Bài 4.



a) $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\angle ACD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên $\angle CED$ vuông tại C

Gọi I là trung điểm của ED

Ta có CI là đường trung tuyến hạ xuống cạnh huyền ED

$$CI = IE = ID = \frac{1}{2}ED \quad (1)$$

Tương tự trong tam giác EFD vuông tại F , ta có

$$FI = IE = ID = \frac{1}{2}ED \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CI = FI = IE = ID$

Hay tứ giác $CEFD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm I đường kính ED

b) FA là tia phân giác của $\angle BFM$

Ta có $CEFD$ nội tiếp $\Rightarrow \angle CED = \angle CFD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{CD}$)

Chứng minh tương tự câu a) ta có $ABEF$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \angle BEA = \angle BFA \quad (\text{hai góc nội tiếp cùng chắn cung } \widehat{AB})$$

$$\text{Mà } \angle BEA = \angle CED \quad (\text{đối đỉnh})$$

$$\angle AFM = \angle CFD \quad (\text{đối đỉnh})$$

$$\text{Do đó } \angle BFA = \angle AFM$$

Hay FA là tia phân giác $\angle BFM$

c) $BE \cdot DN = EN \cdot BD$.

Ta có $\angle EFC = \angle EDC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{EC}$)

$$\angle EFB = \angle BAE \quad (\text{hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{EB})$$

Mà $\hat{BAE} = \hat{BAC} = \hat{BDC} = \hat{EDC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{1}{\frown}BC$)

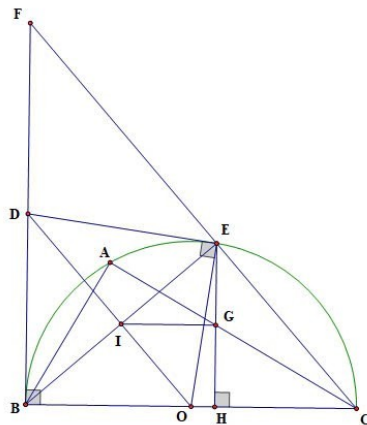
Suy ra $\hat{EFC} = \hat{EFB}$ hay FE là tia phân giác của $\hat{BFC}$

Trong $VBFN$ có FE là phân giác trong tại đỉnh F $\Rightarrow \frac{BE}{EN} = \frac{FB}{FN}$

Mà $\angle EFD$ là phân giác ngoài tại đỉnh F $\Rightarrow \frac{BD}{DN} = \frac{FB}{FN}$

Suy ra $\frac{BE}{EN} = \frac{BD}{DN} \Rightarrow BE \cdot DN = EN \cdot BD$

Bài 5.



a) Ta có $OA = R$, $BC = 2R$

$$\Rightarrow OA = OB = OC = \frac{BC}{2} = R$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

Ta có $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ$

$$\angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

b) Vì DB, DE là 2 tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow DB = DE$ và DI là phân giác $\angle BDE$

$\Rightarrow \angle BDI = \angle EDI \Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{DIE}$ mà 2 góc này ở vị trí kề bù

$$\Rightarrow \angle DIB = \angle DIE = 90^\circ$$

OD là đường trung trực BE $\Rightarrow OD \perp BE$

$\triangle DBO$ vuông tại B, BI là đường cao

$$\sin \angle DBI = \frac{DI}{BD}; \sin \angle DOB = \frac{DB}{OD} \text{ mà } \angle DBI = \angle DOB \text{ (cùng cộng } \angle BDO \text{ 1 góc } 90^\circ)$$

$$\Rightarrow DI \cdot DO = DB^2 \quad (1)$$

$\triangle DBC$ vuông tại B, BA là đường cao. CMTT ta có

$$DB^2 = DA \cdot DC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow DI \cdot DO = DA \cdot DC$$

c) Kéo dài CE cắt BD tại F. Vì $\angle BEC = 90^\circ \Rightarrow \angle BEF = 90^\circ$ (tính chất kẻ bù)

mà DB = DE (chứng minh trên)

suy ra ED là đường trung tuyến $\triangle FEB$ vuông tại E $\Rightarrow BD = DF$

$$\text{Vì } GH \parallel BD \text{ (cùng } \perp BC) \Rightarrow \frac{GH}{BD} = \frac{GC}{DC} \text{ (Ta - let)} \quad (3)$$

$$\text{Vì } GE \parallel DF \text{ (cùng } \perp BC) \Rightarrow \frac{GE}{DF} = \frac{GC}{DC} \quad (4)$$

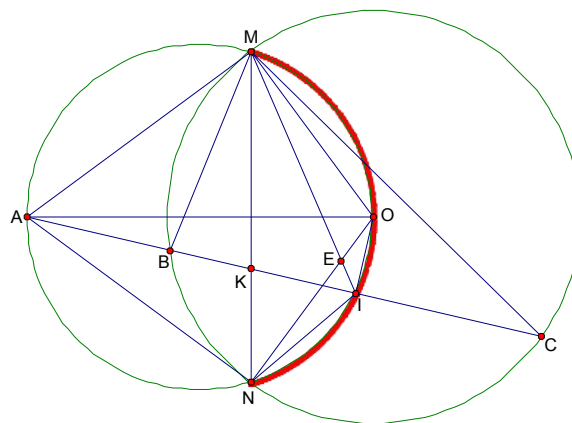
$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{GH}{BD} = \frac{GE}{DF} \text{ do } BD = DF \text{ (cmt)} \Rightarrow GH = GE$$

Mà IB = IC (OD trung trực BE)

Do đó IG là đường trung bình tam giác EHB

$$\Rightarrow IG \parallel BH \Rightarrow IG \parallel BC \text{ (dpcm)}$$

Bài 6.



a) Tứ giác AMON nội tiếp

Vì AM là tiếp tuyến nên $AM \perp MO$

Do đó $\triangle AMO$ vuông tại M nên nội tiếp trong đường tròn đường kính AO

Chứng minh tương tự ta được $\triangle ANO$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AO

Do đó 4 điểm A, O, M, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AO

Vậy tứ giác AMON nội tiếp

b) Chứng minh I thuộc đường tròn đường kính AO

Chứng minh $\Delta AKM \sim \Delta AMI (gg) \Rightarrow \frac{AK}{AM} = \frac{AM}{AI} \Rightarrow AK \cdot AI = AM^2 \quad (1)$

Chứng minh $\Delta ABM \sim \Delta AMC (gg) \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AM^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AK \cdot AI = AB \cdot AC$

c) Chứng minh $\Delta KIN \sim \Delta KMA (gg) \Rightarrow \frac{IN}{MA} = \frac{KN}{KA} \Rightarrow IN = \frac{KN \cdot MA}{KA}$

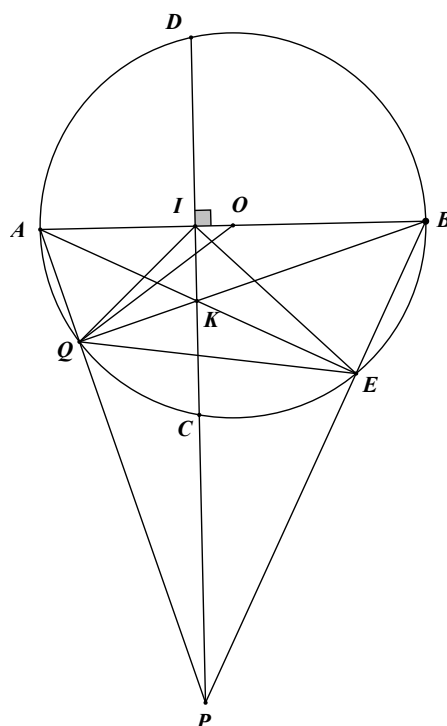
Chứng minh $\Delta KIM \sim \Delta KNA (gg) \Rightarrow \frac{IM}{NA} = \frac{KM}{KA} \Rightarrow IM = \frac{KM \cdot NA}{KA} = \frac{KM \cdot MA}{KA} \quad (\text{vì } NA=MA)$

$$IM = 2IN \Leftrightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{KN \cdot MA}{KA}}{\frac{KM \cdot MA}{KA}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{KN}{KM} = \frac{1}{2}$$

Do đó

Vậy $IM=2 \cdot IN$ khi cát tuyến ABC cắt MN tại K với $\frac{KN}{KM} = \frac{1}{2}$

Bài 7.



a) Chứng minh bốn điểm K, E, B, I cùng thuộc một đường tròn.

Xét $(O; R)$ có: $\angle AEB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\angle KEB = 90^\circ$

đường kính AB vuông góc với dây CD tại điểm $I \Rightarrow \angle KIB = 90^\circ$

Xét $\triangle KEB$ vuông tại E có cạnh huyền KB suy ra K, E, B thuộc đường tròn đường kính KB (1)

Xét $\triangle KIB$ vuông tại I có cạnh huyền KB suy ra K, I, B thuộc đường tròn đường kính KB (2)

Hay bốn điểm K, E, B, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AK.AE = AI.AB$.

Xét $\triangle AKI$ và $\triangle ABE$, ta có: $\angle A$ là góc chung và $\angle AIK = \angle AEB = 90^\circ \Rightarrow \triangle AKI \sim \triangle ABE$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AI}{AE} \Rightarrow AK.AE = AI.AB \text{ (đpcm)}$$

c) Gọi P là giao điểm của tia BE và tia DC , Q là giao điểm của AP và BK . Chứng minh IK là phân giác của $\angle EIQ$. Chứng minh OQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQE .

*** Chứng minh IK là phân giác của $\angle EIQ$.**

Xét $\triangle APB$ có: $PI \perp AB (I \in AB)$; $AE \perp PB (E \in PB)$; $PI \cap AE \equiv \{K\}$

$\Rightarrow K$ là trọng tâm của $\triangle APB \Rightarrow PQ \perp AP (Q \in AP) \Rightarrow \angle QPB = 90^\circ$ hay $\angle QKB = 90^\circ$

Đường kính AB vuông góc với dây CD tại điểm $I \Rightarrow \angle AIK = 90^\circ$

Chứng minh được bốn điểm A, I, Q, K cùng thuộc đường tròn đường kính AK suy ra $AIKQ$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle QAK = \angle QIK$ (hai góc nt cùng chắn $\widehat{QK}$)

Ta có: $KEBI$ là tứ giác nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \angle KIE = \angle KBE$ (hai góc nt cùng chắn $\widehat{EK}$)

Lại có: $\angle QAK = \angle KBE$ (hai góc nt cùng chắn cung $\widehat{QE}$)

$\Rightarrow \angle KIE = \angle QIK$ hay IK là phân giác của $\angle EIQ$ (đpcm)

*** Chứng minh OQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQE .**

Ta có: $\angle QPB = 90^\circ \Rightarrow Q \in (O; R)$

Xét $\triangle OQB$, ta có:

$$OQ = OB = R$$

$\Rightarrow \triangle OQB$ là tam giác cân tại O

$$\Rightarrow \angle QOB = \angle BQO \text{ hay } \angle QOK = \angle BQO \quad (1)$$

Xét $\triangle IBK$ và $\triangle QPK$, ta có:

$$\angle KPB = \angle KQP \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\angle KQP = \angle KIB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle IBK \sim \triangle QPK \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \widehat{IBK} = \widehat{QPK} \text{ (hai góc tương ứng) hay } \widehat{OBK} = \widehat{OPK} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \widehat{OQK} = \widehat{OPK} \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } \widehat{BQE} = \widehat{BAE} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{BE}) \text{ hay } \widehat{KQE} = \widehat{PAK} \quad (3)$$

Xét $\triangle IAK$ và $\triangle EPK$, ta có:

$$\widehat{IKA} = \widehat{EKP} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\widehat{KEP} = \widehat{KIA} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle IAK \sim \triangle EPK \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \widehat{PAK} = \widehat{EPK} \text{ (hai góc tương ứng) } \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra: } \widehat{KQE} = \widehat{EPK} \quad (**)$$

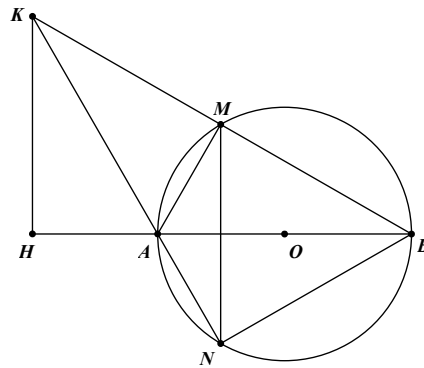
$$\text{Từ (*) và (**) ta có: } \widehat{OQK} + \widehat{KQE} = \widehat{OPK} + \widehat{EPK} \Rightarrow \widehat{OQE} = \widehat{QPE}$$

$$\text{Lại có: } \triangle QEP \text{ nội tiếp } \Rightarrow \widehat{QPE} = \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{QE} \text{ (tc góc nội tiếp)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OQE} = \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{QE}$$

$$\Rightarrow OQ \text{ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác } PQE \text{ (đpcm).}$$

Bài 8.



a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

$$+) \text{ Có: } \widehat{AHK} = 90^\circ \text{ (vì } KH \perp AB)$$

$$\Rightarrow \triangle AHK \text{ vuông tại } H \Rightarrow 3 \text{ điểm } A; H; K \text{ nằm trên đường tròn đường kính } AK$$

$+) \text{ Xét } (O) \text{ có:}$

$$\widehat{AMB} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMK} = 90^\circ \text{ (kề bù với } \widehat{AMB})$$

$$\Rightarrow \triangle AMK \text{ vuông tại } M \Rightarrow 3 \text{ điểm } A; M; K \text{ nằm trên đường tròn đường kính } AK$$

Suy ra tứ giác $AHKM$ nội tiếp đường tròn đường kính AK .

b) Chứng minh rằng: $NB \cdot HK = AN \cdot HB$

Xét $DANB$ và $DKHB$ có:

+) $\hat{A}NB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \hat{A}NB = \hat{KHB} = 90^\circ$;

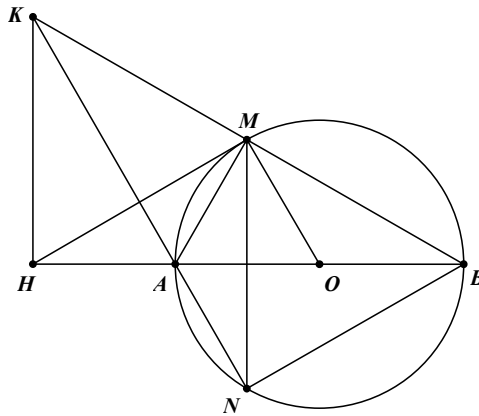
+) Xét $\triangle OMN$ cân tại O, có OA là đường cao $\Rightarrow$ OA là đường phân giác của góc MON.

Þ $\hat{MOA} = \hat{NOA}$ Þ $\hat{ABN} = \hat{KBH}$ (Góc nội tiếp bằng $\frac{1}{2}$ góc ở tâm)

Suy ra $DANB \sim DKHB$ (g.g)

$$\text{p } \frac{AN}{NB} = \frac{KH}{HB} \text{ p } NB \cdot HK = AN \cdot HB$$

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



+) Ta có HM giao với đường tròn (O) tại M , ta phải chứng minh $HM \perp OM$. Thật vậy:

Tứ giác $AHKM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{HAK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overline{HK}$);

$$\hat{HAK} = \hat{NAB} \text{ (hai góc đối đỉnh);}$$

+) Theo phần b) $DOMN$ cân tại O, có OA là đường cao $\Rightarrow$ OA là đường trung trực của MN $\Rightarrow$ AB là trung trực của MN $\Rightarrow$ MB = NM $\Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{NBA} \Rightarrow \widehat{NAB} = \widehat{MAB}$

+) $\dot{MAB} = \dot{OMA}$ (DOAM cân tại O);

$$\textcircled{P} \quad \dot{HMK} = \dot{OMA} (= \dot{HAK} = \dot{NAB} = \dot{MAB}) \quad \textcircled{P} \quad \dot{HMK} + \dot{HMA} = \dot{OMA} + \dot{HMA} ;$$

Mà $\widehat{HMK} + \widehat{HMA} = \widehat{AMK} = 90^\circ$ (kề bù với $\widehat{AMB} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

$$\angle OMA + \angle HMA = 90^\circ \quad \angle HMO = 90^\circ \quad \angle HMO \sim \angle OM \text{ tai } M \hat{=} O$$

Đ HM là tiếp tuyến của (O) .

Bài 9.

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABOD$ nội tiếp.

Xét đường tròn (O) có BC là đường kính (gt)

Suy ra $\angle BAC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Gọi M là trung điểm của BD .

Xét $\triangle ABD$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến

$$\text{Suy ra } AM = \frac{1}{2} BD \quad (1)$$

Xét $\triangle OBD$ vuông tại O ($OD \perp BC$) có OM là đường trung tuyến

$$\text{Suy ra } OM = \frac{1}{2} BD \quad (2)$$

$$MA = MO = MB = MD = \frac{1}{2} BD$$

Từ (1), (2) suy ra

Do đó tứ giác $ABOD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD .

b) Tiếp tuyến tại điểm A với đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm P , sao cho $PB = BO = 2 \text{ cm}$. Tính độ dài đoạn PA và số đo góc APC .

Ta có: $OA = OB = BP = 2 \text{ cm}$ suy ra $OP = 4 \text{ cm}$.

Ta có: $\triangle PAO$ vuông tại A (PA là tiếp tuyến)

Suy ra $PA^2 + OA^2 = OP^2$ (định lý Pythagore)

Do đó $PA^2 + 2^2 = 4^2$ hay $PA^2 = 12$ hay $PA = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$.

$$\text{Ta có: } \sin \angle APO = \frac{OA}{OP} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Suy ra $\angle APO = 30^\circ$ hay $\angle APC = 30^\circ$.

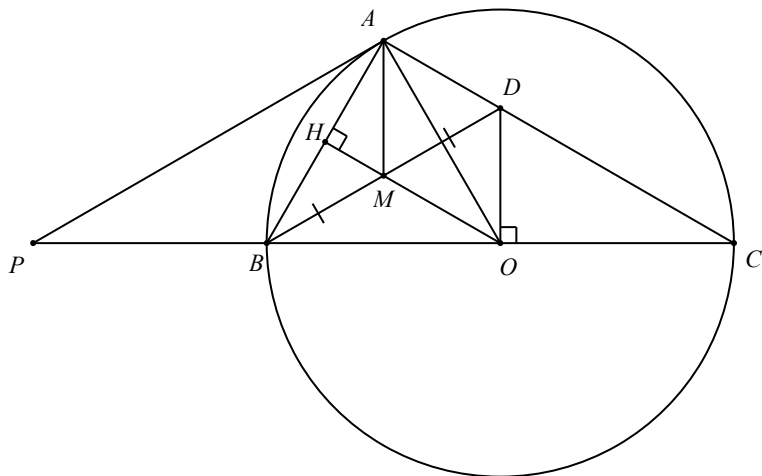
c) Chứng minh rằng $\frac{PB}{PC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Kẻ $OH \perp AB$ ($H \in AB$)

Xét $\triangle OAB$ cân tại O ($OA = OB$) có OH là đường cao

Suy ra OH đồng thời là đường phân giác

$$\text{Do đó } \angle AOH = \angle BOH = \frac{1}{2} \angle AOB$$



Ta lại có: $\angle PAB + \angle BAO = 90^\circ$ (PA là tiếp tuyến)

mà $\angle AOH + \angle BAO = 90^\circ$ ($\triangle OHA$ vuông tại H)

$$\angle PAB = \angle AOH = \frac{1}{2} \angle AOB$$

Suy ra

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

Mặt khác, (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung)

Suy ra $\angle PAB = \angle ACB$ hay $\angle PAB = \angle PCA$.

