SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO GIA LAI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG

HUỲNH THANH LUÂN

BÀI GIẢNG CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Pleiku, tháng 05 năm 2010

MỤC LỤC

Chương 1

LÀM QUEN VỚI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

1.1 Khái niệm mở đầu

Định nghĩa 1.1.1. Cho hai tập số khác rỗng $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$. Một hàm số xác định trên $\mathbb{X}$ và nhận giá trị trong $\mathbb{Y}$ là một qui tắc cho tương ứng mỗi phần tử trong $\mathbb{X}$ một phần tử duy nhất trong $\mathbb{Y}$.

Bài toán 1.1.1. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $f\left(x^2+1\right) = 2x, \forall x.$
Tính $f(5) \, ; f(10) \, ; f(17)$

Bài toán 1.1.2. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3(4xy-1), \forall x; y \end{cases}.$
Tính $f(19)$

Bài toán 1.1.3. Cho hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa $\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(f(n)) = 4n+9 \\ f(2^n) = 2^{n+1}+3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$
Tính $f(1789)$

HD: $1789 = 4.445 + 9; 445 = 4.109 + 9; 109 = 4.25 + 9; 25 = 5^2$

Tùy theo từng lĩnh vực của toán học có liên quan đến phương trình hàm, người ta đưa ra định nghĩa về phương trình hàm. Do đó, khó có thể đưa ra một định nghĩa chung về phương trình hàm. Một cách tương đối ta có thể định nghĩa phương trình hàm như sau.

Phương trình hàm là phương trình mà cả hai vế của nó được thành lập từ một số hữu hạn các hàm chưa biết và từ một số hữu hạn các hàm số đã biết của các biến độc lập.

Miền xác định của phương trình hàm là miền của các biến mà phương trình hàm đó có nghĩa.

Định nghĩa 1.1.2. a) Một nghiệm riêng của phương trình hàm là một hàm số thoả mãn phương trình hàm trong miền xác định của nó.
b) Nghiệm tổng quát của phương trình hàm là tập tất cả các nghiệm riêng của nó.
c) Giải một phương trình hàm là tìm nghiệm tổng quát của phương trình hàm đó.

Trước hết ta cần thống nhất một hàm số như thế nào thì được cho là đã xác định?

Một hàm số được xem là đã xác định nếu chỉ rõ tập xác định của nó và
a) Hoặc đã biết qui tắc tìm ảnh của mọi phần tử trong miền xác định của nó.
b) Hoặc nó là hàm số tuần hoàn với chu kỳ xác định nào đó.

1.2 Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Xét hàm số $f(x)$ với tập xác định $D(f) \subset \mathbb{R}$ và tập giá trị $R(f) \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2.1. Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên M, $M \subset D(f)$ nếu

$$\forall x \in M \Longrightarrow -x \in M \text{ và } f(-x) = f(x), \ \forall x \in M.$$

Định nghĩa 1.2.2. Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên M, $M \subset D(f)$ nếu

$$\forall x \in M \Longrightarrow -x \in D(f) \text{ và } f(-x) = -f(x), \ \forall x \in M.$$

Ví dụ 1.2.1. Cho $x_0 \in \mathbb{R}$. Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ sao cho

$$f(x_0 - x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Đặt $x = \frac{x_0}{2} - t \Longleftrightarrow t = \frac{x_0}{2} - x$.

Khi đó $x_0 - x = \frac{x_0}{2} + t$ và phương trình trở thành

$$f(\frac{x_0}{2} + t) = f(\frac{x_0}{2} - t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

hay

$$g(-t) = g(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

với $g(t) = f(\frac{x_0}{2} + t)$.

Kết luận: $f(x) = g(x - \frac{x_0}{2})$, trong đó $g(x)$ là hàm chẵn tuỳ ý trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1.2.2. Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ sao cho

$$f(a - x) + f(x) = b, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Đặt $\frac{a}{2} - x = t$. Khi đó $x = \frac{a}{2} - t$ và $a - x = \frac{a}{2} + t$.

nên ta được

$$f(\frac{a}{2}+t)+f(\frac{a}{2}-t)=b.$$

hay

$$g(-t)=-g(t),\ \forall t\in\mathbb{R},$$

với $f(\frac{a}{2}+t)-\frac{b}{2}=g(t)$.

Kết luận: $f(x)=g(x-\frac{a}{2})+\frac{b}{2}$,

trong đó $g(x)$ là hàm lẻ tuỳ ý trên $\mathbb{R}$.

1.3 Hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn

1.3.1 Hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính

Định nghĩa 1.3.1. Hàm số $f(x)$ (xác định trên D) được gọi là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ $a\,(a>0)$ trên M nếu $M\subset D$ và

$$\begin{cases}\forall x\in M\Rightarrow x+a\in M,\ x-a\in M\\ f(x+a)=f(x),\forall x\in M.\end{cases}$$

Nếu tồn tại số dương T nhỏ nhất trong các số a ở trên thì T được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm số $f(x)$.

Định nghĩa 1.3.2. Hàm số $f(x)$ (xác định trên D) được gọi là phản tuần hoàn cộng tính chu kỳ $b\,(b>0)$ trên M nếu $M\subset D$ và

$$\begin{cases}\forall x\in M\Rightarrow x+b\in M, x-b\in M\\ f(x+b)=-f(x),\forall x\in M.\end{cases}$$

Nếu tồn tại số dương T nhỏ nhất trong các số b ở trên thì T được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 1.3.1. Cho cặp hàm $f(x)$ và $g(x)$ tuần hoàn trên M có các chu kỳ lần lượt là a và b với $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$. Chứng minh rằng $F(x)=f(x)+g(x)$ và $G(x)=f(x).g(x)$ cũng là những hàm tuần hoàn trên M.

Giải. Theo giả thiết $\exists m,n\in\mathbb{N}^+,\ (m,n)=1$ sao cho $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$.

Đặt $T=na=mb$. Khi đó

$$\begin{cases} F(x+T) = f(x+na) + g(x+mb) = f(x) + g(x) = F(x),\ \forall x \in M. \\ G(x+T) = f(x+na).g(x+mb) = f(x).g(x) = G(x),\ \forall x \in M. \end{cases}$$

Hơn nữa, ta có $\forall x \in M.$ thì $x+T \in M,\ x-T \in M.$ Vậy $F(x)$ và $G(x)$ là những hàm tuần hoàn trên $M.$

1.3.2 Hàm số tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính

Định nghĩa 1.3.3. Hàm số $f(x)$ (xác định trên D) được gọi là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a $(a \notin \{-1,0,1\})$ trên M nếu $M \subset D$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow ax \in M,\ a^{-1}x \in M \\ f(ax) = f(x),\ \forall x \in M. \end{cases}$$

Định nghĩa 1.3.4. Hàm số $f(x)$ (xác định trên D) được gọi là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ a $(a \notin \{-1,0,1\})$ trên M nếu $M \subset D$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow ax \in M,\ a^{-1}x \in M \\ f(ax) = -f(x),\ \forall x \in M. \end{cases}$$

1.4 Hàm số đơn điệu

Định nghĩa 1.4.1. Hàm số $f(x)$ được gọi là tăng trên D nếu như với $x_1, x_2 \in D$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2).$

Hàm số $f(x)$ được gọi là giảm trên D nếu như với $x_1, x_2 \in D$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2).$

Hàm số tăng hoặc giảm trên một tập nào đó được gọi là hàm số đơn điệu trên khoảng đó.

Tính chất 1.4.1. 1) Mọi hàm đơn điệu trên một khoảng đều là đơn ánh trên khoảng đó.