Xét $\triangle PAB$ và $\triangle PCA$ có:

$\angle P$ là góc chung

$\angle PAB = \angle PCA$ (cmt)

Suy ra $\triangle PAB \sim \triangle PCA$ (g.g)

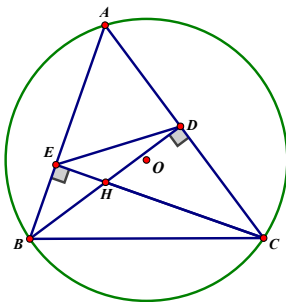
$$\text{Do đó } \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Suy ra } PA^2 = PB \cdot PC \text{ và } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{PA^2}{PC^2}$$

$$\text{Từ đó } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{PB \cdot PC}{PC^2} = \frac{PB}{PC}$$

Bài 10.

a) Chứng minh: Tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

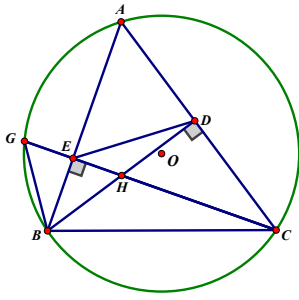


Chứng minh: $\angle BEC = 90^\circ$

Chứng minh: $\angle BDC = 90^\circ \Rightarrow \angle BEC = \angle BDC$

Suy ra: Tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $DBHG$ cân ở B .



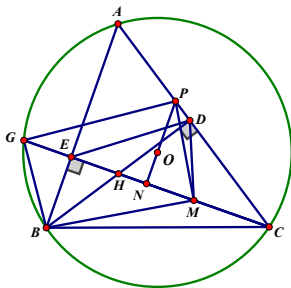
Chứng minh: $\angle EBD = \angle ECD$ (do $BCDE$ là tứ giác nội tiếp).

Chứng minh: $\angle GBE = \angle ECD$ (góc nội tiếp (O) chắn cung AG)

Suy ra: $\angle EBD = \angle GBE$ nên BE là phân giác góc GBH

Mà BE là đường cao của $DBGH$ nên $DBGH$ cân ở B

c) Chứng minh: $CD \cdot CP = CM \cdot CG$ và $MB \perp MP$.



Chứng minh: $PN \perp GC$

Suy ra: $\triangle DCDH$ và $\triangle DCNP$ đồng dạng (g – g) nên $\frac{CD}{CN} = \frac{CH}{CP}$

Suy ra: $CD \cdot CP = CN \cdot CH = \frac{1}{2} CG \cdot CM = CM \cdot CG$

$\triangle CDM$ và $\triangle CGP$ đồng dạng (c–g–c)

Suy ra: $GPDM$ là tứ giác nội tiếp (1)

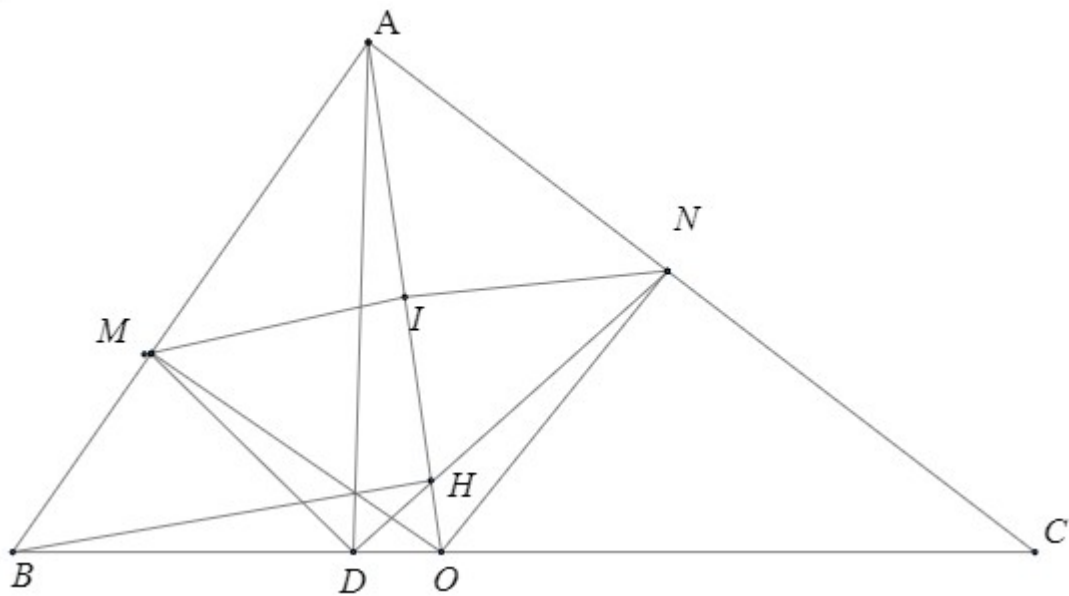
Do $\angle GPM = \angle MDC = \angle MCD$ nên chứng minh được $\angle BGP = 90^\circ$

Suy ra: $GPDB$ là tứ giác nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) suy ra $GPMB$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra: $\angle BMP = 90^\circ$ nên $MB \perp MP$

Bài 11.



2. a. $\triangle AOM$ vuông tại M

Gọi I là trung điểm của AO

Suy ra MI là trung tuyến

Nên $MI = IA = IO$

Xét $\triangle AON$ vuông tại N

Có I là trung điểm của AO

Nên NI là trung tuyến

Do đó $NI = IA = IO$

Suy ra $MI = IA = IO = IN$ nên tứ giác $AMON$ nội tiếp

b. Xét $\triangle BMO$ và $\triangle BDA$ có

$\hat{B}$ chung

$\hat{BMO} = \hat{BDA} = 90^\circ$ ($AD \perp BC$ tại D ; $OM \perp AB$ tại M)

Suy ra $\triangle BMO \sim \triangle BDA$ (g – g)

$$\frac{BM}{BD} = \frac{BO}{BA}$$

Nên $\frac{BM}{BD} = \frac{BO}{BA}$ (tỉ số đồng dạng)

$$\frac{BM}{BO} = \frac{BD}{BA}$$

Do đó $\frac{BM}{BO} = \frac{BD}{BA}$ (tính chất tỉ lệ thức)

Xét $\triangle BMD$ và $\triangle BOA$ có

$\hat{B}$ chung

$$\frac{BM}{BO} = \frac{BD}{BA}$$

(c/mt)

Suy ra $\triangle BMD \sim \triangle BOA$ (c – g – c)

Nên $\widehat{BDM} = \widehat{BAO}$ (hai góc tương ứng)

Chứng minh tương tự $\Delta CNO \sim \Delta CDA$ (g - g)

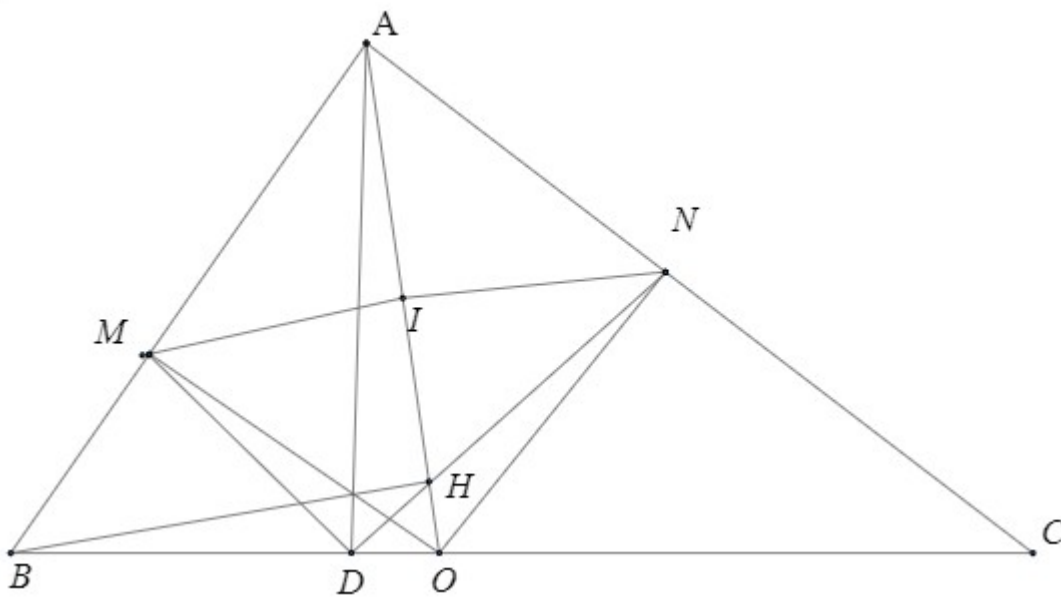
$$\text{suy ra } \frac{CN}{CD} = \frac{CO}{CA} \quad \text{nên } \frac{CN}{CO} = \frac{CD}{CA}$$

Suy ra $\Delta CND \sim \Delta COA$ (c - g - c)

Nên $\widehat{EDN} = \widehat{EAO}$ (2 góc tương ứng)

Mà $\widehat{BDM} = \widehat{BAO}$ (c/mt) và $\widehat{BAO} = \widehat{EAO}$ (vì AO là tia phân giác $\widehat{BAC}$)

Suy ra $\widehat{BDM} = \widehat{EDN}$ (đpcm)



$$c. \quad \sin \frac{BAC}{2} \leq \frac{BC}{AB + AC}$$

Từ B kẻ BH vuông góc AO tại H

Xét ΔBAH vuông tại H có

$$\sin BAH = \frac{BH}{AB} \quad (\text{tỉ số lượng giác})$$

$$\text{Mà } \widehat{BAH} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \quad (\text{vì } AO \text{ là tia phân giác } \widehat{BAC})$$

$$\text{Nên } \sin BAH = \sin \frac{BAC}{2} \quad \text{Do đó } \sin \frac{BAC}{2} = \frac{HB}{AB}$$

$$\text{Mà } BH \leq BO \quad (\text{quan hệ đường vuông góc và đường xiên}) \text{ nên } \frac{HB}{AB} \leq \frac{BO}{AB}$$

$$\text{Suy ra } \sin \frac{\widehat{BAC}}{2} \leq \frac{BO}{AB} \quad (1)$$

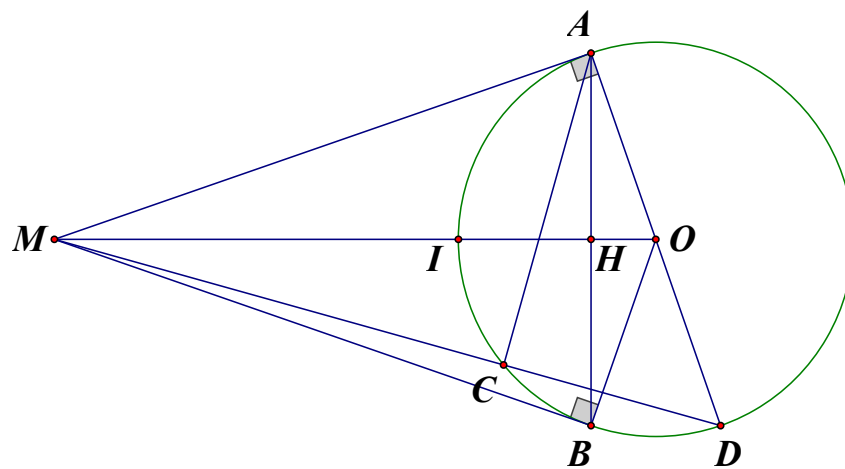
Xét $\triangle BAC$ có AO là tia phân giác $\widehat{BAC}$ nên

$$\text{Suy ra } \frac{BO}{BA} = \frac{CO}{CA} \quad (\text{Tính chất tia phân giác})$$

$$\text{Nên } \frac{BO}{BA} = \frac{CO}{CA} = \frac{BO+OC}{BA+CA} = \frac{BC}{AB+AC} \quad (\text{Tính chất tỉ lệ thức}) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có } \sin \frac{\widehat{BAC}}{2} \leq \frac{BC}{AB+AC} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 12.



a) Vì MA là tiếp tuyến của $(O; R)$ tại A nên $\widehat{MAO} = 90^\circ$
 $\Rightarrow A$ thuộc đường tròn đường kính OM (1)

Vì MB là tiếp tuyến của $(O; R)$ tại B nên $\widehat{MBO} = 90^\circ$
 $\Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường kính OM (2)

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm $M; A; O; B$ cùng thuộc đường tròn đường kính OM .

b) Vì $MA; MB$ là tiếp tuyến của (O) tại A, B nên $MA = MB$

Mà $OA = OB = R$

Nên OM là đường trung trực của AB .

$\Rightarrow OM \perp AB$ tại H

$\Rightarrow \widehat{AHM} = 90^\circ$

Xét $\triangle MAH$ và $\triangle MOA$ có :

$\widehat{OAM} = \widehat{AHM} = 90^\circ$

$\widehat{AMO}$ chung

$\Rightarrow \triangle MAH \sim \triangle MOA$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MO} = \frac{MH}{MA} \quad (\text{tính chất tam giác đồng dạng})$$

$$\Leftrightarrow MA^2 = MO.MH \quad (3)$$

Vì AD là đường kính của (O) nên $\angle ACD = 90^\circ$

Xét $\triangle MAD$ và $\triangle MCA$ có :

$$\angle DAM = \angle ACD = 90^\circ$$

$\angle AMD$ chung

$$\Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle MCA \quad (\text{g-g})$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA} \quad (\text{tính chất tam giác đồng dạng})$$

$$\Leftrightarrow MA^2 = MC.MD \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $MA^2 = MH.MO = MC.MD$.

c) Xét $\triangle OAH$ và $\triangle OMA$ có :

$$\angle OAM = \angle HOA = 90^\circ$$

$\angle AOM$ chung

$$\Rightarrow \triangle OAH \sim \triangle OMA \quad (\text{g-g})$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{MO} = \frac{OH}{OA} \quad (\text{tính chất tam giác đồng dạng})$$

$$\Leftrightarrow OA^2 = MO.OH$$

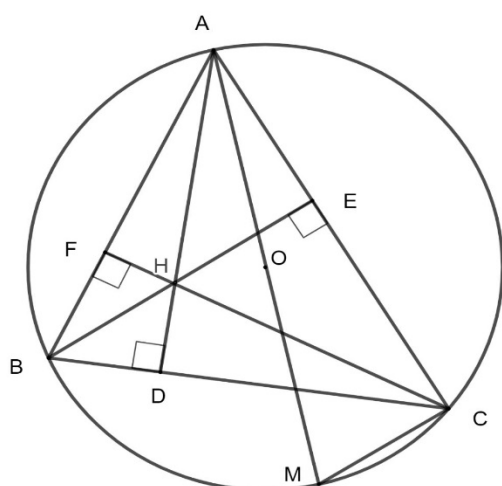
$$\Leftrightarrow OI^2 = OM.OH \quad (\text{do } OA = OI = R)$$

$$\Leftrightarrow OI.OH + OI^2 = OM.OH + OI.OH$$

$$\Leftrightarrow OI.(OH + OI) = OH.(OM + OI)$$

$$\Leftrightarrow OI.IH = OH.MI \quad (\text{đpcm}).$$

Bài 13.



a) Chứng minh bốn điểm A, F, H, E cùng thuộc một đường tròn.

$\angle AFH = 90^\circ$ (Vì CF là đường cao $\triangle ABC$) $\Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AH

$\angle AEH = 90^\circ$ (Vì BE là đường cao $\triangle ABC$) $\Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow$ 4 điểm A, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH

b) Chứng minh $AD \cdot AM = AB \cdot AC$?

Ta có $\angle ACM = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\angle ADB = 90^\circ$ (Vì AD là đường cao $\triangle ABC$)

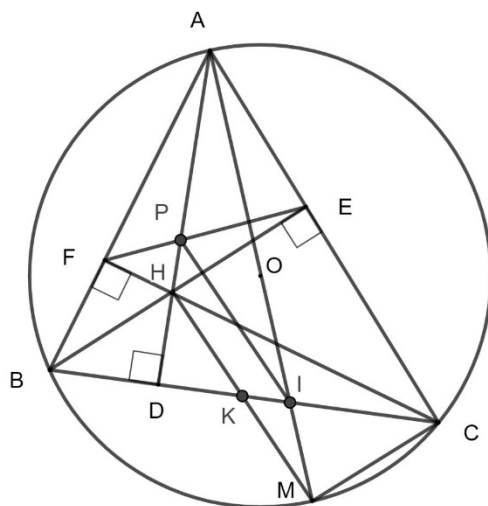
$\Rightarrow \angle ADB = \angle AMC = 90^\circ$

$\angle ABC = \angle AMC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC của (O))

$\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle ACM$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow AD \cdot AM = AB \cdot AC$

c) Chứng minh: H, K, M thẳng hàng và $PI \parallel HK$.



Chứng minh : $CM \parallel BH$, $BM \parallel CH$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHCM$ là hình bình hành.

$\Rightarrow$ Hai đường chéo HK và BC cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

$\Rightarrow K$ là trung điểm của $HM \Rightarrow H, K, M$ thẳng hàng

$\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle ACM \Rightarrow \angle BAD = \angle CAM \Rightarrow \angle CAD = \angle BAI$

Chứng minh $\angle AEF = \angle ABI$

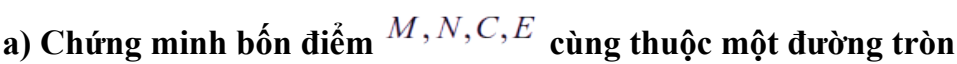
Chứng minh $\triangle APE \sim \triangle AIB(g.g) \Rightarrow \frac{AP}{AI} = \frac{AE}{AB}$

Chứng minh $\triangle AHE \sim \triangle AMB(g.g) \Rightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{AE}{AB}$

$\Rightarrow \frac{AP}{AI} = \frac{AH}{AM} \Rightarrow \frac{AP}{AH} = \frac{AI}{AM} \Rightarrow PI \parallel HM$ (Định lý Thalès đảo).

Vậy $PI \parallel HK$

Bài 14.



Lập luận $EMC = 90^\circ$

Suy ra $\angle ENC = \angle EMC = 90^\circ$

b) Chứng minh $KI \cdot KM = KC \cdot KD$ và NE là tia phân giác của góc MNI .

Có $\angle KIC = 180^\circ - \angle IM = \angle DM$ (vì tổng các góc đối nhau của tứ giác nội tiếp CIMD bằng 180°)

K chung; $KIC = KDM$ (cmt)

Chứng minh: NE là tia phân giác của $\angle MNI$.