2) Nếu hàm $f : D \to \mathbb{R};\ g : D \to \mathbb{R}$ là hai hàm tăng thì $f+g$ là hàm tăng.

3) Nếu hàm $f : D \to \mathbb{R};\ g : D \to \mathbb{R}$ là hai hàm tăng và không âm thì $f(x).g(x)$ là hàm tăng.

4) Nếu hàm f đơn điệu trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = m$ có nhiều nhất là một nghiệm trên khoảng đó.

5) Nếu hàm $f : D_f \to \mathbb{R}$ và $g : D_g \to \mathbb{R}$ tăng và $D_f \subset D_g$ thì hàm số hợp $g_0 f$ tăng.

Chú ý: *) Nếu hàm f tăng thì hàm số hợp $f(f(x))$ (nếu được xác định) cũng tăng.

*) Nếu hàm f giảm thì hàm số hợp $f(f(x))$ (nếu được xác định) cũng giảm.

1.5 Hàm số liên tục

Định nghĩa 1.5.1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b). Ta nói hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 \in (a, b)$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trên tập hợp cho trước X nếu hàm này liên tục tại mỗi điểm của tập hợp X.

Chương 2

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH HÀM CƠ BẢN

2.1 Phương trình hàm với một biến số độc lập

2.1.1 Phương trình hàm dạng $f(p(x)) = q(x)$

Phương pháp: Đặt $t = p(x)$, biểu diễn $q(x)$ theo t.

Bài toán 2.1.1.

1; $f\left(x + \frac{3}{x}\right) = x^2 + \frac{9}{x^2} + 2, \forall x \neq 0.$

2; $f\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = x - \sqrt{x^2+1}, \forall x$

3; $f(\cos x) = \sin^2 x + 2, \forall x$

2.1.2 Phương trình hàm dạng $f(ax+b) = cf(x) + d$

Bài toán 2.1.2. $f(x+b) = f(x), \forall x$

Đây là hàm số tuần hoàn được xem như đã xác định.

Bài toán 2.1.3. $f(x+b) = f(x) + d, \forall x$

Hướng của ta là mất hệ số tự do. Vì hệ số của $f(x+b)$ và $f(x)$ là giống nhau nên d không thể phân tích thành bậc 0 được, ta phân tích theo bậc 1.
Mong muốn:

$$f(x+b) + \alpha(x+b) = f(x) + \alpha x \Rightarrow \alpha = -\frac{d}{b}$$

Bài toán 2.1.4. $f(x+b) = cf(x), \forall x$

Để giải quyết hệ số c của $f(x)$, tức làm cho hai hệ số của $f(x+b)$ và $f(x)$ bằng nhau ta nhờ đến hàm lũy thừa.
Mong muốn:

$$\alpha^{x+b} f(x+b) = \alpha^x f(x) \Rightarrow \alpha = c^{-\frac{1}{b}}.$$

Lưu ý phải đảm bảo sự có nghĩa của lũy thừa.

Bài toán 2.1.5. $f(x+b) = cf(x) + d, \forall x$

Ta sẽ làm mất hệ số tự do. Vì hệ số của $f(x+b)$ và $f(x)$ khác nhau nên d có thể phân tích thành bậc 0.
Mong muốn: $f(x+b)+\alpha = c\left[f(x)+\alpha\right] \Rightarrow \alpha = \frac{d}{c-1}$

Bài toán 2.1.6. $f(ax) = f(x), \forall x$

$THa > 0:$
Xét $x > 0$, đặt $x = a^t$ và $f(a^t) = h_1(t)$ ta được $h_1(t+1) = h_1(t)$
Xét $x < 0$, đặt $-x = a^t$ và $f(-a^t) = h_2(t)$ ta được $h_2(t+1) = h_2(t)$
Tại $x = 0, f(0) =$ tùy ý