$\Rightarrow F$ là trục tâm ΔCDE

$\Rightarrow DF \perp CE$ tại I (DF cắt CE tại I) hay $DI \perp CE$ tại I .

$$\Rightarrow \angle DIC = 90^\circ$$

$\Rightarrow I$ thuộc đường tròn tâm O , đường kính CD

Xét tứ giác $CIFN$ có:

$$\angle IF + \angle NF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Mà hai góc đối nhau trong tứ giác

Nên tứ giác $CIFN$ nội tiếp đường tròn

$$\Rightarrow \angle ICF = \angle INF \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{IF} \text{)}$$

Chúng minh được tứ giác $FMDN$ nội tiếp

$$\Rightarrow \angle PNM = \angle PDM \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{PM} \text{)}$$

Mà $\angle ICM = \angle IDM$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{IM}$ của đường tròn (O))

$$\text{Hay } \angle ICF = \angle PDM$$

$$\Rightarrow \angle INF = \angle PNM$$

$\Rightarrow NF$ là tia phân giác của $\angle MNI \Rightarrow NE$ là tia phân giác của $\angle MNI$

$$\text{c) Chứng minh rằng: } \frac{KC}{KD} = \frac{CN}{DN}$$

$$\Rightarrow \Delta KMC \sim \Delta KDI (g.g) \Rightarrow \frac{KM}{KD} = \frac{CM}{DI}$$

$$\text{Mà } \frac{KC}{KM} = \frac{CI}{DM} \text{ (Vì } \Rightarrow \Delta KIC \sim \Delta KDM \text{)}$$

$$\text{nên } \frac{KC}{KD} = \frac{KC}{KM} \cdot \frac{KM}{KD} = \frac{CI}{DM} \cdot \frac{CM}{DI} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } \frac{CN}{CE} = \frac{CI}{CD} \text{ và } \frac{DN}{DE} = \frac{DM}{CD}$$

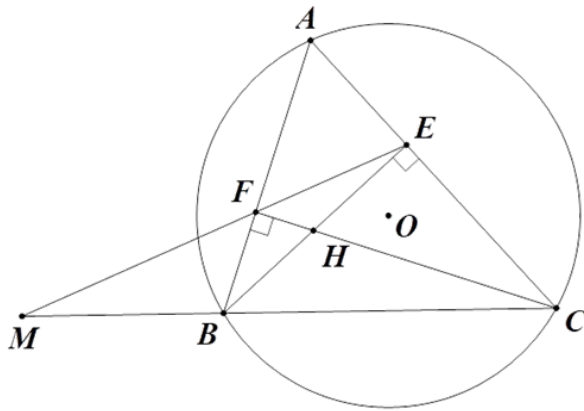
$$\text{Do đó, } \frac{CN}{DN} = \frac{CI}{DM} \cdot \frac{CE}{DE} \quad (2)$$

$$\text{Chúng minh được } \frac{EC}{ED} = \frac{CM}{DI} \quad (3)$$

Từ (1); (2); (3) suy ra $\frac{KC}{KD} = \frac{CN}{DN}$

Bài 15.

a)



Vẽ hình đúng đến ý 1

Chứng minh được $\angle BEC = 90^\circ$

suy ra B, E, C thuộc đường tròn đường kính BC

Chứng minh được $\angle BFC = 90^\circ$

Suy ra B, F, C thuộc đường tròn đường kính BC

Vậy bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc đường tròn đường kính BC

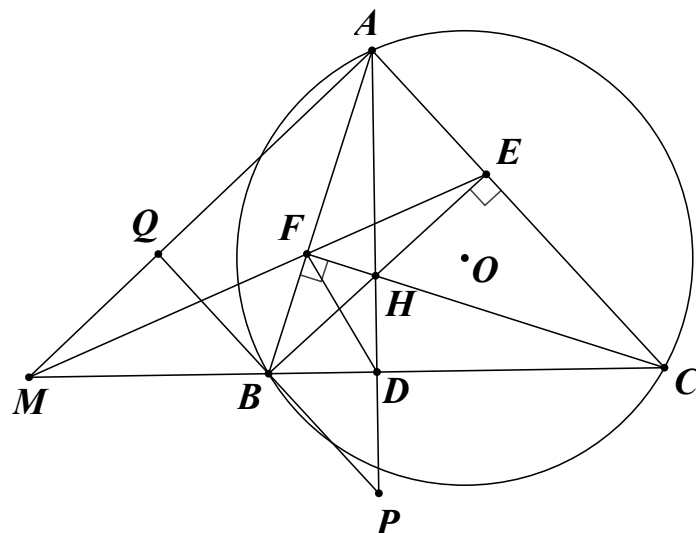
b) Chứng minh $MF \cdot ME = MB \cdot MC$

Xét đường tròn đường kính BC ta có $\angle FEB = \angle ECB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FB)

Từ đó suy ra $\triangle MBE$ đồng dạng $\triangle MCF$ (g – g)

Từ đó suy ra $MF \cdot ME = MB \cdot MC$

c) Chứng minh FC là tia phân giác của góc EFD.



Chứng minh được H là trực tâm ΔABC

Từ đó suy ra bốn điểm B, F, D, H cùng thuộc đường tròn đường kính BH

Suy ra $\angle HFD = \angle HBD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

Xét đường tròn đường kính BC có (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC)

Suy ra khi đó FC là tia phân giác ($\angle BCD$)

Chứng minh BP=BQ.

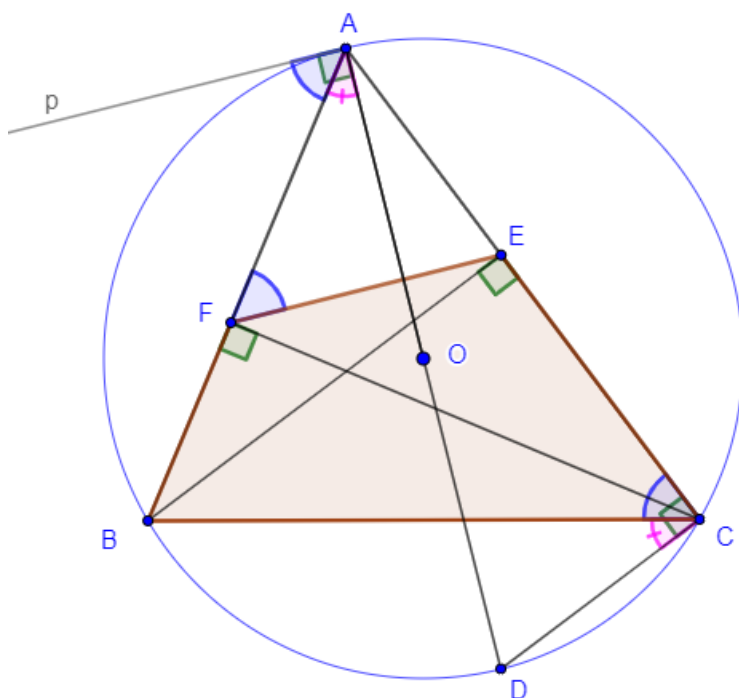
Chứng minh được FB là phân giác trong tại đỉnh F của tam giác FMD

Mà FC là phân giác ngoài tại đỉnh F tam giác FMD

Suy ra

Từ đó suy ra Suy ra $BP = BQ$

Bài 16.



a) Chứng minh tứ giác BFCE nội tiếp

Xét tam giác BEC ta có :

$BE \perp AC$ (BE là đường cao trong tam giác ABC)

Nên tam giác BEC vuông tại E. Do đó B,E,C cùng thuộc đường tròn đường kính BC (1)

Xét tam giác CFB ta có :

$CF \perp AB$ (CF là đường cao trong tam giác ABC)

Nên tam giác CFB vuông tại F. Do đó C,F,B cùng thuộc đường tròn đường kính BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra B,F,E,C cùng thuộc đường tròn đường kính BC.

Hay tứ giác BFEC nội tiếp.

Chứng minh : $AO \perp EF$

Kẻ tiếp tuyến tại A của (O), suy ra $\widehat{PAO} = 90^\circ$

Kẻ tia AO cắt (O) tại D, khi đó AD là đường kính, suy ra $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có : $\widehat{PAB} + \widehat{BAD} = \widehat{PAO} = 90^\circ$

$\widehat{ACB} + \widehat{BCD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$

Mà $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BD}$ trong (O))

Do đó : $\widehat{PAB} = \widehat{ACB}$ (3)

Ta lại có : $\widehat{ACB} + \widehat{BFE} = 180^\circ$ (tứ giác BFEC nội tiếp)

Và $\widehat{AFE} + \widehat{BFE} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (4)

Từ (3),(4) suy ra $\widehat{PAB} = \widehat{AFE}$

Mà $\widehat{PAB}; \widehat{AFE}$ ở vị trí so le trong nên $Ap \parallel EF$

Kết hợp $AO \perp Ap$ (vì Ap là tiếp tuyến).

Vậy $AO \perp EF$

b) **Chứng minh :** $\sin^2 BAC + \cos^2 BAC = 1$

Xét tam giác AEB vuông tại E, ta có :

$$\sin BAE = \frac{BE}{AB} \quad \text{suy ra} \quad \sin^2 BAE = \frac{BE^2}{AB^2}$$

$$\cos BAE = \frac{AE}{AB} \quad \text{suy ra} \quad \cos^2 BAE = \frac{AE^2}{AB^2}$$

$$\text{Nên} \quad \sin^2 BAE + \cos^2 BAE = \frac{BE^2}{AB^2} + \frac{AE^2}{AB^2} = \frac{BE^2 + AE^2}{AB^2}$$

Mà $BE^2 + AE^2 = AB^2$ (Định lý Pythagore trong tam giác ABE vuông tại E)

$$\text{Do đó :} \quad \sin^2 BAE + \cos^2 BAE = \frac{BE^2}{AB^2} + \frac{AE^2}{AB^2} = \frac{BE^2 + AE^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

Hay $\sin^2 BAC + \cos^2 BAC = 1$ (góc BAE cũng là BAC)

Chứng minh : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos BAC$

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác BEC vuông tại E ta có :

$$BC^2 = BE^2 + CE^2$$

$$\text{Mà} \quad CE^2 = (AC - AE)^2 = AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AE + AE^2$$

Nên $BC^2 = BE^2 + AC^2 - 2.AC.AE + AE^2$

Ta lại có :

$$BE^2 + AE^2 = AB^2 \text{ (cmt)}$$

$$\cos BAE = \frac{AE}{AB} \text{ (cmt) suy ra } AE = AB.\cos BAE = AB.\cos BAC$$

$$\text{Vậy : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos BAC$$

c) Gọi S là diện tích tam giác ABC, chứng minh : $S = \frac{1}{2} AB.AC.\sin \angle BAC$. Cho $AB = 6; AC = 8; BC = 2\sqrt{13}$ tính diện tích tam giác ABC

$$\text{Ta có : } S = \frac{1}{2} BE.AC$$

Mà $BE = AB.\sin \angle BAC$ (hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác ABE vuông tại E)

$$\text{Vậy : } S = \frac{1}{2} AB.AC.\sin \angle BAC$$

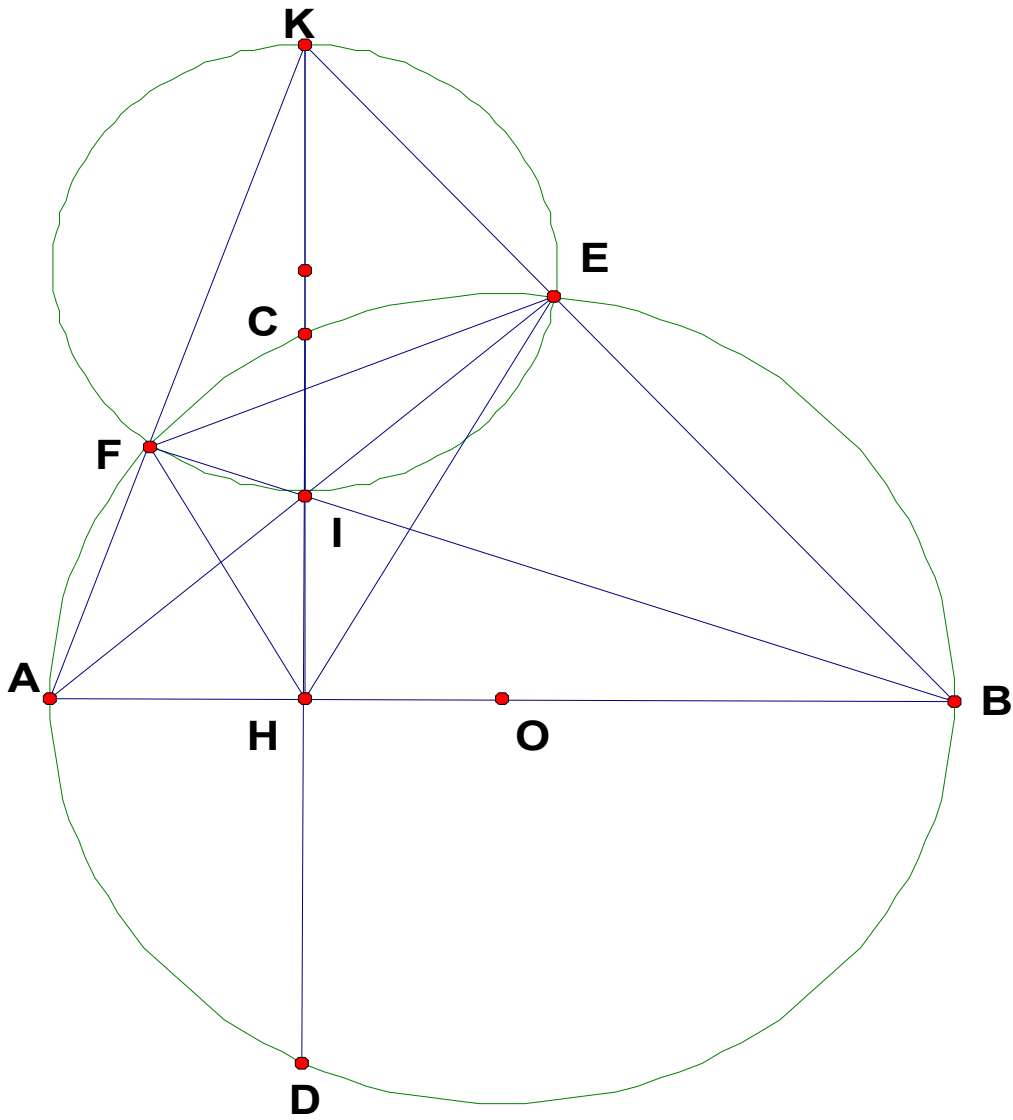
$$\text{Ta có : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos BAC \text{ (cmt)}$$

$$(2\sqrt{13})^2 = 6^2 + 8^2 - 2.6.8.\cos BAC \text{ suy ra } \cos BAC = \frac{1}{2}$$

$$\text{Mà } \sin^2 BAC + \cos^2 BAC = 1 \text{ (cmt) suy ra } \sin BAC = \sqrt{1 - \cos^2 BAC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2} AB.AC.\sin BAC = \frac{1}{2}.6.8.\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

Bài 17.



A

a) Chứng minh tứ giác AHIF nội tiếp.

Ta có: $\angle AFI = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB).

$CD \perp AH$ tại H (giả thiết) và $I \in CD \Rightarrow \angle AHI = 90^\circ$.

Xét tam giác AFI có $\angle AFI = 90^\circ$ nên đường tròn đường kính AI ngoại tiếp tam giác AFI hay 3 điểm A, F, I cùng thuộc 1 đường tròn đường kính AI (1)

Xét tam giác AHI có $\angle AHI = 90^\circ$ nên đường tròn đường kính AI ngoại tiếp tam giác AHI hay 3 điểm A, H, I cùng thuộc 1 đường tròn đường kính AI (2)

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm A, F, I, H cùng thuộc đường tròn đường kính AI

Hay tứ giác AHIF nội tiếp .

b) Chứng minh rằng: $HA.HB = HI.HK$.

Tứ giác AHIF nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \angle A_H + \angle I_H = 180^\circ$ (Định lý)

Mà $\angle I_H + \angle I_H = 180^\circ$ (hai góc kề bù).

$$\Rightarrow \angle A_H = \angle I_H \quad \text{hay} \quad \angle A_H = \angle I_H .$$

Xét $\triangle HAK$ và $\triangle HIB$ có

$$\angle A_HK = \angle I_HB \quad (\text{cùng bằng } 90^\circ)$$

$$\angle A_H = \angle I_H \quad (\text{cmt})$$

$$\Rightarrow \triangle HAK \sim \triangle HIB \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{HA}{HI} = \frac{HK}{HB} \Rightarrow HA.HB = HI.HK \quad (\text{đpcm})$$

c) Chứng minh E luôn thuộc đường tròn cố định:

Ta có: $\angle AFB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow AF \perp BF \Rightarrow AK \perp BF$ tại F

$KH \perp AB$ tại H (vì $CD \perp AH$ tại H)

KH cắt BF tại I.

$$\Rightarrow I \text{ là trực tâm của } \triangle AKB \Rightarrow AI \perp KB \quad (1)$$

$\triangle KIF$ vuông tại F, nên đường tròn ngoại tiếp $\triangle KIF$ có đường kính là KI.

$$\Rightarrow \angle AEK = 90^\circ \quad (\text{góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính KI}).$$

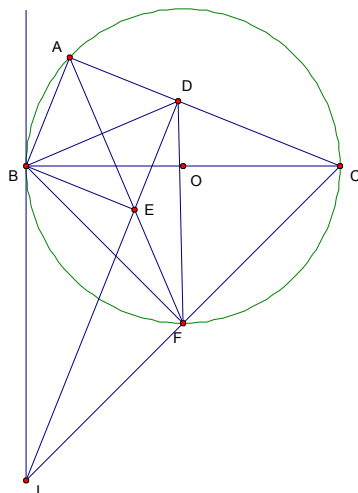
$$\Rightarrow AI \perp KE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow K, E, B$ thẳng hàng, khi đó $AI \perp KB$ tại E

$$\Rightarrow \angle HEB = 90^\circ \text{ hoặc } \angle AEB = 90^\circ$$

$\Rightarrow E$ luôn thuộc đường tròn $\left(O; \frac{AB}{2}\right)$ (đpcm)

Bài 18.



a) Ta thấy AF chính là phân giác của $\angle A$ nên $\angle FBC = \angle FAC = 45^\circ$.

Mặt khác $\angle BFC = 90^\circ$. Vậy tam giác BFC vuông cân tại F .

b) Vì tam giác BFC cân tại F nên $FC = FB$.

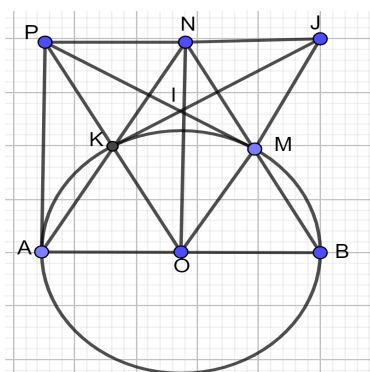
Ta có AF là đường trung trực của BD nên $FD = FB$ mà $FC = FB$ nên $FD = FC$.

do đó $\angle FDC = \angle FCD$ (đpcm).

c) Tam giác BCI vuông tại B có $\angle BCI = 45^\circ$ nên tam giác BCI cân tại B , có BF là đường cao nên F là trung điểm CI .

Nối I với D , tam giác IDC có DF là trung tuyến và bằng nửa cạnh IC nên tam giác DIC vuông tại D . Mặt khác $ED \perp AC$ nên I, E, D thẳng hàng.

Bài 19.



a) A, P, M, O cùng nằm trên đường tròn đường kính PO

b) Ta có: $OP \perp AM; BM \perp AM \Rightarrow BM \parallel OP$

c) $\triangle AOP = \triangle OBN \Rightarrow OP = BN$, ta lại có $BN \parallel OP$ nên $OPNB$ là hình bình hành

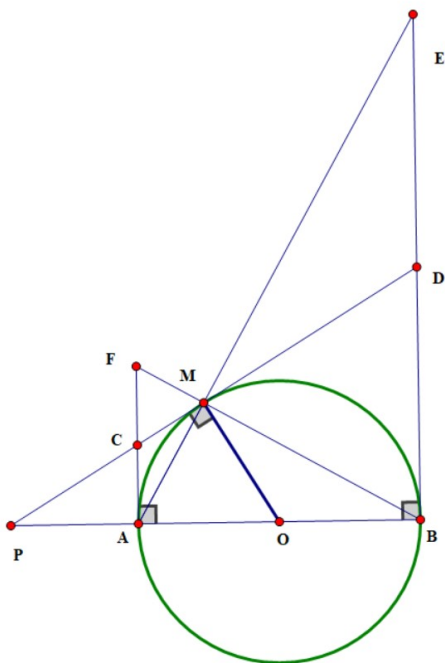
d) Ta có: $ON \perp PJ; PM \perp OJ$, mà $PM \perp ON = I \Rightarrow I$ là trực tâm $\Delta POJ \Rightarrow IJ \perp OP$ (1)

Chứng minh được $PAON$ là hình chữ nhật $\Rightarrow K$ là trung điểm OP

Lại có: $\angle APO = \angle OPI = \angle IOP \Rightarrow \triangle IPO$ cân tại $I \Rightarrow IK \perp OP$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

Bài 20.



a) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng CO. Xét tam giác CMO vuông tại M và tam giác CAO vuông tại A, ta có: $HC = HO = HM$ và $HC = HO = HA$

Do đó $\widehat{HC} = \widehat{HO} = \widehat{HA} = \widehat{HM}$. Vậy bốn điểm O, A, C, M cùng thuộc một đường tròn. Hay tứ giác OACM nội tiếp.

b) Xét tam giác PAC và tam giác PMO, có: $\widehat{MPO}$ chung và $\widehat{PAC} = \widehat{PMO} = 90^\circ$

Nên ΔPAC và ΔPMO đồng dạng

Nên $\frac{PA}{PC} = \frac{PM}{PO}$ Suy ra PA.PO=PC.PM

c) Chứng minh được $CA = CM = CF$; $DB = DM = DE$

Gọi G là giao điểm của PF và BD , cần chứng minh G trùng E .

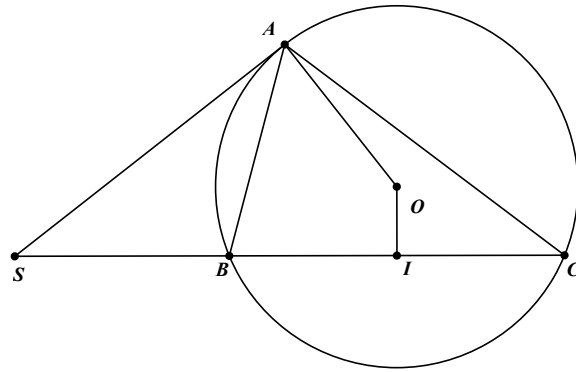
Dựa vào AC//BD chứng minh được $\frac{FC}{DG} = \frac{PC}{PD}; \frac{PC}{PD} = \frac{AC}{BD}; \frac{AC}{BD} = \frac{CF}{DE}$

Suy ra $DE = DG$ mà G và E đều thuộc tia đối của tia DB

Do đó G trùng với E .

Vậy ba điểm E; F; P thẳng hàng.

Bài 21.



a) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi M là trung điểm của SO , suy ra $SM = MO = \frac{SO}{2}$ (1)

Xét $\triangle SAO$ vuông tại A có M là trung điểm của SO

$\Rightarrow AM$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền SO

$$\Rightarrow AM = \frac{1}{2}SO \quad (2)$$

Xét $\triangle SIO$ vuông tại I có M là trung điểm SO

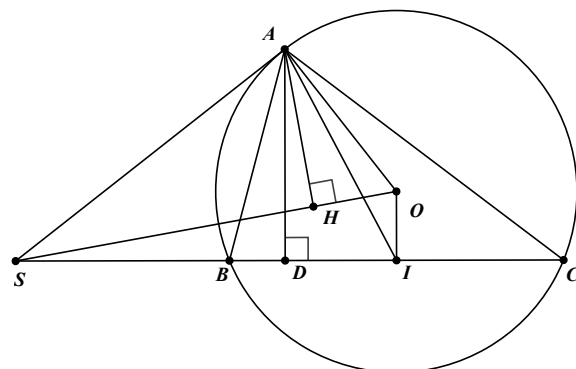
$\Rightarrow IM$ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền SO

$$IM = \frac{1}{2}SO \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có: $AM = IM = SM = MO = \frac{SO}{2}$

Suy ra bốn điểm S, A, O, I cùng thuộc một đường tròn hay tứ giác $SAOI$ nội tiếp đường tròn đường kính SO .

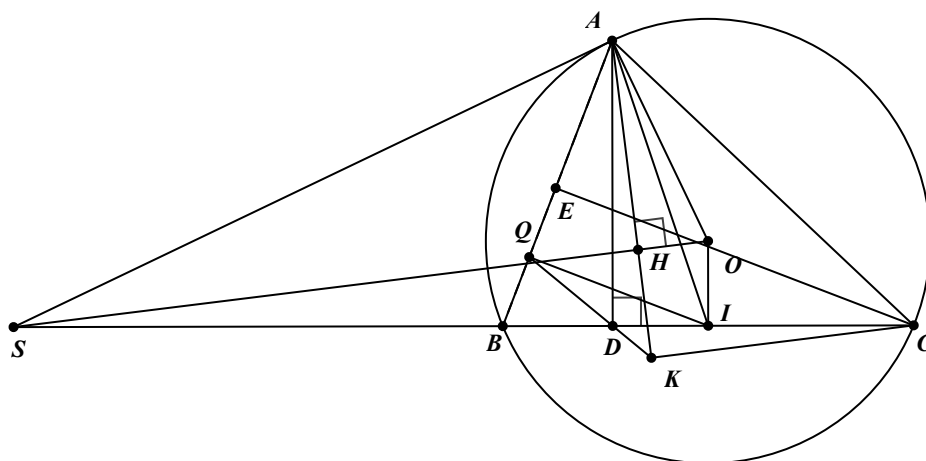
b) Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng SO và SC . Chứng minh $\angle AH = \angle AD$.



Theo ý a), ta có: Tứ giác $SAOI$ nội tiếp nên $\widehat{SOA} = \widehat{SIA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{SA}$);
 $\Rightarrow 90^\circ - \widehat{SOA} = 90^\circ - \widehat{SIA}$;

Mà $90^\circ - \widehat{SOA} = \widehat{OAH}$ ($\triangle AHO$ vuông tại H); $90^\circ - \widehat{SIA} = \widehat{IAD}$ ($\triangle ADI$ vuông tại D)
 $\Rightarrow \widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.

c) Vẽ đường cao CE của tam giác ABC . Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BE . Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại điểm K . Chứng minh $BQ \cdot BA = BD \cdot BI$.



Xét $\triangle BOC$ cân tại O có: $OI \perp BC$

$\Rightarrow OI$ là đường cao

$\Rightarrow OI$ cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow I$ là trung điểm của BC .

Mà Q là trung điểm của BE

$\Rightarrow IQ$ là đường trung bình của $\triangle BEC$

$\Rightarrow IQ \parallel CE$ mà $CE \perp AB$

$\Rightarrow IQ \perp AB$, lại có $\widehat{IDA} = 90^\circ$ ($AD \perp BC$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AQDI$ nội tiếp đường tròn đường kính AI

$\Rightarrow \widehat{QAI} + \widehat{QDI} = 180^\circ$ mà $\widehat{BDQ} + \widehat{QDI} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{BDQ} = \widehat{QAI} (= 180^\circ - \widehat{QDI})$

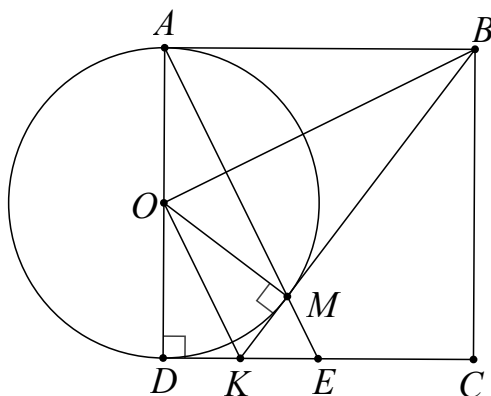
Xét $\triangle BDQ$ và $\triangle BAI$ có:

$\widehat{B}$ chung; $\widehat{BDQ} = \widehat{BAI}$ (chứng minh trên);

$\Rightarrow \triangle BDQ \sim \triangle BAI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BQ} = \frac{BA}{BI} \Rightarrow BQ \cdot BA = BD \cdot BI$$

Bài 22.



a) Ta có ΔABO vuông tại A , do đó A thuộc đường tròn đường kính BO .

Ta có BM là tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) , suy ra $BM \perp OM$ nên ta có $\triangle MBO$ vuông tại M , do đó M thuộc đường tròn đường kính BO .

Suy ra 4 điểm A, B, M, O cùng thuộc một đường tròn đường kính BO .

b) Ta có $BA \perp OA$ (A thuộc đường tròn tâm O)

nên BA là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Tương tự ta có KD là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Ta có BA và BM là hai tiếp tuyến cắt nhau

Suy ra OB là đường phân giác của $\angle AOM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Ta có KD và KM là hai tiếp tuyến cắt nhau

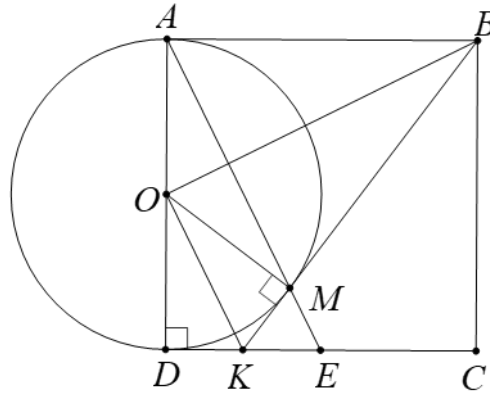
Suy ra OK là đường phân giác của $\widehat{BOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Do đó OB và OK là hai tia phân giác của hai góc kề bù $\angle AOM$ và $\angle BOM$.

Suy ra $OB \perp OK$ hay $\angle BOK = 90^\circ$

Xét $\triangle OBK$ vuông tại O , $OM \perp BK$, dễ dàng chứng minh được $\triangle MBO \sim \triangle MOK$ (g.g) nên suy ra $\frac{BM}{MO} = \frac{MO}{MK}$ (cạnh tương ứng).

suy ra $BM \cdot KM = OM^2 = OA^2 = \frac{AB^2}{4}$



c) Ta có $\triangle BAM$ cân tại B ($BA = BM$)

nên $\angle BAM = \angle BMA$

Lại có $\angle KEM = \angle BAM$ (hai góc so le trong)

$\angle BMA = \angle KME$ (hai góc đối đỉnh)

Suy ra $\angle KEM = \angle KME$

Nên $\triangle KEM$ cân tại K

Do đó $KE = KM$

Mặt khác $KD = KM$

Do đó $KE = KD$ hay K là trung điểm của ED .

Ta có $BM \cdot KM = OA^2 = OM^2 = 2^2 = 4(\text{cm})$

$$KM = \frac{4}{BM} = \frac{4}{4} = 1(\text{cm})$$

$$KD = 1(\text{cm})$$

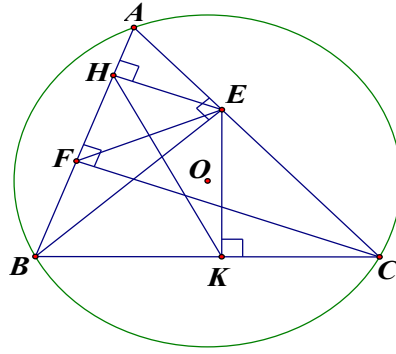
Ta có chu vi tứ giác $ABKD$ là

$$P_{ABKD} = AB + AD + KB + KD$$

$$= AB + AD + (AB + KD) + KD$$

$$= 3AB + 2KD = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 14(\text{cm})$$

Bài 23.



a) Chứng minh tứ giác $BHEK$ nội tiếp

Xét tứ giác $BHEK$, có: $\angle BHE = 90^\circ$ ($EH \perp AB$) và $\angle EKB = 90^\circ$ ($EK \perp BC$)

nên $\angle BHE + \angle EKB = 180^\circ$ mà $\angle BHE$ và $\angle EKB$ là hai góc đối

Do đó tứ giác $BHEK$ nội tiếp

b) Chứng minh $BH.BA = BK.BC$

Xét $\triangle BEC$ và $\triangle BKE$ có: $\angle BEC = \angle BKE = 90^\circ$; $\angle EBC$: góc chung

Do đó $\triangle BEC \sim \triangle BKE$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{BE}{BK} = \frac{BC}{BE} \Rightarrow BE^2 = BK.BC \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta được $BE^2 = BH.BA$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $BH.BA = BK.BC$.

c) Kẻ đường cao CF của tam giác ABC ($F \in AB$) và I là trung điểm của EF . Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Theo câu a) ta có tứ giác $BHEK$ nội tiếp nên $\angle BHK = \angle BEK$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BK) (3)

Xét $\triangle BEC$ vuông tại E có $EK \perp BC$ nên $\angle BEK = \angle ECB$ (cùng phụ $\angle EKC$) (4)

Xét $\triangle BFC$ có $\angle BFC = 90^\circ$ ($CF \perp AB$) nên B, F, C thuộc đường tròn đường kính BC

Lại có $\triangle BEC$ có $\angle BEC = 90^\circ$ ($BE \perp AC$) nên B, E, C thuộc đường tròn đường kính BC

Suy ra bốn điểm B, F, E, C cùng thuộc đường tròn đường kính BC

hay tứ giác $BFEC$ nội tiếp

Do đó $\angle ECB = \angle HFE$ (cùng bù với $\angle BFE$) (5)

Xét $\triangle FHE$ vuông tại H ($EH \perp AB$) có HI là đường trung tuyến ứng với cạnh EF (I là trung điểm

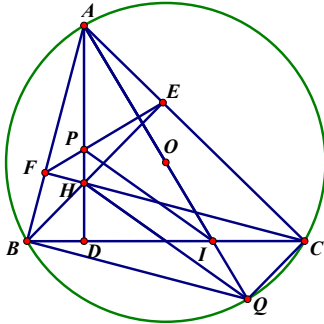
của EF) nên $HI = IF = \frac{EF}{2}$

hay $\triangle HIF$ cân tại I do đó $\widehat{FHI} = \widehat{FHI}$ (6)

Từ (3), (4), (5) và (6) suy ra $\widehat{BHK} = \widehat{FHI}$

Do đó H, I, K thẳng hàng.

Bài 24.



a) Ta có: $BE \perp AC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ$ nên $\triangle AEH$ vuông tại E , cạnh huyền AH

Suy ra A, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH (1)

Ta có: $CF \perp AB$ (gt) $\Rightarrow \widehat{HFA} = 90^\circ$ nên $\triangle AFH$ vuông tại F , cạnh huyền AH

Suy ra A, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH (2)

Từ (1), (2) suy ra bốn điểm A, H, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH

b) Xét đường tròn (O) có:

$$\widehat{ABC} = \widehat{AQC} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AC \text{)}$$

$$\widehat{ACQ} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\text{Xét } \triangle ADB \text{ và } \triangle ACQ \text{ có: } \widehat{ABC} = \widehat{AQC}$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACQ} = 90^\circ$$

$$\text{Suy ra } \triangle ADB \sim \triangle ACQ \text{ suy ra } \widehat{BAD} = \widehat{CAQ}.$$

$$\text{c) Vì } \widehat{BAD} = \widehat{CAQ} \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{DAQ} = \widehat{DAQ} + \widehat{QAC}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BAI} = \widehat{PAE}$$

$$\text{Hoặc chứng minh tứ giác } BFEC \text{ nội tiếp suy ra } \widehat{ABI} = \widehat{AEP}$$

$$\text{Chứng minh } \triangle AEP \text{ đồng dạng với } \triangle ABI \text{ (gg)}$$

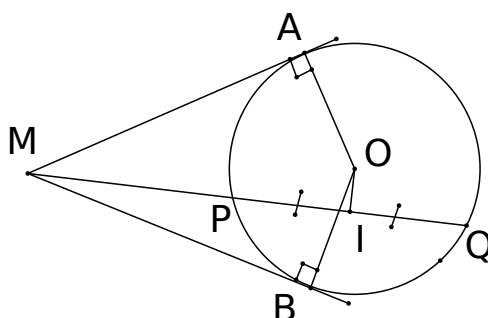
$$\text{Vì } \triangle AEP \text{ đồng dạng với } \triangle ABI \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AP}{AI} \text{ (1)}$$

$$\text{Chứng minh } \triangle AEH \text{ đồng dạng với } \triangle ABQ \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AQ} \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{AP}{AI} = \frac{AH}{AQ} \Rightarrow \frac{AP}{AH} = \frac{AI}{AQ}$$

$PI \parallel HQ$ (định lý Talet đảo)

Bài 25.

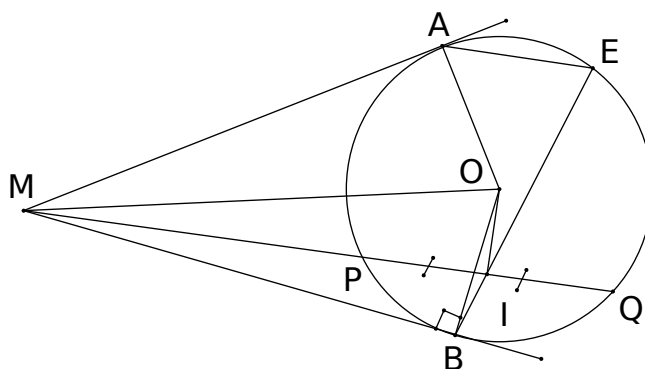


+) Có MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $MB \perp OB$ tại B suy ra B thuộc đường tròn đường kính MO (1)

+) Có I là trung điểm của dây PQ của đường tròn (O) nên $OI \perp PQ$ tại I suy ra $OI \perp MI$ tại I, suy ra I thuộc đường tròn đường kính MO (2)

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn đường kính MO. Vậy bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn.

b. Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường thẳng BI và đường tròn (O). Chứng minh: $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ và $AE \parallel PQ$.



+) Xét (O) có các tiếp tuyến MA, MB suy ra tia OM là phân giác của $\widehat{AOB}$

$$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \frac{1}{2} \widehat{BOA}$$

Lại có $\widehat{BEA} = \frac{1}{2} \widehat{BOA}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung)

Suy ra $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ (3)

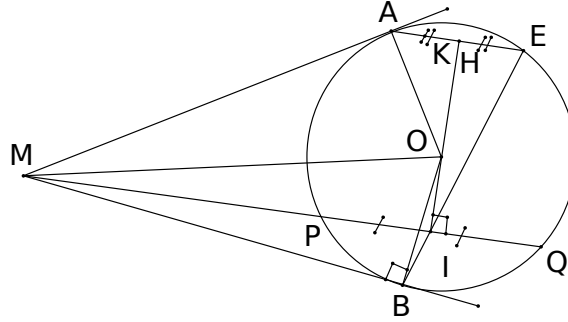
+) Có bốn điểm B, O, I, M cùng thuộc một đường tròn đường kính MO (cmt)

$\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{BIM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung MB) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BEA} = \widehat{BIM}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $AE \parallel IM$ hay $AE \parallel PQ$.

Vậy $\widehat{BOM} = \widehat{BEA}$ và $AE \parallel PQ$.

c. Gọi K là trung điểm của EA. Chứng minh ba điểm O; I; K thẳng hàng.



Kéo dài IO cắt AE tại H. Do $OI \perp PQ$ và $AE \parallel PQ$ (cmt) nên $OI \perp AE$ tại H hay $OH \perp AE$ tại H, suy ra H là trung điểm của AE.

Mà K là trung điểm của AE nên K và H trùng nhau. Suy ra K thuộc đường thẳng OI.

Vậy ba điểm O; I; K thẳng hàng.

Bài 26.

a) Do $AH \perp DH \Rightarrow \widehat{AHD} = 90^\circ$ nên A, H, D thuộc đường tròn đường kính AD (1)

Lại có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $\widehat{ACD} = 90^\circ$ nên A, C, D thuộc đường tròn đường kính AD (1)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ A, H, C, D thuộc đường tròn đường kính AD

hay tứ giác AHCD nội tiếp được một đường tròn.

b) Tứ giác AHCD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HCB} = \widehat{DAH}$

Ta có $\widehat{BCF}; \widehat{BAF}$ nội tiếp (O) cùng chắn $\widehat{BF} \Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{BAF}$

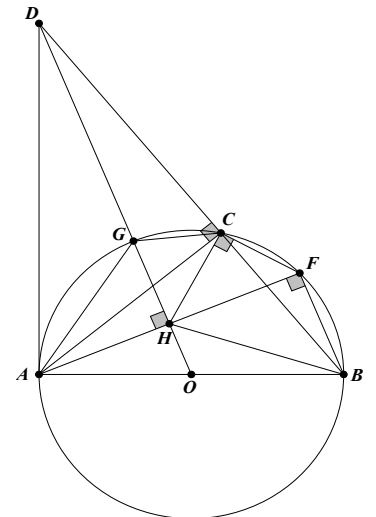
$\Rightarrow \widehat{HCF} = \widehat{HCB} + \widehat{BCF} = \widehat{DAH} + \widehat{BAF} = \widehat{DAB} = 90^\circ$

Vậy $\triangle CFH$ là tam giác vuông tại C.

c) Ta có: $\widehat{FCB} = \widehat{HAB}$ (3) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{FB}$).