KL: $f(x) = \begin{cases} h_1(\log_a x), khix > 0 \\ k, \text{khi}x = 0 \\ h_2(\log_a |x|), khix < 0 \end{cases}$

trong đó, $h_1(x); h_2(x)$ là các hàm số bất kỳ tuần hoàn chu kỳ 1 còn k là số thực tùy ý.
$THa < 0:$
Ta có:

$$f(ax) = f(x), \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(ax) = f(x), \forall x \\ f\left(a^2x\right) = f(x), \forall x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\left[f\left(a^2x\right) + f(ax)\right], \forall x \\ f\left(a^2x\right) = f(x), \forall x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\left[f(x) + f(ax)\right], \forall x \\ f\left(a^2x\right) = f(x), \forall x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[g(x) + g(ax)\right], \forall x$$

trong đó $g(x)$ là hàm tùy ý thỏa $g\left(a^2x\right) = g(x), \forall x$
Hàm $g(x)$ được xác định theo trường hợp đầu.

Bài toán 2.1.7. $f(ax) = f(x) + d, \forall x$

Vì hai hệ số bằng nhau và phương trình $ax = x$ có nghiệm nên ĐKC $d = 0$.

Bài toán 2.1.8. $f(ax) = cf(x), \forall x$

Để giải quyết hệ số c ta phải dùng hàm lũy thừa chứ không dùng hàm mũ được vì lúc này hai hệ số của đối số x là khác nhau.
Mong muốn:

$$(ax)^\alpha f(ax) = x^\alpha f(x) \Rightarrow \alpha = \log_a\left(\frac{1}{c}\right)$$

Lưu ý sự có nghĩa của biểu thức logarit. Vấn đề dương thì ta chỉ cần dùng giá trị tuyệt đối là xong, còn các trường hợp $|a| = 1$ hoặc $|c| = 1$ ta sẽ làm như sau.

Bài toán 2.1.9. $f(-x) = bf(x), \forall x$ trong đó $0 \neq b \neq 1$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(-(-x)) = b^2 f(x), \forall x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x$$

Bài toán 2.1.10. $f\left(ax\right)=-f\left(x\right),\forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(ax\right)=-f\left(x\right),\forall x \\ f\left(a^2x\right)=f\left(x\right),\forall x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left[f\left(a^2x\right)-f\left(ax\right)\right],\forall x \\ f\left(a^2x\right)=f\left(x\right),\forall x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left[f\left(x\right)-f\left(ax\right)\right],\forall x \\ f\left(a^2x\right)=f\left(x\right),\forall x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left[g\left(x\right)-g\left(ax\right)\right],\forall x$$
trong đó $g\left(x\right)$ là hàm tùy ý thỏa $g\left(a^2x\right)=g\left(x\right),\forall x$. Hàm này ta đã biết cách xác định rồi.

Bài toán 2.1.11. $f\left(ax\right)=cf\left(x\right)+d,\forall x$

$$\Leftrightarrow f\left(ax\right)+\tfrac{d}{c-1}=c\left[f\left(x\right)+\tfrac{d}{c-1}\right],\forall x$$

Bài toán 2.1.12. $f\left(ax+b\right)=cf\left(x\right)+d$

Ta có: $ax+b=x\Leftrightarrow x=\frac{b}{1-a}$. Do đó khi $x-\frac{b}{1-a}=0$ thì hai biểu thức $ax+b$ và x có cùng giá trị. Hay hiểu một cách khác, nếu ta đặt $t=x-\frac{b}{1-a}$ thì khi $t=0$ hai biểu thức $ax+b$ và x (tính theo t) có cùng giá trị, tức chúng có cùng hệ số tự do.
Phương trình trở thành:

$$f\left(at+\frac{b}{1-a}\right)=cf\left(t+\frac{b}{1-a}\right)+d,\forall t$$

Đặt $g\left(t\right)=f\left(t+\frac{b}{1-a}\right)$ ta được:

$$g\left(at\right)=cg\left(t\right)+d,\forall t$$

MỘT SỐ DẠNG MỞ RỘNG CHO PHẦN NÀY

Bài toán 2.1.13. $f\left(x+a\right)-f\left(x\right)=h\left(x\right),\forall x$
với $h\left(x\right)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ a cho trước.