Tam giác OAD vuông tại A. Khi đó $OA^2 = OH \cdot OD$

Mà $OA = OB$ nên $OB^2 = OH \cdot OD \Rightarrow \frac{OH}{OB} = \frac{OB}{OD}$



- a) MA, MB là hai tiếp tuyến của (O) nên : $MA \perp OA; MB \perp OB$
- Xét $\triangle MAO$ có $\widehat{MAO} = 90^\circ$ nên 3 điểm A, M, O cùng thuộc đường tròn đường kính OM
- Xét $\triangle MBO$ có $\widehat{MBO} = 90^\circ$ nên 3 điểm B, M, O cùng thuộc đường tròn đường kính OM
- Vậy bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn. (ĐPCM)

b) Ta có: $MA = MB$ (MA, MB là hai tiếp tuyến của (O))

$$OA = OB = R$$

Nên OM là trung trực của AB hay $OM \perp AB$ tại H

Mà B thuộc đường tròn đường kính AC nên $\angle ABC = 90^\circ$ hay $BC \perp AB$

Suy ra: $MO \parallel BC$

$$\angle MDC = \angle BCD \text{ (2 góc so le trong)}$$

Lại có: $\angle MBI = \angle BCD$ nên $\angle MDC = \angle IBM = \angle BCD$

Xét $\triangle IMD$ và $\triangle IBM$ có :

$$\angle MIB \text{ chung}$$

$$\angle MDC = \angle IBM$$

Nên: $\triangle IMD \sim \triangle IBM$ (g.g)

$$\text{Suy ra: } \frac{IM}{IB} = \frac{ID}{IM} \text{ hay } IM^2 = IB \cdot ID \text{ (ĐPCM)}$$

c) Ta có $\angle ADC = 90^\circ$ nên $\angle ADM = 90^\circ$

Suy ra 3 điểm A, D, M cùng thuộc đường tròn đường kính AM .

Mà $\angle AHM = 90^\circ$ nên 3 điểm A, H, M cùng thuộc đường tròn đường kính AM

Suy ra bốn điểm A, D, H, M cùng thuộc đường tròn đường kính AM .

Hay $AMDH$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle HDM = \angle MAD$

Mà $\angle MAD = \angle ABD$ nên $\angle IBH = \angle HDM$

Xét $\triangle IHD$ và $\triangle IBH$ có:

$$\angle HDM = \angle IBH \text{ (cmt)}$$

$$\angle HIB \text{ chung}$$

Nên: $\triangle IHD \sim \triangle IBH$, suy ra $IH^2 = IB \cdot ID$

Mà $IM^2 = IB \cdot ID$ nên $IM = IH$

Gọi J là giao điểm của IL và BC

Xét ΔMKI có $IM \parallel CJ$ nên $\frac{JC}{IM} = \frac{KJ}{KI}$

Xét ΔIKH có $BJ \parallel IH$ nên $\frac{BJ}{IH} = \frac{KJ}{KI}$

Suy ra: $JC = JB$

Hay J là trung điểm của BC

Xét ΔILH có $CJ \parallel LH$ nên $\frac{LC}{LH} = \frac{CJ}{HI} = \frac{2CI}{2HJ} = \frac{CB}{MH}$

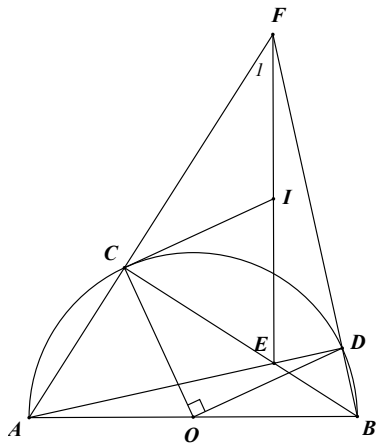
Lại có $\angle MHL = \angle BCL$ (đồng vị)

Suy ra $\Delta MHL \sim \Delta BCL$ (c.g.c)

Từ đó ta có: $\angle HLB = \angle HLM$

Vậy M, B, L thẳng hàng.

Bài 28.



a) Giả sử I là trung điểm của EF

Xét (O) có:

$\angle ACB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $BC \perp AF$

Nên ΔBCF hay ΔECF vuông tại C , có CI là đường trung tuyến nên $CI = IE = IF = \frac{EF}{2}$

$\angle ADB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $AD \perp BF$

Nên ΔADF hay ΔEDF vuông tại D , có DI là đường trung tuyến nên $DI = IE = IF = \frac{EF}{2}$

Khi đó $CI = DI = IE = IF$ suy ra tứ giác $FCED$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính EF

b) Tam giác vuông FDA đồng dạng với tam giác vuông FCB (gg)

$$\frac{FA}{FB} = \frac{FD}{FC} \quad (2 \text{ cặp cạnh tương ứng})$$

nên $FC.FA = FD.FB$ (đpcm)

c) Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCED nên $CI = IF$

khi đó $\triangle ICF$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{F}_1 = \widehat{FCI}$ (1)

Xét $\triangle OAC$ cân tại O nên $\widehat{EAO} = \widehat{OCA}$ (2)

Xét $\triangle ABF$ có BC, AD là hai đường cao cắt nhau tại E.

Nên E là trực tâm của $\triangle ABF$

Nên $EF \perp AB \Rightarrow \widehat{F}_1 + \widehat{EAO} = 90^\circ$ (3)

Từ (1); (2); (3) nên $\widehat{FCF} + \widehat{OCA} = 90^\circ$

Do đó $\widehat{OCI} = 90^\circ$ hay $OC \perp CI$

Vậy CI là tiếp tuyến của đường tròn (O)

d) Ta có

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{\theta}_1 + \widehat{\theta}_2 + \widehat{\theta}_3 = 180^\circ \\ \widehat{\theta}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \text{ nên } \widehat{\theta}_1 + \widehat{\theta}_3 = 90^\circ$$

Xét (O) ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{\theta}_1 \\ \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{\theta}_3 \end{array} \right\} \text{ nên } \widehat{DAB} + \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

Xét $\triangle AEB$ ta có $\widehat{DAB} + \widehat{ABC} = 45^\circ$ nên $\widehat{AEB} = 135^\circ$

Qua A kẻ $Ax \perp AE$.

Qua B kẻ $By \perp BE$. $By \cap Ax = K$

Xét tứ giác $EAKB$ ta có

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{KAE} = 90^\circ (Ax \perp AE) \\ \widehat{KBE} = 90^\circ (By \perp BE) \end{array} \right\} \text{ nên } \widehat{KAE} + \widehat{KBE} = 180^\circ$$

Mà hai góc nằm tại hai đỉnh đối nhau nên tứ giác $EAKB$ nội tiếp.

$$\widehat{AKB} + \widehat{AEB} = 180^\circ \text{ nên } \widehat{AKB} = 45^\circ$$

Gọi H là trung điểm của EK.

H là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác

Xét (H) : $\angle AKB = \frac{1}{2} \angle AHB \Rightarrow \angle AHB = 90^\circ$

Xét $\triangle AHB$ ($\angle AHB = 90^\circ$) có : $HA = HB$ (bán kính đường tròn tâm H)

$\Rightarrow \Delta AHB$ vuông cân tại H. Mà AB không đổi $\Rightarrow H$ cố định.

Áp dụng định lí Pytago vào $\triangle AHB$ ta có:

$$HA^2 + HB^2 = AB^2$$

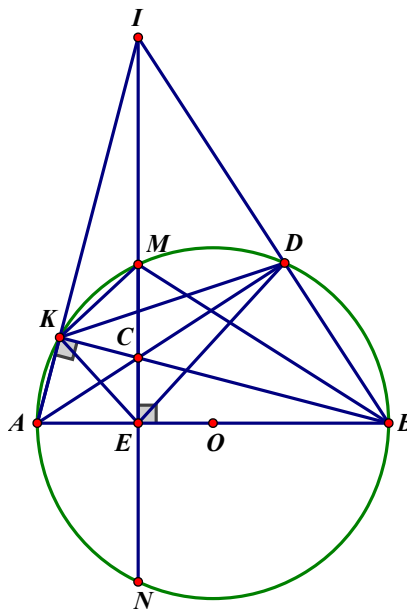
$$\text{nhên } 2HA^2 = 4R^2$$

$$HA^2 = 2R^2$$

$$HA = \sqrt{2}R$$

Vậy khi C thay đổi E chạy trên đường tròn $(H; \sqrt{2}R)$ cố định.

Bài 29.



a. Ta có: $\angle K B = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

nên ΔAKC vuông tại K

Do đó, ba điểm A, K, C thuộc đường tròn đường kính AC (1)

+) Ta có $\angle AEC = 90^\circ$ (vì đường kính AB vuông góc với dây MN tại E theo giả thiết)

Nên ΔAEC vuông tại E

Do đó, ba điểm A, E, C thuộc đường tròn đường kính AC (2)

Từ (1) và (2), ta có bốn điểm A, K, E, C cùng thuộc đường tròn đường kính AC

Vậy tứ giác $AKCE$ nội tiếp.

b. + Ta có tứ giác AKCE nội tiếp (cmt)

nên $\angle AKE + \angle ACE = 180^\circ$ (tính chất)

Do đó, $\angle ACE = 180^\circ - \angle AKE$ (1)

+) Ta có bốn điểm AKMB thuộc đường tròn (O) nên tứ giác AKMB nội tiếp

Do đó, $\angle KAB + \angle KMB = 180^\circ$. Suy ra $\angle KMB = 180^\circ - \angle KAB$ (2)

+) Từ (1) và (2) ta có: $\angle ACE = \angle KMB$ mà $\angle ACE = \angle MCB$ (đối đỉnh)

Nên $\angle MCB = \angle KMB$

+) Xét $\triangle BMC$ và $\triangle BKM$ có:

$\angle MBK$ chung; $\angle MCB = \angle KMB$ (cmt)

Nên $\triangle BMC \sim \triangle BKM$ (góc-góc)

Do đó $\frac{BM}{BK} = \frac{BC}{BM}$. Suy ra $BM^2 = BK \cdot BC$.

c. Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác AECK, ta có:

$\angle EKC = \angle EAC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC) (3)

+) Xét tam giác BAI có BK, IE là hai đường cao, mà chúng cắt nhau tại C.

Suy ra C trực tâm tam giác BAI nên $\angle ADB = 90^\circ$. Suy ra D thuộc đường tròn (O)

+) Ta có $\angle KDC = \angle EAC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD của đường tròn (O)). (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle EKC = \angle KDC$

Do đó, KC là tia phân giác của góc EKD

+) Chứng minh tương tự câu a ta được tứ giác BECD nội tiếp

Suy ra $\angle DEB = \angle DBE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung CE)

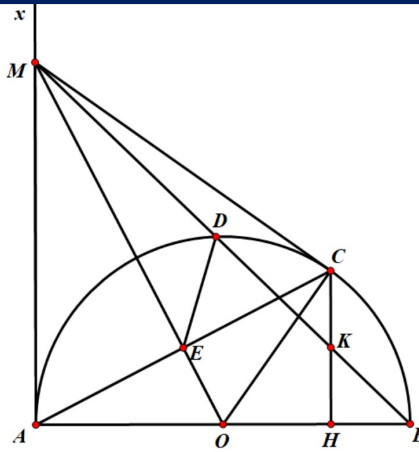
Mặt khác $\angle KDC = \angle KBE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AK của (O))

Suy ra $\angle DEB = \angle KDC$, suy ra DC là tia phân giác của góc KDE

Tam giác KDE có C là giao điểm của hai đường phân giác góc K và D

Suy ra C cách đều 3 cạnh của tam giác KDE

Bài 30.



a) Do MA, MB là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) nên ta có $\angle MAO = \angle MCO = 90^\circ$

Suy ra $\triangle MAO$ là tam giác vuông tại A và $\triangle MCO$ là tam giác vuông tại C

Suy ra M, A, O cùng thuộc đường tròn đường kính MO và M, C, O cùng thuộc đường tròn đường kính MO

Do đó bốn điểm A, M, C, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có $\angle AMC = \angle COB = 60^\circ$ (hai góc cùng bù với $\angle AOC$)

Diện tích hình quạt COB là $\frac{60}{360} \pi \cdot R^2 = \frac{\pi R^2}{6}$

Do MA, MC là hai tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) nên $MA = MC$ và $OA = OC$

Từ đó suy ra M thuộc đường trung trực của AC, O thuộc đường trung trực của AC

Nên MO vuông góc AC tại trung điểm E của AC, suy ra $\angle AEM = 90^\circ$

Suy ra $\triangle AEM$ vuông tại E, nên $\triangle AEM$ nội tiếp đường tròn đường kính MA

Có $\angle ADM = 180^\circ - \angle ADB = 90^\circ$ (do $\angle ADB$ chắn nửa đường tròn nên $\angle ADB = 90^\circ$).

Suy ra $\triangle ADM$ vuông tại D, nên $\triangle ADM$ nội tiếp đường tròn đường kính MA

Do đó tứ giác AMDE nội tiếp đường tròn đường kính MA.

Xét tứ giác AMDE nội tiếp có: $\angle ADE = \angle AMO$ (cùng chắn $\angle AE$)

Xét tứ giác AMCO nội tiếp có: $\angle AMO = \angle ACO$ (cùng chắn $\angle AO$)

Suy ra $\angle ADE = \angle ACO$.

c) Gọi K là giao điểm của MB và CH.

Do $CH \parallel AM$ nên theo định lý Thales thì $\frac{HK}{AM} = \frac{HB}{AB} = \frac{HB}{2R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{HB}{R}$

Ta có $OM \parallel BC$ (cùng vuông góc với AC) suy ra $\angle MOA = \angle CBH$ (hai góc đồng vị)

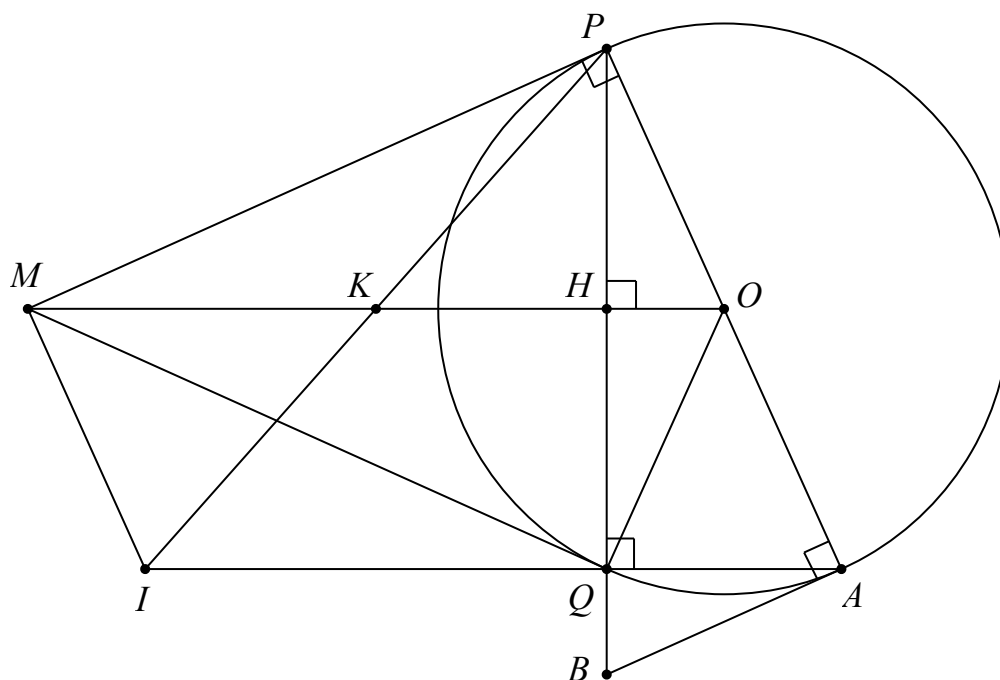
Xét $\triangle HCB$ và $\triangle AMO$ có $\angle MAO = \angle HCB = 90^\circ$; $\angle MOA = \angle CBH$

Suy ra $\triangle HCB \sim \triangle AMO$, nên $\frac{HB}{OA} = \frac{CH}{AM} = \frac{HB}{R}$

Do đó $\frac{HK}{AM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CH}{AM}$ hay $HK = \frac{1}{2} CH$

Suy ra MB đi qua trung điểm của CH (đpcm).

Bài 31.



a) Chứng minh: AQ song song với OM .

Xét (O) ta có: $\angle AQP = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra $AQ \perp PQ$. (1)

Mặt khác, MP và MQ là hai tiếp tuyến của (O) , cắt nhau tại M . Theo chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $MP = MQ$ và MO là phân giác của $\angle PMQ$.

Suy ra: $\triangle MPQ$ cân tại M , đường phân giác MO đồng thời là đường cao, hay $OM \perp PQ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AQ \parallel OM$.

b) Chứng minh: $PQ \cdot PB = 4R^2$.

Vì AB là tiếp tuyến của (O) tại A nên $AB \perp OA$.

Xét $\triangle AQP$ và $\triangle BAP$ có: $\angle AQP = \angle BAP$ (góc vuông), $\angle BPA$ chung.

Suy ra $\triangle AQP \sim \triangle BAP$ (g-g).

Suy ra: $\frac{PQ}{PA} = \frac{PA}{PB}$. Suy ra: $PQ \cdot PB = PA^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

c) Gọi K là trung điểm của MO . Tia PK cắt AQ tại I . Chứng minh tứ giác $MOAI$ là hình bình hành.

Xét $\triangle AIP$ có:

+ O là trung điểm của AP (vì O là tâm đường tròn đường kính AP)

+ $OK \parallel AI$ (vì $AQ \parallel OM$ - chứng minh trên).

Suy ra K là trung điểm của IP (định lý).

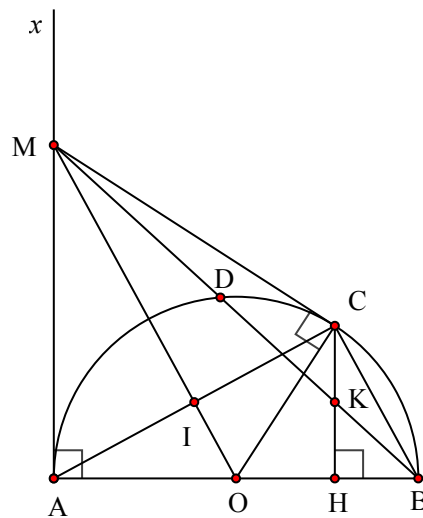
Suy ra OK là đường trung bình của $\triangle AIP$.

Suy ra: $OK = \frac{1}{2} AI$ (tính chất đường trung bình của tam giác).

Lại có: $OK = \frac{1}{2} OM$ (vì K là trung điểm của OM) nên $AI = OM$.

Xét tứ giác $MIAO$ có: $AI \parallel OM$ và $AI = OM$ (chứng minh trên).
Suy ra $MIAO$ là hình bình hành.

Bài 32.



a) Chứng minh bốn điểm A, M, C, O cùng thuộc một đường tròn.

Xét đường tròn (O) ,

+ Do AM là tiếp tuyến của (O) :

$$MA \perp OA$$

$\angle MAO = 90^\circ$

Suy ra A thuộc đường tròn đường kính MO (1)

+ Do MC là tiếp tuyến của (O) :

$$MC \perp OC$$

$$\angle MCO = 90^\circ$$

Suy ra C thuộc đường tròn đường kính MO (2)

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm A, M, C, O cùng thuộc một đường tròn (đpcm)

b) Chứng minh $OI \cdot OM = OA^2$ và $OM \parallel BC$.

Xét đường tròn (O)

Có hai tiếp tuyến MA, MC cắt nhau tại M suy ra $MA = MC$

Mà $OA = OC = R$

Suy ra OM là đường trung trực của AC

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow OM \perp AC(3) \\ I \in AC \end{array} \right\} \Rightarrow AI \perp OM$$

Xét $\triangle OIA$ và $\triangle OAM$ có

$$\left. \begin{array}{l} \angle OIA = \angle OAM = 90^\circ \\ \angle AOM \text{ chung} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAI \sim \triangle OAM$$

$$\frac{OI}{OA} = \frac{OA}{OM}$$

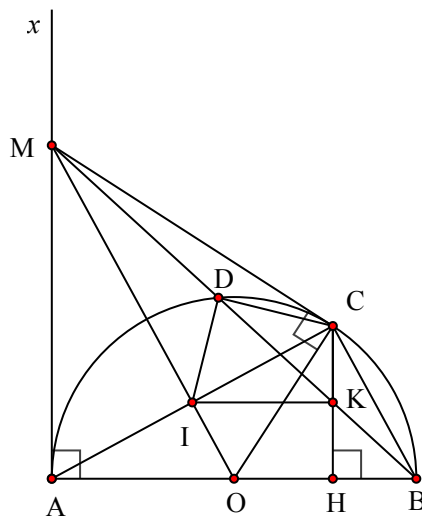
$$OI \cdot OM = OA^2 \text{ (đpcm)}$$

Ta có $\angle ACB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow AC \perp BC \text{ (4)}$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow OM \parallel BC$ (đpcm)

c) Chứng minh K là trung điểm của CH.



Do $CH \parallel AM$ (cùng vuông góc với AB)

$$\angle HCA = \angle CAM \text{ (So le trong)} \text{ (5)}$$

Mà $MA = MC$ (cmt) $\Rightarrow \triangle MAC$ cân tại M

$$\Rightarrow \angle MAC = \angle MCA \text{ (t/c tam giác cân)} \text{ (6)}$$

$$\text{Từ (5) và (6)} \Rightarrow \angle MCA = \angle HCA$$

$\Rightarrow AC$ là tia phân giác $\angle MCH$

Mà $AC \perp CB$ (cmt)

$$\Rightarrow CB \text{ là phân giác ngoài tại } C \text{ của } \triangle KCM \Rightarrow \frac{BK}{BM} = \frac{CK}{CM} \text{ (7)}$$

Xét $\triangle ABM$ có

$KH \parallel AM$ (cùng vuông góc với AB)

$$\Rightarrow \frac{BK}{BM} = \frac{KH}{AM} \quad (8)$$

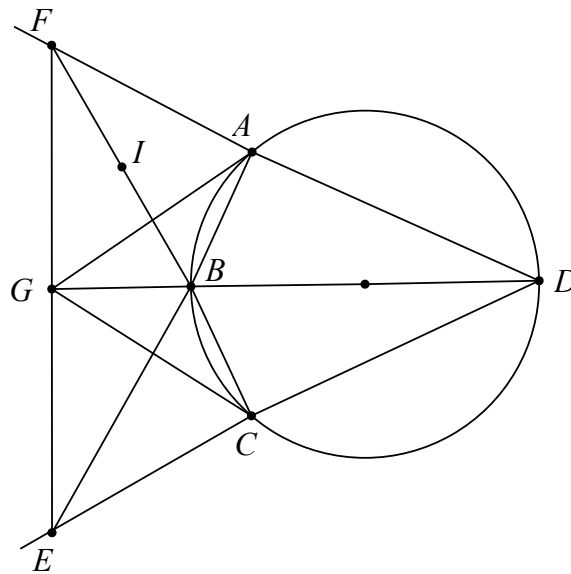
$$\text{Từ (7) và (8)} \Rightarrow \frac{CK}{CM} = \frac{KH}{AM}$$

Mà $CM = AM$ (cmt)

$$\Rightarrow CK = KH$$

Vậy K là trung điểm của CH (đpcm)

Bài 33.



a. Chứng minh rằng $BD \perp EF$ tại G

Có $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BD)

Suy ra $AE \perp DF$ và $FC \perp DE$

Mà AE cắt FC tại B

Suy ra B là trực tâm của $\triangle DEF$

Suy ra $BD \perp EF$ tại G

b. Chứng minh bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn.

Gọi I là trung điểm của FB

Ta có $BD \perp EF$ tại G (cmt)

Suy ra $\triangle FGB$ vuông tại G suy ra $GI = IF = IB$ (1)

$AE \perp DF$ (cmt) suy ra $\triangle FBA$ vuông tại A suy ra $AI = IF = IB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $GI = AI = IF = IB$

Suy ra bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn. (đpcm)

c. Chứng minh rằng $BA \cdot BE = BC \cdot BF = BD \cdot BG$

+ c/m $\Delta BFA \sim \Delta BEC$ (g.g)

Suy ra $\frac{BA}{BC} = \frac{BF}{BE}$ suy ra $BA \cdot BE = BF \cdot BC$ (1)

+ c/m $\Delta BGF \sim \Delta BCD$ (g.g) suy ra $\frac{BF}{BD} = \frac{BG}{BC}$ suy ra $BF \cdot BC = BD \cdot BG$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BA \cdot BE = BC \cdot BF = BD \cdot BG$ (đpcm)

d. Chứng minh rằng B là tâm đường tròn nội tiếp ΔACG

+ Xét tứ giác ABGF có bốn điểm F, G, B, A cùng thuộc một đường tròn đường kính BF (theo câu b) suy ra tứ giác ABGF nội tiếp đường tròn đường kính BF.

+ Do $\angle BCE = \angle GCE = 90^\circ$ nên Tứ giác DCEG nội tiếp đường tròn đường kính BE.

+ Do $\angle EAF = \angle ECF = 90^\circ$ nên Tứ giác ACEF nội tiếp đường tròn đường kính EF.

Do đó $\angle GAB = \angle GFB$ ($= \frac{1}{2}$ số cung BG)

$\angle GAE = \angle GFA$ ($= \frac{1}{2}$ số cung CE)

Suy ra $\angle BAG = \angle GAE (= \angle GFC)$ suy ra AB là đường phân giác của ΔACG (1)

Do đó $\angle FCA = \angle FEA$ ($= \frac{1}{2}$ số cung AF)

$\angle GCF = \angle GEB$ ($= \frac{1}{2}$ số cung BG)

Suy ra $\angle FCA = \angle GCF (= \angle GAE)$ suy ra CB là đường phân giác của ΔACG (2)

Từ (1) và (2) suy ra B là giao hai đường phân giác của ΔACG

Suy ra B là tâm đường tròn nội tiếp ΔACG (đpcm)

Bài 34.

a) (0,75 điểm)

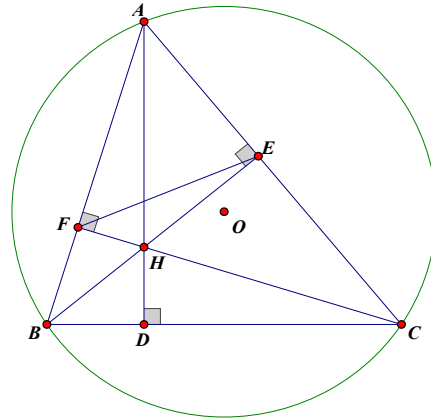
Ta có: $\angle ADB = 90^\circ$ (vì $AD \perp BC$)

$\angle AEB = 90^\circ$ (vì $BE \perp AC$)

Xét tứ giác ABDF có $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$

mà D và F là 2 đỉnh kề nhau cùng cạnh AB dưới 1 góc vuông

Nên 4 điểm A, B, D, E cùng thuộc một đường tròn.



b) (0,75 điểm) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABDF có

$\angle EBD$ là góc nội tiếp chắn cung DE

$\angle EAD$ là góc nội tiếp chắn cung DE

Nên $\angle EBD = \angle EAD$ (Hệ quả góc nội tiếp) hay

$\angle HBD = \angle EAD$

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle ACD$ có $\angle HDB = \angle CDA = 90^\circ$

$\angle HBD = \angle EAD$ (cmt)

Do đó $\triangle BHD$ đồng dạng với $\triangle ACD$ (g-g)

$$\frac{DB}{AD} = \frac{DH}{DC}$$

Suy ra $DB \cdot DC = DH \cdot DA$

c) (0,75 điểm) Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Xét đường tròn (O) có:

$\angle ABK = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $KB \perp AB$.

Mặt khác: $CH \perp AB$ (giả thiết)

Suy ra: $KB \parallel CH$ (quan hệ vuông góc song song) (1)

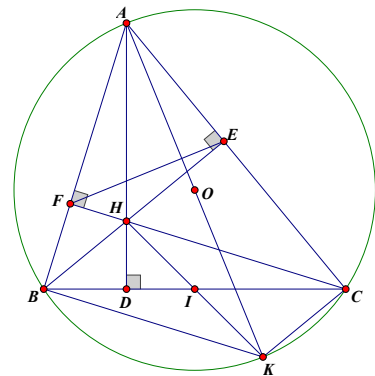
Xét đường tròn (O) có: $\angle ACK = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $KC \perp AC$.

Mặt khác: $BH \perp AC$ (giả thiết)

Suy ra: $KC \parallel BH$ (quan hệ vuông góc song song) (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác BHCK là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết), suy ra hai đường chéo BC và HK cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (tính chất).

Mà I là giao điểm của BC và HK nên I là trung điểm của BC.



d) (0,75 điểm) Tính $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$.

$$P = \frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$$

Đặt

Khi đó

$$P = \frac{AD - HD}{AD} + \frac{BE - HE}{BE} + \frac{CF - HF}{CF}$$

$$P = 1 - \frac{HD}{AD} + 1 - \frac{HE}{BE} + 1 - \frac{HF}{CF}$$

$$P = 3 - \left(\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} \right)$$

$$\frac{HD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}HD \cdot BC}{\frac{1}{2}AD \cdot BC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}}$$

Ta có:

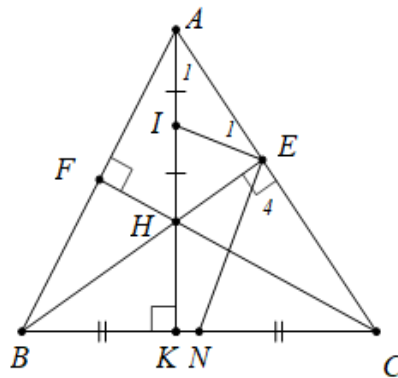
Chúng minh tương tự ta có:

$$\frac{HE}{BE} = \frac{S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta ABC}}; \quad \frac{HF}{CF} = \frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HAC} + S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}} = 1$$

$$\text{Vậy } P = \frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 3 - 1 = 2$$

Bài 35.



a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

Ta có $\angle AEB = 90^\circ$ (do BE là đường cao của ΔABC) hay $\angle AEH = 90^\circ$

$\angle AFC = 90^\circ$ (do CF là đường cao của ΔABC) hay $\angle AFH = 90^\circ$

Suy ra bốn điểm A, E, H, F cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH (đpcm)

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH ;

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng AH nên I là tâm đường tròn đường kính AH

Suy ra $IA = IE$

Vì $\triangle IAE$ cân tại I nên $\angle A_1 = \angle E_1$ (1)

$\triangle EBC$ vuông tại E có EN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$$\text{Nên } EN = NC \left(= \frac{BC}{2} \right)$$

Suy ra $\triangle ENC$ cân tại N nên $\angle NCE = \angle E_4$ (2)

Xét $\triangle AKC$ vuông tại K có $\angle KCA + \angle A_1 = 90^\circ$ hay $\angle NCE + \angle A_1 = 90^\circ$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\angle E_1 + \angle E_4 = 90^\circ$

Lại có $\angle E_1 + \angle E_4 + \angle EN = 180^\circ$ (do A, E, C thẳng hàng)

Suy ra $90^\circ + \angle EN = 180^\circ$ hay $\angle EN = 90^\circ$

Suy ra $EN \perp EI$ tại E

Do đó NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH (đpcm)

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK \cdot CB$.

Áp dụng định lý Py – Ta – Go $\triangle CIK$ vuông tại K , ta có: $CI^2 = CK^2 + IK^2$

Lại có $IA = IE = IH$ (cùng bán kính đường tròn tâm I)

$$\text{Suy ra } CI^2 - IE^2 = CK^2 + IK^2 - IE^2$$

$$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IE)$$

$$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IH) = CK^2 + AK \cdot KH \quad (4)$$

$$\text{Ta lại có } CK \cdot CB = CK(CK + KB) = CK^2 + CK \cdot KB \quad (5)$$

Xét $\triangle KBH$ và $\triangle KAC$ có

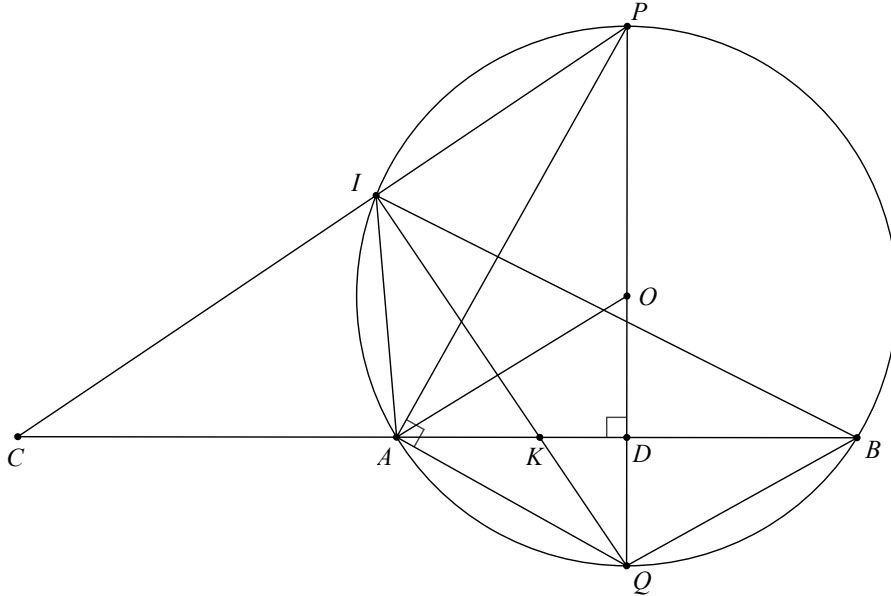
$$\angle KBH = \angle KAC (= 90^\circ - \angle KCB); \quad \angle BKH = \angle AKC = 90^\circ$$

Do đó $\triangle AHK \sim \triangle ACB$ (g - g)

Nên $\frac{KB}{KA} = \frac{KH}{KC}$ suy ra $KA \cdot KH = KB \cdot KC$ hay $AK \cdot KH = CK \cdot KB$ (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra $CI^2 - IE^2 = CK \cdot CB$ (đpcm)

Bài 36.



a) Chứng minh: Tứ giác $PDKI$ nội tiếp

Ta có PQ là đường kính của đường tròn (O). Suy ra $\angle PIQ = 90^\circ$ suy ra $CI \cdot CP = CD \cdot CK$

Do P là điểm chính giữa của cung lớn AB. Suy ra $PA = PB$

Mà $OA = OB$ (cùng là bán kính của (O))

Suy ra PO là đường trung trực của AB suy ra $OP \perp AB$ tại D

Suy ra $PQ \perp AB$

$$\angle PDK = 90^\circ$$

$$\text{Nên } \angle PDK + \angle PIK = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Tứ giác $PDKI$ nội tiếp (hai góc đối bù nhau)

b) Xét tam giác CIK và tam giác CDP ta có :

$\angle C$ chung

$$\angle IKC = \angle DPC = 90^\circ$$

$$\triangle CIK \sim \triangle CDP (g.g)$$

$$\frac{CI}{CD} = \frac{CK}{CP} \text{ suy ra } CI \cdot CP = CD \cdot CK$$

$$CI \cdot CP = CD \cdot CK$$

Ta có PO là đường trung trực của AB, hay PQ là đường trung trực của AB

$QA = QB$ hay điểm Q là điểm chính giữa cung nhỏ AB nên $\widehat{AQ} = \widehat{BQ}$

Do đó $\widehat{AIQ} = \widehat{BIQ}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau)

Hay IK là đường phân giác trong của tam giác AIB ; và lại có $IK \perp IC$ ($\widehat{PIQ} = 90^\circ$)

nên IC là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh I của tam giác AIB

c) Ta đi chứng minh K là điểm cố định

Ta có điểm D là trung điểm AB ($OD \perp AB$)

Do $ABPI$ là tứ giác nội tiếp

$$\widehat{CAI} = \widehat{CPB}$$

$$\Delta CAI \sim \Delta CPB (g.g)$$

$$\frac{CA}{CP} = \frac{CI}{CB}$$

$$CA.CB = CI.CP$$

Vậy nên $CA.CB = CK.CD (= CI.CP)$

$$CK.CD = (CD - DA)(CD + DB)$$

$$CK.CD = \left(CD - \frac{AB}{2} \right) \left(CD + \frac{AB}{2} \right)$$

$$CK.CD = CD^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$CD^2 - CK.CD = \frac{AB^2}{4}$$

$$CD.KD = \frac{AB^2}{4}$$

$$KD = \frac{AB^2}{4CD}$$

Vì $A; B; C; D$ là bốn điểm cố định nên K điểm cố định .

Bài 37.

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

Xét (O) có: AB là tiếp tuyến tại B (GT) nên $AB \perp OB \Rightarrow \widehat{ABO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABO$ vuông tại B nên điểm B thuộc đường tròn đường kính AO (1)

Mặt khác: AC là tiếp tuyến tại C (GT) nên $AC \perp OC \Rightarrow \widehat{ACO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ACO$ vuông tại C nên điểm C thuộc đường tròn đường kính AO (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 4 điểm A, B, O, C cùng thuộc đường tròn đường kính AO

Do đó, tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường kính AO

b) Chứng minh BC vuông góc với OA và $BA \cdot BE = AE \cdot BO$.

* Chứng minh BC vuông góc với OA

Xét (O) có: AB và AC là hai tiếp tuyến cắt nhau ở A (GT)

$\Rightarrow AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $OB = OC$ (B, C thuộc đường tròn (O))

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC nên $BC \perp OA$

* Chứng minh $BA \cdot BE = AE \cdot BO$

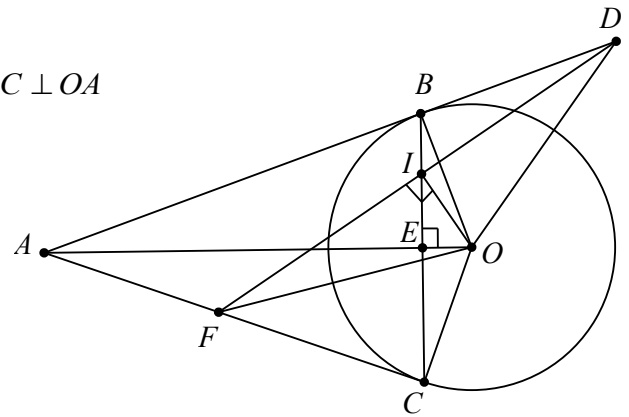
Xét ΔABO và ΔAEB có:

$$\angle ABO = \angle AEB = 90^\circ \text{ (cmt)}$$

$\angle BAO$: góc chung

Suy ra: $\Delta ABO \sim \Delta AEB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BO}{EB} \Rightarrow AB \cdot EB = AE \cdot BO$$



c) Gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng BE , đường thẳng qua I và vuông góc OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D và F . Chứng minh F là trung điểm của AC .

$$\text{Vì } AB \perp OB \Rightarrow \angle ABO = 90^\circ$$

$\Rightarrow \Delta DBO$ vuông tại B nên điểm B thuộc đường tròn đường kính DO (1)

$$\text{Vì } OI \perp DF \Rightarrow \angle DIO = 90^\circ$$

$\Rightarrow \Delta DIO$ vuông tại I nên điểm I thuộc đường tròn đường kính DO (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 4 điểm D, B, I, O cùng thuộc đường tròn đường kính DO

Do đó, tứ giác $DBIO$ nội tiếp đường tròn đường kính DO

$$\Rightarrow \angle BDO = \angle BCO \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung } IO)$$

CMTT ta có: $\angle FDO = \angle FCO$

Mặt khác: $OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân ở $O \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB$ hay $\angle BCO = \angle FCO$

$\Rightarrow \Delta DIO$ vuông tại I nên điểm I thuộc đường tròn đường kính DO (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 4 điểm D, B, I, O cùng thuộc đường tròn đường kính DO

Do đó, tứ giác $DBIO$ nội tiếp đường tròn đường kính DO

$\Rightarrow \widehat{HDO} = \widehat{HBO}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IO)

CMTT ta có: $\widehat{HFO} = \widehat{HCO}$

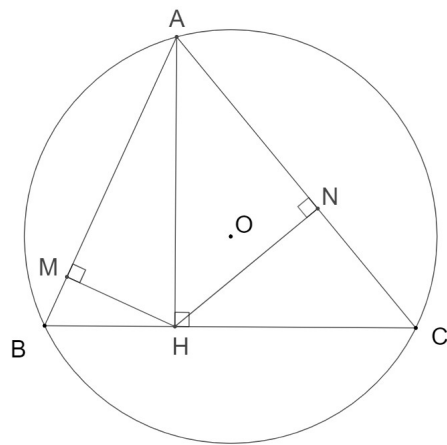
Mặt khác: $OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân ở $O \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ hay $\widehat{HBO} = \widehat{HCO}$

Do đó: $\widehat{HDO} = \widehat{HFO} \Rightarrow \Delta ODF$ cân ở O mà $OI \perp DF$ (GT)

$\Rightarrow I$ là trung điểm của DF

Bài 39.

a)

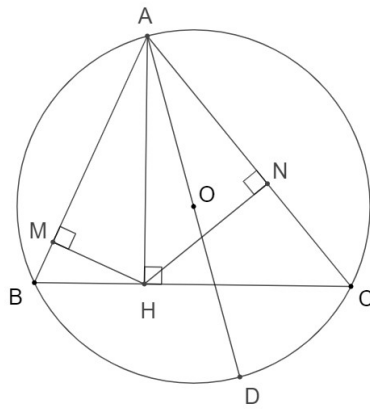


Ta có $HM \perp AB$ tại M nên ΔAMH vuông tại M , suy ra A, M, H cùng thuộc đường tròn đường kính AH .