Ta chuẩn hóa bằng cách làm cho VP bằng không.
Vì $h\left(x+a\right)=h\left(x\right)\Rightarrow h\left(x\right)=\frac{1}{2}\left[h\left(x+a\right)+h\left(x\right)\right]$ là không trùng dấu với VT nên ta sẽ nâng bậc. Ta có:

$$\begin{aligned} h\left(x\right)=\frac{1}{a}.a.h\left(x\right)&=\frac{1}{a}\left[\left(x+a\right)-x\right]h\left(x\right)\\ &=\frac{1}{a}\left(x+a\right)h\left(x\right)-\frac{1}{a}xh\left(x\right)\\ &=\frac{1}{a}\left(x+a\right)h\left(x+a\right)-\frac{1}{a}xh\left(x\right) \end{aligned}$$

Do đó:

$$f(x+a) - f(x) = h(x) \Leftrightarrow f(x+a) - f(x) = \frac{1}{a}(x+a)h(x+a) - \frac{1}{a}xh(x)$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x+a) - \frac{1}{a}(x+a)h(x+a)\right] - \left[f(x) - \frac{1}{a}xh(x)\right] = 0$$

Bài toán 2.1.14. $f(x+a) - f(x) = h(x), \forall x$
với $h(x)$ là hàm phản tuần hoàn chu kỳ a cho trước.

Ta chuẩn hóa bằng cách làm cho VP bằng không.
Ta có

$$h(x+a) = -h(x) \Rightarrow h(x) = \frac{1}{2}\left[-h(x+a) + h(x)\right].$$

Bài toán 2.1.15. $f(x+a) + bf(x) = h(x), \forall x$
với $h(x)$ là hàm tuần hoàn hay phản tuần hoàn chu kỳ a cho trước.

Bài toán 2.1.16. $f(x+a) - f(x) = P(x), \forall x$
trong đó $P(x)$ là một đa thức.

Phương pháp làm tương tự, ta biểu diễn $P(x) = F(x+a) - F(x)$ bằng cách giả sử dạng của đa thức $F(x)$ có bậc cao hơn bậc của $P(x)$ một bậc, sau đó dùng phương pháp đồng nhất thức để tìm ra các hệ số của $F(x)$.

Ta có thể làm cho chu kỳ a bằng 1 như sau:

$$f(at+a) - f(at) = P(at), \forall t \Leftrightarrow g(t+1) - g(t) = Q(t), \forall t$$

trong đó $g(t) = f(at), \forall t$

Một số ví dụ cụ thể:

$i) f(x+1) - f(x) = x, \forall x$

$HD: x = \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1)\right] - \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right]$

$ii) f(x+1) - f(x) = x^2, \forall x$

$HD: x^2 = \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{6}(x+1)\right] - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x\right]$

$iii) f(x+1) + 2f(x) = x, \forall x$

$HD: x = \left[\frac{1}{3}(x+1) - \frac{1}{9}\right] + 2\left[\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right]$

$iv) f(x+1) + 2f(x) = x^2 + 2x - 6, \forall x$

Bài toán 2.1.17. $f(x+1) - f(x) = 2^{-x}, \forall x$

$$f(x+1) - f(x) = 2^{-x}, \forall x$$
$$\Leftrightarrow f(x+1) - f(x) = 2.2^{-x} - 2^{-x} = 2^{1-x} - 2^{-x} = 2^{1-x} - 2^{1-(x+1)}, \forall x$$
$$\Leftrightarrow \left[f(x+1) + 2^{1-(x+1)}\right] - \left[f(x) + 2^{1-x}\right] = 0, \forall x$$

Chú ý

i) $\begin{cases} *(a-1)\,a^x = a^{x+1} - a^x \\ *(a-1)\,a^{-x} = a^{1-x} - a^{-x} = a^{1-x} - a^{1-(x+1)} \end{cases}$

ii) Thật ra ta cũng không cần khó khăn đến thế đâu. Nếu có $f(x+a) - f(x) = h(x)$ thì ta cứ thử tính $h(x+a) - h(x)$ xem sao. Nếu $h(x+a) - h(x) = \alpha h(x)$ là khả quan đó.