Ta có $HN \perp AC$ tại N nên ΔANH vuông tại N , suy ra A, N, H cùng thuộc đường tròn đường kính AH .

Do đó 4 điểm A, M, H, N cùng thuộc đường tròn đường kính AH .

b)



Xét $\triangle AMH$ và $\triangle AHB$ có $\angle AMH = \angle AHB = 90^\circ$, $\hat{A}$ chung

$$\Rightarrow \triangle AMH \sim \triangle AHB (g.g) \Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AH}{AB}$$

$$\Rightarrow AH^2 = AM \cdot AB (1)$$

Chứng minh tương tự có $AH^2 = AN \cdot AC (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AM \cdot AB = AN \cdot AC \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$

Xét $\triangle AMN$ và $\triangle ACB$: $\begin{cases} \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} \\ \hat{A} \text{ chung} \end{cases}$

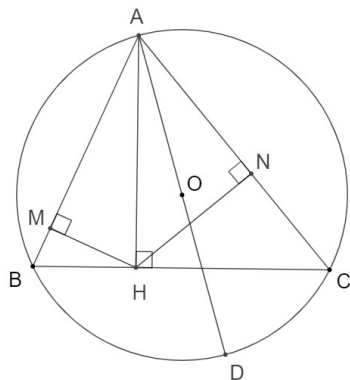
$$\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ACB (c.g.c) \Rightarrow \angle ANM = \angle ABC \text{ (hai góc tương ứng) } (3)$$

Kẻ đường kính AD ta có $\angle DAC = \angle DBC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DC) (4)

Từ (3); (4) suy ra $\angle ANM + \angle DAC = \angle ABC + \angle DBC = \angle ABD = 90^\circ$

$$\Rightarrow AO \perp MN$$

c)



Theo chứng minh trên có $AN \cdot AC = AH^2 = 2R^2 = AO \cdot AD$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{AO}{AC}$$

Xét $\triangle ANO$ và $\triangle ADC$: $\begin{cases} \frac{AN}{AD} = \frac{AO}{AC} \\ \hat{A} \text{ chung} \end{cases}$
 $\Rightarrow \triangle ANO \sim \triangle ADC (c.g.c)$

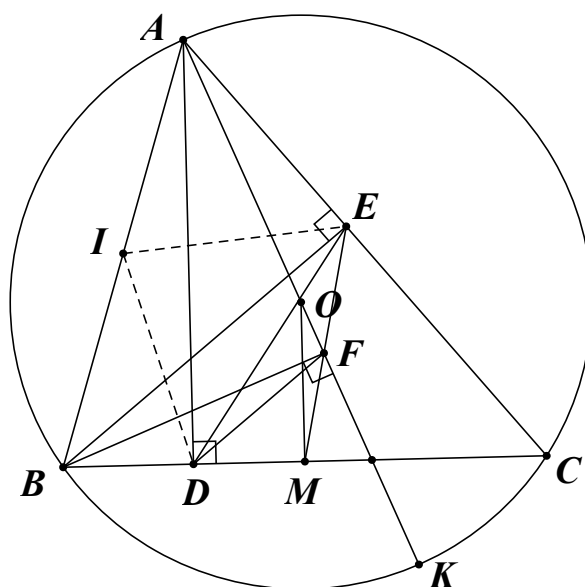
$$\Rightarrow \angle AON = \angle ACD = 90^\circ$$

Chứng minh tương tự $\angle AOM = \angle ABD = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle AOM + \angle AON = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Hay $\angle AMN = 180^\circ \Rightarrow A, M, N$ thẳng hàng.

Bài 40.



a)

+ Có AD là đường cao của tam giác ABC

nên $AD \perp BC \Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$

+ Có BE là đường cao của tam giác ABC

nên $BE \perp AC \Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$

+ Gọi I là trung điểm của AB

$$\triangle ABD \text{ vuông tại } D \Rightarrow IA = IB = ID = \frac{AB}{2} \quad (1)$$

$$\Delta ABE \text{ vuông tại } E \Rightarrow IA = IB = IE = \frac{AB}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1); (2) suy ra } IA = IB = IE = ID \left(= \frac{AB}{2} \right)$$

Nên bốn điểm A, B, E, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh: $\angle ADB = \angle ACK = 90^\circ$

+ Chỉ ra: $\angle ABD = \angle AKC$

Chứng minh ΔABD đồng dạng ΔAKC (g.g)

và $AB.AC = AK.AD$

+ Chứng minh tứ giác AFDB nội tiếp

$$\Rightarrow \angle BFD = \angle BAD \quad (1)$$

+ Vì ΔABD đồng dạng ΔAKC

$$\Rightarrow \angle BAD = \angle KAC \quad (2)$$

+ Chứng minh tứ giác AEFB nội tiếp

$$\Rightarrow \angle EAF = \angle EBF$$

Hay $\angle EAK = \angle EBF \quad (3)$

Từ (1); (2); (3) suy ra: $\angle EBF = \angle BFD$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $BE \parallel DF$

Lại có $BE \perp AC$ (GT)

Vậy $DF \perp AC$

c) Gọi M là trung điểm của BC

Suy ra M cố định và OM vuông góc BC (quan hệ giữa đường kính và dây)

+ Chứng minh tứ giác OMBF nội tiếp

Suy ra $\angle FOM = \angle FBM$

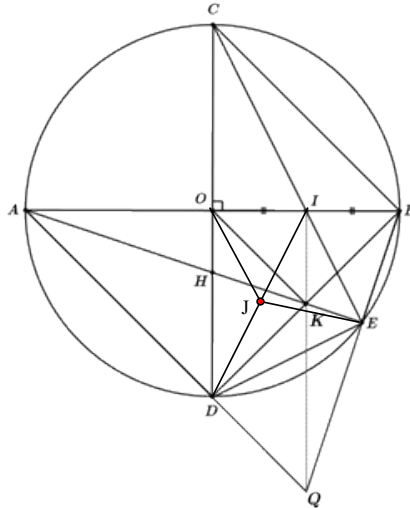
+ Chứng minh $\angle FBM = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = 90^\circ - \angle BAC = \angle ABE$

Mà $\angle ABE = \angle AFE$

nên $\angle AFE = \angle FOM$

Từ đó chứng minh $\angle FEM = 180^\circ$. Suy ra ba điểm E, F, M thẳng hàng

Bài 41.



Gọi J là trung điểm của ID

+) $AB \perp CD$ tại O , mà $I \in OB$

Suy ra $\angle IOD = 90^\circ \Rightarrow \triangle IOD$ vuông tại O , từ đó suy ra $JO = JI = JD$ (1)

+) Chứng minh: $\angle E = 90^\circ \Rightarrow \triangle IED$ vuông tại E ,

từ đó suy ra $JI = JE = JD$ (2)

+) Từ (1) và (2) suy ra O, I, E, D cùng thuộc một đường tròn

b) +) Chứng minh: $\Delta AHO \# \Delta ABE$ (g.g)

+) Suy ra: $AH \cdot AE = AO \cdot AB = R \cdot 2R = 2R^2$

+) Suy ra: $\frac{OA}{OH} = \frac{AE}{BE}$

+) Mà EI là tia phân giác của góc AEB nên suy ra:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AI}{IB} = \frac{\frac{3}{2}R}{\frac{1}{2}R} = 3$$

+) Suy ra: $\frac{OA}{OH} = 3$, do đó $OA = 3.OH$

c) +) Chứng minh được: $OD = 3.OH$ suy ra $HD = \frac{2}{3}OD$

+) Suy ra: H là trọng tâm $\triangle ABD$

+) Chứng minh K là trung điểm của BD

Suy ra: A, H, K, E thẳng hàng

+) Suy ra: K là trực tâm của $\triangle ABQ$

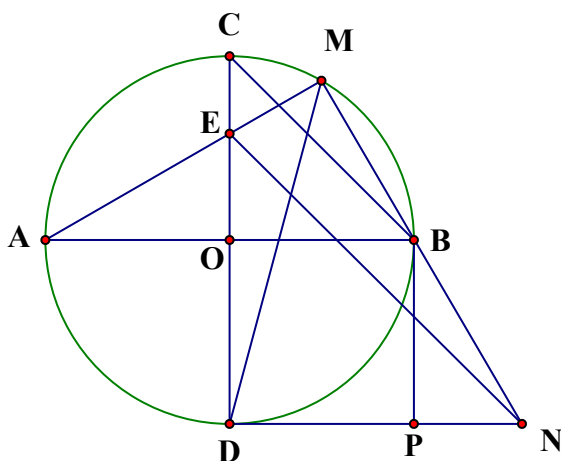
+) Suy ra: KQ vuông góc AB

+) Chứng minh được: KI vuông góc AB

+) Suy ra: Q, K, I thẳng hàng

Bài 42.

1) Chứng minh các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.



Xét tứ giác $MNDE$:

Có $DN \perp CD$ (vì DN là tiếp tuyến của (O))

$$\Rightarrow \angle EDN = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle EDN = 90^\circ$$

$\triangle EDN$ vuông tại D

Suy ra 3 điểm E, D, N thuộc đường tròn đường kính EN (1)

Ta có $\angle AMB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$$\Rightarrow \angle EMN = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle EMN$ vuông tại M

Suy ra 3 điểm E, M, N thuộc đường tròn đường kính EN (2)

Từ (1) và (2) Suy ra các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $EN \parallel CB$.

Xét (O) có $\angle EDM = \angle BMN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CM)

$$\Rightarrow \angle EDM = \angle BMN$$

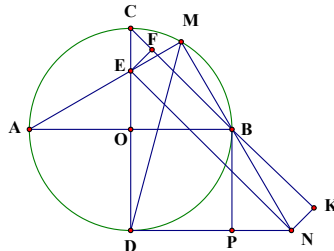
Vì tứ giác $MNDE$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{EDM} = \widehat{ENM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EM)

Suy ra $\widehat{EBM} = \widehat{ENM} (= \widehat{EDM})$ mà hai góc này ở vị trí so le trong

$\Rightarrow EN \parallel CB$

3) Chứng minh $AM \cdot BN = 2R^2$ và tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.



Xét $\triangle AMB$ và $\triangle BPN$:

Có $BP \perp DN \Rightarrow \widehat{BPN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{BPN} = 90^\circ$ (1)

Có $DN \perp CD$ (DN kẻ tiếp tuyến với (O))

$\Rightarrow BA \parallel DN$

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{BNB}$ (hai góc đồng vị) (2)

Từ (1) và (2) ta có $\triangle AMB \sim \triangle BPN$ (g - g)

Xét tứ giác $OBPD$ có :

$\widehat{BOB} = \widehat{BPD} = \widehat{ODP} = 90^\circ$

$OD = OB = R$

$\Rightarrow OBPD$ là hình vuông (DHNB) nên $OD = OB = BP = R$

Có $\triangle AMB \sim \triangle BPN$ (cmt) $\Rightarrow \frac{AM}{BP} = \frac{AB}{BN}$

$\Rightarrow AM \cdot BN = BP \cdot AB = R \cdot 2R = 2R^2$

* Kẻ $EF \perp BC, NK \perp BC$

$S_{NBC} = \frac{1}{2} NK \cdot BC$. Do BC không đổi nên $S_{NBC} \max$ khi và chỉ khi $NK \max$.

Do $EF \perp BC, NK \perp BC \Rightarrow EF \parallel NK$.

Có tứ giác $EFKN$ là hình bình hành (DHNB)

Có $EF \perp BC \Rightarrow \widehat{EFK} = 90^\circ$ nên tứ giác $EFKN$ là hình chữ nhật (DHNB)

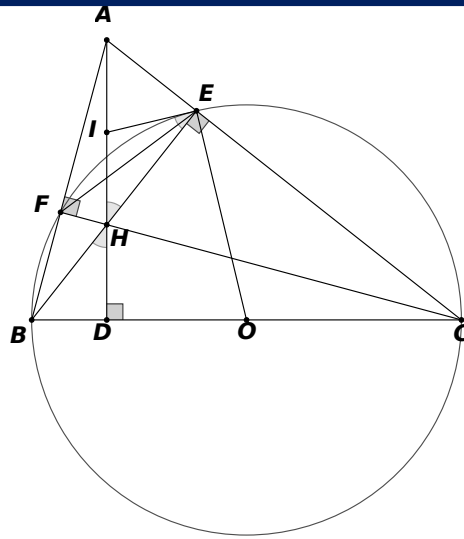
$\Rightarrow EF = NK$

Ta có $NK \max$ khi $EF \max$

khi $E \equiv O$ khi $M \equiv B$

Bài 43.

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$



Vì $CF \perp AB$ nên $\angle CFB = 90^\circ$ suy ra tam giác BFC vuông tại F

Vì $BE \perp AC$ nên $\angle BEC = 90^\circ$ suy ra tam giác BEC vuông tại E

Gọi O' là trung điểm đoạn BC .

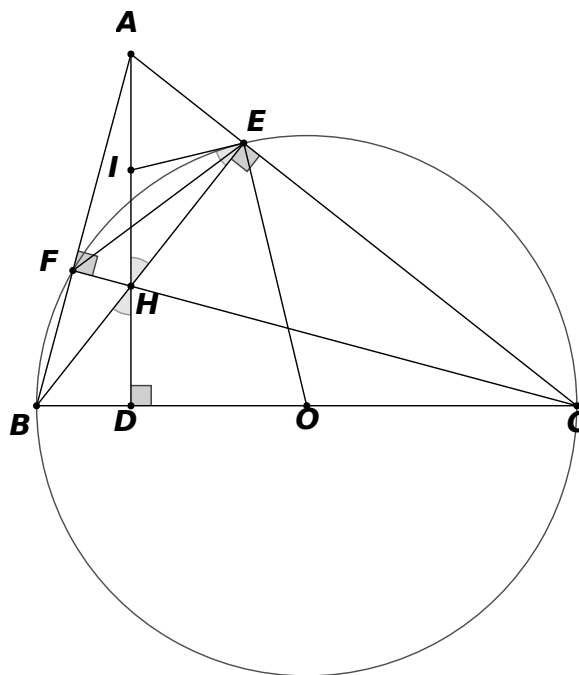
Xét tam giác BEC vuông tại E , O' là trung điểm đoạn BC . . Suy ra $O'E = O'B = O'C$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông.) (1)

Xét tam giác BFC vuông tại F , O' là trung điểm đoạn BC . . Suy ra $O'F = O'B = O'C$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông.) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $O'E = O'B = O'C = O'F$ mà O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$, suy ra O trùng O'

Suy ra O là trung điểm đoạn BC .

b) Gọi I là trung điểm của AH . Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



Xét $\triangle AEH$ vuông tại H , có EI là đường trung tuyến ứng với cạnh AH nên $EI = \frac{1}{2}AH = IH$

Suy ra: $\triangle IEH$ cân tại $I \Rightarrow \angle IEH = \angle IHE$

Mà $\angle HIE = \angle BHD$ (Hai góc đối đỉnh)

Suy ra: $\angle IEH = \angle BHD$ (1)

Ta lại có: $OB = OE = R \Rightarrow \triangle OEB$ cân tại O

$\Rightarrow \angle OBE = \angle OEB$ (2)

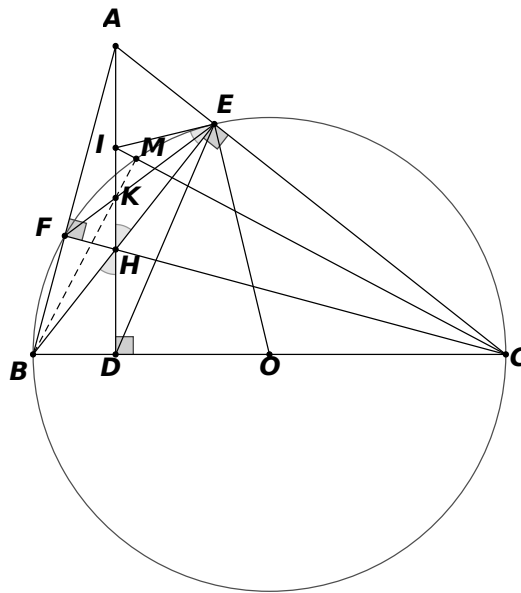
Từ (1) và (2), ta có: $\angle IEH + \angle OEB = \angle BHD + \angle OBE$

Mặt khác: $\angle BHD + \angle OBE = 90^\circ$ (vì $\triangle BHD$ vuông tại D)

Suy ra: $\angle IEH + \angle OEB = \angle BHD + \angle OBE = 90^\circ$ hay $\angle OEI = 90^\circ$

$\Rightarrow OE \perp EI$ và $E \in (O)$ Do đó: IE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

c) Vẽ CI cắt đường tròn (O) tại M (M khác C), EF cắt AD tại K . Chứng minh ba điểm B, K, M thẳng hàng.



Ta có: góc BMC là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên góc BMC = 90 độ

$\Rightarrow BM \perp IC$

Xét $\triangle IEK$ và $\triangle IDE$ có:

$\angle EIK$ là góc chung

$\angle IDE = \angle IEK (= \angle ECF)$

Do đó: $\triangle IEK \sim \triangle IDE$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{IE}{ID} = \frac{IK}{IE} \Rightarrow ID \cdot IK = IE^2$

Mặt khác: $IM \cdot IC = IE^2$ (Bạn đọc tự chứng minh)

$$\Rightarrow ID \cdot IK = IM \cdot IC$$

$$\Rightarrow \frac{IM}{ID} = \frac{IK}{IC}$$

Xét tam giác IMK và tam giác IDC có:

Góc MIK là góc chung

$$\frac{IM}{ID} = \frac{IK}{IC}$$

$$\Rightarrow \triangle IMK \sim \triangle IDC$$

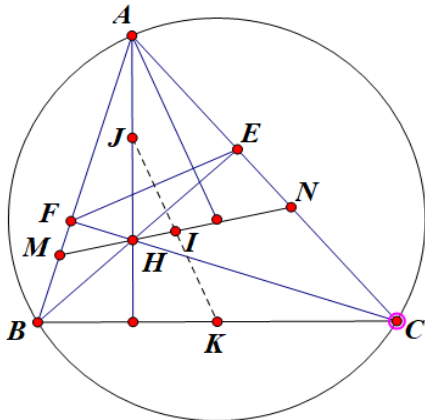
$$\Rightarrow \angle KMI = \angle CDI = 90^\circ$$

$$\Rightarrow KM \perp IC$$

$$\left. \begin{array}{l} BM \perp IC \\ KM \perp IC \end{array} \right\} \Rightarrow B, M, K \text{ thẳng hàng}$$

Bài 44.

a) Chứng minh $\triangle AEF$ đồng dạng $\triangle ABC$.



Vẽ đúng hình đến ý 1)

$$BE \perp AC \Rightarrow \angle BEC = 90^\circ \text{ (TGV)}$$

$$CF \perp AB \Rightarrow \angle CFB = 90^\circ \text{ (TGV)}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \triangle AEF$ đồng dạng $\triangle ABC$.

b) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng

$$\text{Tứ giác } BCEF \text{ nội tiếp} \Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$$

$$\angle EAO = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2}$$

$$\triangle OAC \text{ cân tại } O \Rightarrow \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC \Rightarrow \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = 90^\circ - \angle ABC$$

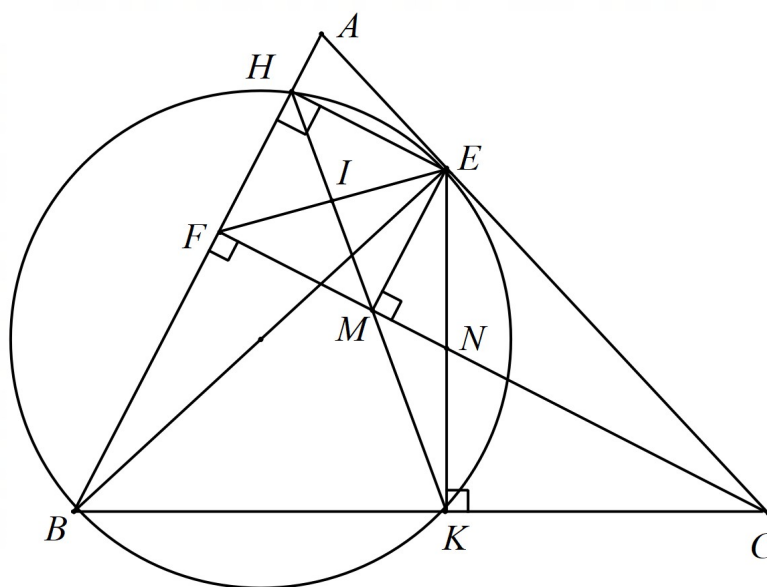
$$\Rightarrow \angle AEF + \angle EAO = 90^\circ \Rightarrow AO \perp EF$$

c) Chứng minh tứ giác $AFHI$ nội tiếp và I, J, K thẳng hàng.

Chứng minh $\triangle AMN$ cân tại A vì $\angle AMN = \angle MBH + \angle MHB = \angle NCH + \angle NHC = \angle ANM \Rightarrow AI \perp MN$
 $\angle AFH = \angle AIH = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $AFHI$ là tứ giác nội tiếp.

Có $\angle MAH = \angle NAO \Rightarrow \angle IAH = \angle IAO \Rightarrow IJ \parallel AO$ suy ra IJ trung trực EF
 Có $\angle JLE = \angle JLF, \angle KLE = \angle KLF \Rightarrow KI$ trung trực $EF \Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

Bài 45.



a) Ta có $\angle BHE = 90^\circ$ nên 3 điểm B, H, E nằm trên đường tròn đường kính BE

$\angle BKE = 90^\circ$ nên 3 điểm B, K, E nằm trên đường tròn đường kính BE

Nên 4 điểm B, H, K, E nằm trên đường tròn đường kính BE

Suy ra $BHEK$ là tứ giác nội tiếp

b) Vì $BHEK$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle BHK = \angle BEK$ (góc nội tiếp

cùng chắn $\overset{\frown}{BK}$) mà $\angle BEK = \angle BCE$ (cùng phụ $\angle KEC$)

$\Rightarrow \angle BHK = \angle BCE$

+) Xét $\triangle BHK$ và $\triangle BCA$ có $\angle B$ chung; $\angle BHK = \angle BCA$

$\triangle BHK$ đồng dạng $\triangle BCA(g.g) \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BK}{BA} \Rightarrow BH.BA = BK.BC;$

Chứng minh tương tự, ta có: $EA = EO = EN = \frac{1}{2}AO$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông ANO) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow OE = DE = ME = AE = NE = \frac{1}{2}AO$

Suy ra O, M, A, D, N thuộc đường tròn tâm E đường kính AO

Suy ra O, M, D, N thuộc đường tròn tâm E đường kính AO .

b) Chứng minh $\triangle AON = \triangle AOM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $\angle AON = \angle AOM$ (hai góc tương ứng)

Ta có: $\angle BDM + \angle MDA = 90^\circ$ (do $AD \perp BC$ tại D)

$\angle EDN + \angle ADN = 90^\circ$ (do $AD \perp BC$ tại D)

$\angle ADM = \angle AOM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AM}$ của $\left(E, \frac{AO}{2}\right)$)

$\angle ADN = \angle AON$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AN}$ của $\left(E, \frac{AO}{2}\right)$)

Suy ra $\angle BDM = \angle EDN$

c) Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại P, Q .

Chứng minh P, I, O, M cùng thuộc đường tròn đường kính PO

Suy ra $\angle POI = \angle PMI$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{PI}$).

Chứng minh tứ giác $INQO$ nội tiếp

Suy ra $\angle IOQ = \angle INA$ (cùng bù với $\angle INQ$)

Ta có $\angle PMI = \angle INA$ (cùng bằng $\angle AON, \angle AOM$)

Suy ra $\angle POI = \angle IOI$

Suy ra OI là phân giác của $\angle POQ$

Ta có: $OI \perp PQ$ (do $OI \perp BC$ và $PQ \parallel BC$)

Suy ra $\triangle POQ$ cân tại O

Suy ra OI là đường trung tuyến của $\triangle OPQ$

Suy ra $IP = IQ$

Vì $PQ \parallel BC$

Suy ra $\triangle API \sim \triangle ABK$ (g - g)

Suy ra $\frac{PI}{BK} = \frac{AI}{AK}$

Tương tự, $\triangle AIN \sim \triangle AKC$ (g - g)

Suy ra $\frac{IQ}{KC} = \frac{AI}{AK}$

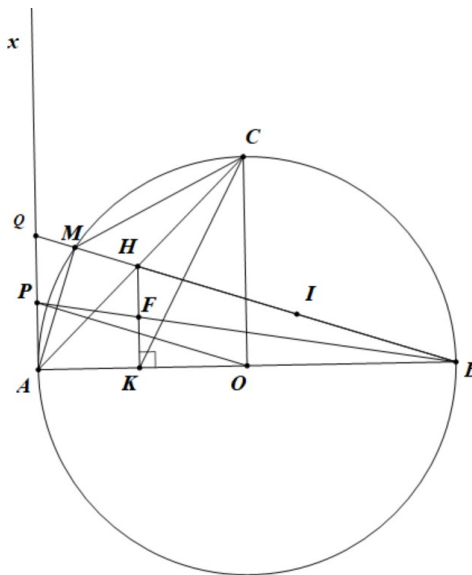
$\frac{PI}{BK} = \frac{IQ}{KC}$

ma $PI = IQ$ (cmt)

suy ra $KB = KC$

Vậy K là trung điểm BC .

Bài 47.



a) Gọi I là trung điểm của $HB \Rightarrow HI = IB = \frac{HB}{2}$

Xét nửa đường tròn (O) , đường kính AB có: $\angle ACB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra ΔCHB vuông, mà CI là đường trung tuyến

Từ đó có $IC = IH = IB = \frac{HB}{2}$ (1)

Xét nửa đường tròn (O) , đường kính AB có: $\angle HKB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $\triangle KHB$ vuông, mà KI là đường trung tuyến.

Từ đó $IK = IH = IB = \frac{HB}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $IC = IK = IH = IB$

Do đó bốn điểm C, B, H, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Có $\angle MCA = \angle MBA$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AM}$); $\angle ACK = \angle MBA$ (tứ giác $CHKB$ nội tiếp)

Suy ra $MCA = ACK$

Do đó CA là phân giác $\angle MCK$.

c) Theo giả thiết: $\frac{AP \cdot MB}{MA} = R \Rightarrow \frac{AP}{MA} = \frac{OA}{MB}$

Xét $\triangle PAO$ và $\triangle AMB$ có: $\frac{AP}{MA} = \frac{OA}{MB}$; $\angle PAO = \angle AMB = 90^\circ$

Do đó $\triangle PAO \sim \triangle AMB$ (c-g-c)

Suy ra $\angle POA = \angle MBA$ (hai góc tương ứng)

Suy ra $OP \parallel BQ$

Xét $\triangle ABQ$ có: $OP \parallel BQ$, O là trung điểm của AB nên P là trung điểm của AQ .

Gọi F là giao điểm của BP và HK .

Xét $\triangle ABP$ có $FK \parallel AP$ nên $\frac{FK}{AP} = \frac{BF}{BP}$

Xét $\triangle QBP$ có $FH \parallel QP$ nên $\frac{FH}{QP} = \frac{BF}{BP}$

Từ đó $HF = FK$ suy ra PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK .

Bài 48.

Từ điểm A nằm ngoài (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính CD của (O) .

a) Chứng minh $BD \parallel AO$.

b) AD cắt (O) tại E (A, E, D theo thứ tự). Chứng minh rằng $AB^2 = AE \cdot AD$.

c) Vẽ $BH \perp DC$ tại H . Gọi I là trung điểm của BH . Chứng minh ba điểm A, I, D thẳng hàng.

a) Ta có B thuộc (O) và có CD là đường kính của (O)

Suy ra $\triangle BCD$ nội tiếp $\left(O; \frac{CD}{2}\right)$

Suy ra $\triangle BCD$ vuông tại B

Suy ra $\angle CBD = 90^\circ$

Suy ra $BD \perp BC$

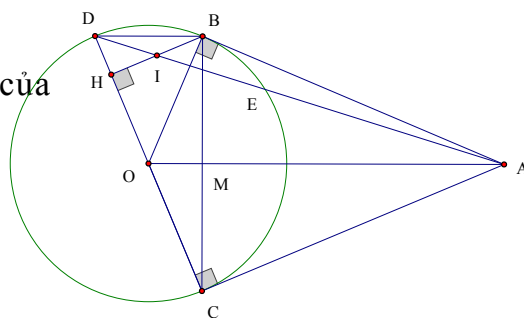
Vì AB, AC là hai tiếp tuyến của (O) nên $AB = AC$ (tính chất)

Suy ra $\triangle ABC$ cân tại A

Lại có AO là tia phân giác của $\angle BAC$

Suy ra AO là đường cao của $\triangle ABC$

Suy ra $AO \perp BC$



Ta có $BD \perp BC$, $AO \perp BC$. Suy ra $BD \parallel AO$

b) Ta có E thuộc (O) và có CD là đường kính của (O)

Suy ra $\triangle CDE$ nội tiếp $\left(O; \frac{CD}{2}\right)$

Suy ra $\triangle CDE$ vuông tại E

Suy ra $\angle CED = 90^\circ$

Suy ra $CE \perp AD$

Xét hai tam giác $\triangle AEC$ và $\triangle ACD$ có:

$\angle AEC = \angle ACD = 90^\circ$

$\angle A$ chung

Vậy $\triangle AEC \sim \triangle ACD$

Suy ra $\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AD}$, suy ra $AC^2 = AE \cdot AD$

Mà $AB = AC$

Suy ra $AB^2 = AE \cdot AD$

c) Xét hai tam giác $\triangle HDB$ và $\triangle COA$ có:

$\angle HDB = \angle COA = 90^\circ$

$\angle HDB = \angle COA$ (đồng vị và $BD \parallel AO$)

Vậy $\triangle HDB \sim \triangle COA$

Suy ra $\frac{HD}{OC} = \frac{BH}{AC}$ suy ra $\frac{HD}{2OC} = \frac{BH}{2AC}$

Mà $CD = 2OC$, $BH = 2HI$ (vì O, I lần lượt là trung điểm của CD, BH)

Suy ra $\frac{HD}{CD} = \frac{HI}{AC}$

Xét hai tam giác $\triangle HDI$ và $\triangle CDA$ có:

$\angle DHI = \angle DCA = 90^\circ$

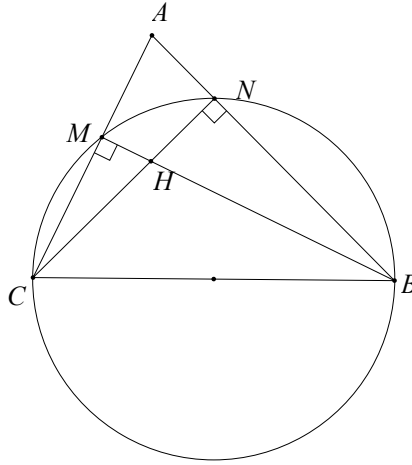
$\frac{HD}{CD} = \frac{HI}{AC}$

Vậy $\triangle HDI \sim \triangle CDA$ (c.g.c)

Suy ra $\angle HDI = \angle CDA$

Suy ra hai tia DI, DA trùng nhau

Vậy ba điểm A, I, D thẳng hàng



a/ Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp

Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H nên ta có $\triangle ANH, \triangle AMH$ vuông tại N, M

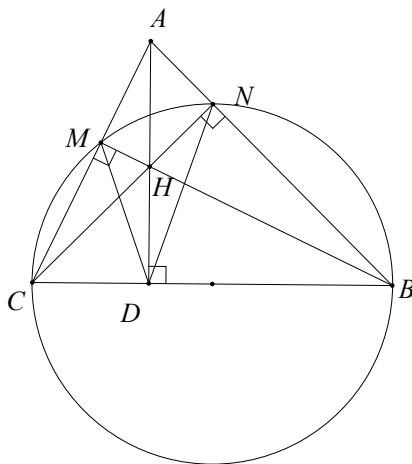
Xét $\triangle ANH$ có $\angle ANH = 90^\circ$ nên ba điểm A, N, H nằm trên đường tròn đường kính AH

Xét $\triangle AMH$ có $\angle AMH = 90^\circ$ nên ba điểm A, M, H nằm trên đường tròn đường kính AH

Khi đó bốn điểm A, M, H, N nằm trên đường tròn đường kính AH

Vậy tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .

b/ Gọi D là giao điểm của AH và BC . Chứng minh DA phân giác của $\angle MDN$



Có $\angle HMC = \angle HDC = 90^\circ$

Xét $\triangle HMC$ có $\angle HMC = 90^\circ$ nên ba điểm C, M, H nằm trên đường tròn đường kính CH

Xét $\triangle CDH$ có $\angle HDC = 90^\circ$ nên ba điểm C, D, H nằm trên đường tròn đường kính CH

Khi đó bốn điểm D, C, M, H nằm trên đường tròn đường kính CH

Suy ra tứ giác $HDCM$ nội tiếp

Suy ra $\angle HDM = \angle HCM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HM)

Có $\angle HDB = \angle HNB = 90^\circ$

Xét $\triangle HDB$ có $\angle HDB = 90^\circ$ nên ba điểm B, D, H nằm trên đường tròn đường kính BH

Xét $\triangle HNB$ có $\angle HNB = 90^\circ$ nên ba điểm B, N, H nằm trên đường tròn đường kính BH

Khi đó bốn điểm D, B, N, H nằm trên đường tròn đường kính BH

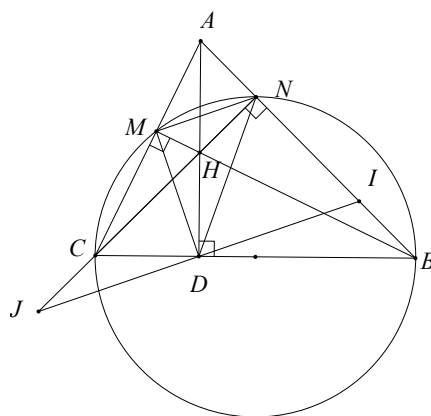
Suy ra tứ giác $HDBN$ nội tiếp

$\angle NDH = \angle NBH$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung HN)

Mà $\angle HCM = \angle NBH$ (cùng phụ với $\angle BAC$)

Suy ra $\angle HDM = \angle HDN$ Suy ra AD là phân giác của góc $\angle MDN$ (đpcm).

c/Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I, J . Chứng minh D là trung điểm IJ .



Có $\angle BMC = \angle BNC = 90^\circ$

Xét $\triangle MCB$ có $\angle BMC = 90^\circ$ nên ba điểm B, M, C nằm trên đường tròn đường kính BC

Xét $\triangle BNC$ có $\angle BNC = 90^\circ$ nên ba điểm B, N, C nằm trên đường tròn đường kính BC

Khi đó bốn điểm C, B, N, M nằm trên đường tròn đường kính BC

Suy ra tứ giác $BCMN$ nội tiếp

Suy ra $\angle HNM = \angle HBD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung CM)

Tứ giác $HDBN$ nội tiếp nên $\angle HBD = \angle HND$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung HD)

Suy ra $\angle HNM = \angle HND$

Ta có $IJ \parallel MN$ (gt) Suy ra $\angle HNM = \angle HJI = \angle HJD$ (Hai góc so le trong bằng nhau)

Suy ra $\angle HND = \angle HJD$

Nên tam giác DNJ cân tại D (tam giác có 2 góc ở đáy bằng nhau)

Suy ra $DN = DJ$ (tính chất tam giác cân) (1)

Vì $HND = HJD$ (chứng minh trên)

Mà $\angle HND + \angle DNI = \angle HNI = 90^\circ$ và $\angle HJD + \angle NID = 90^\circ$ (do $\triangle JNI$ vuông tại N)

Suy ra $\boxed{DNI} = \boxed{NID}$

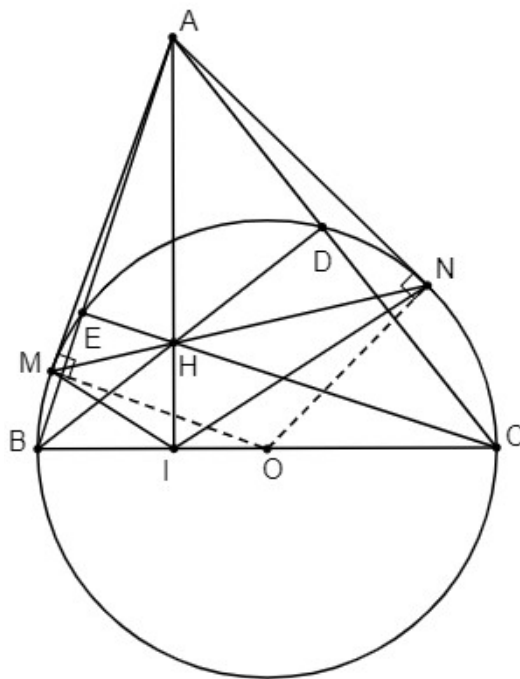
Tam giác $\triangle NID$ cân tại D (tam giác có 2 góc ở đáy bằng nhau)

Suy ra $DN = DI$ (tính chất tam giác cân) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DI = DJ = DN$

Vậy D là trung điểm IJ

Bài 50.



a) Vì $\angle BEC$ và $\angle BDC$ là hai góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) nên: $\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$, suy ra $\angle AEH = \angle ADH = 90^\circ$

Suy ra hai điểm E và D cùng thuộc đường tròn đường kính AH

Do đó bốn điểm A, E, H, D cùng thuộc đường tròn đường kính AH

Vậy tứ giác $AEHD$ nội tiếp đường tròn đường kính AH

b) Chứng minh H là trực tâm của $\triangle ABC$ suy ra $AI \perp BC$

Chứng minh được $\triangle ABI \sim \triangle CBE$ (g.g)

Suy ra: $\frac{AB}{CB} = \frac{BI}{BE}$ hay $AB.BE = AI.BC$ (1)

Tương tự: $AC.CD = AI.BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AB.BE + AC.CD = BI.BC + CI.BC = (BI + CI).BC = BC^2$

Vậy $AB.BE + AC.CD = BC^2$

c) Chứng minh 5 điểm A, M, I, O, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO , suy ra tứ giác $AMIN$ nội tiếp, suy ra $\angle AMI + \angle ANI = 180^\circ$ (*)

Chứng minh $\triangle AEH \sim \triangle AIB$ (g.g), suy ra $\frac{AE}{AI} = \frac{AH}{AB}$ hay $AE \cdot AB = AI \cdot AH$ (3)

Chứng minh $\triangle AME \sim \triangle ABM$ (g.g), suy ra $\frac{AE}{AM} = \frac{AM}{AB}$ hay $AB \cdot AE = AM^2$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra hay $\frac{AM}{AI} = \frac{AH}{AM}$

Chứng minh $\triangle AMI \sim \triangle AHM$ (c.g.c), suy ra $\angle AMI = \angle AHM$ (**)

Tương tự: $\angle ANI = \angle AHN$ (***)

Từ (*), (**) và (***) suy ra $\angle AHM + \angle AHN = 180^\circ$

Vậy ba điểm M, H, N thẳng hàng. Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>