Các bài tập trên đã giải quyết đến trường hợp VP là các hàm tuần hoàn, phản tuần hoàn (lượng giác); đa thức và hàm mũ rồi.

Làm thử: $f(x+1) - f(x) = 3^x \sin 2\pi x$

Bài toán 2.1.18. $f(x+a) = \alpha f(x) + \beta f(x-a) + b, \forall x$

Đây là sai phân bậc hai rồi nên ta phải chuyển về hai sai phân bậc nhất.

Bước 1: Làm mất hệ số tự do, thu được $g(x+a) = \alpha g(x) + \beta g(x-a), \forall x$
Bước 2: Chọn p và q sao cho

$$g(x+a) = \alpha g(x) + \beta g(x-a), \forall x \Leftrightarrow [g(x+a) + pg(x)] = q[g(x) + pg(x-a)], \forall x$$

Thật ra loại này là phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng số.

2.1.3 Phương trình hàm dạng $f(\omega(x)) = pf(x) + q, \forall x \in D$

trong đó $\omega(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Ta xét làm 3 loại dựa vào việc phương trình $\omega(x) = x$ có nghiệm kép, hai nghiệm phân biệt, hay vô nghiệm.

Bài toán 2.1.19. $\omega(x) = \frac{-1}{x-2}.f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(\omega(x)) = 2f(x) - 3, \forall x \neq 2$

Vì $\omega(x) = x \Leftrightarrow x = 1$ nên ta đặt

$$t = \frac{1}{x-1} \to f\left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = 2f\left(1 + \frac{1}{t}\right), \forall t \neq 0; 1$$

Đặt như thế ta nhận thấy khi $t \to \infty\,(x \to 1)$ thì $\omega(x)$ và x sẽ có cùng giới hạn tức khi chia ra thì sẽ có cùng thương (trong trường hợp này là 1) chỉ khác nhau phần dư mà thôi.

Bài toán 2.1.20. $\omega(x) = \frac{2}{3-x}$

Vì $\omega(x) = x \Leftrightarrow x = 1, x = 2$ nên ta đặt

$$t = \frac{x-1}{x-2} \to f\left(2 + \frac{1}{\frac{t}{2}-1}\right) = 2f\left(2 + \frac{1}{t-1}\right), \forall t \neq 0; 1; 2$$

Đặt như thế ta nhận thấy khi $t \to \infty\,(x \to 2)$ thì $\omega(x)$ và x sẽ có cùng giới hạn tức khi chia ra thì sẽ có cùng thương (trong trường hợp này là 2) chỉ khác nhau phần dư mà thôi. Còn khi $t = 0\,(x = 1)$ thì $\omega(x)$ và x cũng phải bằng nhau do đó ngoài hệ số của t (ở đây là 1 và $1/2$) thì phần còn lại cũng phải bằng nhau (ở đây là phần 1 trên tử và -1 ở mẫu)

Bài toán 2.1.21. $\omega(x) = \frac{2x-5}{x-2}$

Ta nhận thấy $\omega(x) = x$ vô nghiệm.

Đối với loại này ta chỉ đề cập đến TH đặc biệt là dãy

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_{n+1} = \omega(x_n), \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

tuần hoàn.

Khi đó cách giải là thế vòng quanh để lập hệ.

Phương pháp này có thể mở rộng cho pth dạng:

$$a(x) f(\omega(x)) + b(x) f(x) + c(x) = 0$$

với điều kiện tiên quyết là dãy $\begin{cases} x_1 = x \\ x_{n+1} = \omega(x_n), \forall n \geq 1 \end{cases}$ tuần hoàn.

Bài toán 2.1.22. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, thỏa $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4, \forall x$

$$\to \begin{cases} x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4 \\ (1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 \end{cases}$$
$$\to \left(x^2 - x - 1\right) f(x) = \left(1 - x^2\right)\left(x^2 - x - 1\right)$$

Gs a, b là hai nghiệm của pt $x^2 - x - 1 = 0$. Khi đó ta có: $f(x) = \left(1 - x^2\right), \forall x \neq a, b.$

Để xác định giá trị của hàm tại a, b ta thay nó vào lập hệ để giải. Lưu ý dùng định lý Viete.

$$\begin{cases} x = a \to a^2 f(a) + f(b) = 2a - a^4 \\ x = b \to b^2 f(b) + f(a) = 2b - b^4 \end{cases}$$

Hệ có $D = D_x = D_y$ nên nghiệm của hệ chính là nghiệm của phương trình

$$a^2 f(a) + f(b) = 2a - a^4 \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ f(b) = 2a - a^4 - a^2\alpha \end{cases}$$

Bài toán 2.1.23.

$i)2f(x) + 5xf(-x) = 4x + 3, \forall x$
$ii)xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1, \forall x \neq -1$
$iii)f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x, \forall x \neq \pm 1$
$iv)f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x, \forall x \neq 0; 1$

Vấn đề nảy sinh là nếu hệ thu được có vô số nghiệm $(D = 0)$ thì giải quyết ra sao?

Ta sẽ dùng những hằng đẳng thức đơn giản thôi.

Bài toán 2.1.24. $\omega(x) = \frac{2x-5}{x-2}.f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}; f(\omega(x)) + f(x) = 3, \forall x \neq 2.$

Ta chuẩn hóa

$$f(\omega(x)) + f(x) = 3, \forall x \neq 2 \Leftrightarrow f(\omega(x)) - \frac{3}{2} + f(x) - \frac{3}{2} = 0, \forall x \neq 2$$

Trong TH này ta dùng hằng đẳng thức đơn giản là:

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}[a - b]$$

$$\to f(x) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) - \left(f(\omega(x)) - \frac{3}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}[f(x) - f(\omega(x))]$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}[g(x) - g(\omega(x))],$$

$g(x)$ là hàm tùy ý.

Bài toán 2.1.25. $\omega(x) = \frac{2x-5}{x-2}.f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}; f(\omega(x)) - f(x) = h(x), \forall x \neq 2.$

Thay x bởi $\omega(x)$ ta suy ra điều kiện cần là $h(\omega(x)) = -h(x)$. Nếu thỏa được điều kiện này thì khi đó $h(x)$ được phân tích:

$$h(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(\omega(x))]$$

và do đó

$$f(\omega(x)) - f(x) = h(x), \forall x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow f(\omega(x)) - f(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(\omega(x))], \forall x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow f(\omega(x)) + \frac{1}{2}h(\omega(x)) = f(x) + \frac{1}{2}h(x), \forall x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow g(\omega(x)) = g(x), \forall x \neq 2$$

trong đó $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}h(x), \forall x \neq 2$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2}[g(x) + g(\omega(x))], \forall x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2}[k(x) + k(\omega(x))], \forall x \neq 2$$

với $k(x)$ là hàm tùy ý.

Bài toán **2.1.26.** $\omega(x) = \frac{-1}{x+1}; f : \mathbb{R}\backslash\{-1;0\} \to \mathbb{R};$

$$f(\omega(\omega(x))) + f(\omega(x)) + f(x) = 3, \forall x \neq -1; 0$$

Do dãy tương ứng tuần hoàn chu kỳ 3 nên phải là pth như trên mới thuộc loại ta đang nói (tức loại mà hệ thu được có $D = 0$).

Loại này ta dùng hằng đẳng thức sau:

$$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}(2a - b - c).$$

Ta phải đưa lên đủ ba thành phần như thế thì mới xuất hiện đủ chu kỳ của dãy.

Bài toán **2.1.27.** $\omega(x) = \frac{-1}{x+1}; f : \mathbb{R}\backslash\{-1;0\} \to \mathbb{R};$

$$f(\omega(\omega(x))) + f(\omega(x)) + f(x) = h(x), \forall x \neq -1; 0$$

Điều kiện cần là

$$h(\omega(\omega(x))) = h(\omega(x)) = h(x).$$

Và do đó nếu hàm $h(x)$ thỏa điều kiện này thì ta phân tích

$$h(x) = \frac{1}{3}[h(x) + h(\omega(x)) + h(\omega(\omega(x)))]$$

và thế là ta lại chuẩn hóa được.

2.1.4 Phương trình hàm dạng:

$$af(f(...f(x))) + bf(f(...f(x))) + ... + cf(f(x)) + df(x) = h(x)$$

PP: Xét dãy $\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = f(x_n), n \geqslant 0 \end{cases}$

Trong phương trình ban đầu ta chọn $x = x_n$ ta sẽ thu được dãy:

$$ax_{n+k} + bx_{n+k-1} + ... + cx_{n+2} + dx_{n+1} = h(x_n).$$

Dùng phương pháp vi phân ta tìm số hạng tổng quát của dãy. Lưu ý các dữ kiện đặc biệt để xác định các hệ số.

Bài toán **2.1.28.** $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty).f(f(x)) + f(x) = 1999.2000x, \forall x > 0$

Với $x > 0$ cố định, xét dãy: $\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = f(x_n), n \geqslant 0 \end{cases}$

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_{n+2} + x_{n+1} = 1999.2000x_n, \forall n \\ x_n > 0, \forall n \end{cases}$

Ta có phương trình đặc trưng: $t^2 + t = 1999.2000 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1999 \\ t = -2000 \end{array}\right.$

Suy ra, $x_n = C_1(1999)^n + C_2(-2000)^n$ Vì $x_n > 0, \forall n \Rightarrow C_2 = 0$. Cho $n = 0 \Rightarrow C_1 = x$. Do đó, $x_n = 1999^n x$. Vậy $f(x) = x_1 = 1999x$.

Bài toán 2.1.29. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ . f(f(x)) + f(x) = 6x.$

Bài toán 2.1.30. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ . f(f(x)) + f(x) = 12x.$

Trong nhiều trường hợp ta không đủ giả thiết để suy ra các hệ số thì phương pháp này cũng có thể xem là cách mò nghiệm để định hướng cho cách giải.

LUYỆN TẬP.

Bài toán 2.1.31. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right) + f\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right) = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 3\right), \forall x \neq 0.$$

Đại lượng chung của các biểu thức:

$$x + \frac{1}{x} = t$$

$$\to f(t+1) + f(t-1) = 2\left(t^2+1\right)$$

Làm mất vế phải:

$$t^2 + 1 = \frac{1}{2}\left[(t+1)^2 + (t-1)^2\right]$$

Bài toán 2.1.32. $f\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) - f\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = x, \forall x$

Lưu ý: $\begin{array}{l} *\left(\sqrt{x^2+1} + x\right).\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = 1 \\ *x = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) - \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{2} \end{array}$

Bài toán 2.1.33. $f(x) + f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(-\frac{1}{x}\right) = q(x)$

Khi thay x bởi $-x; \frac{1}{x}; -\frac{1}{x}$ ta được điều kiện cần: $q(x) = q(-x) = q\left(\frac{1}{x}\right) = q\left(-\frac{1}{x}\right)$
Chuẩn hóa:

$$q(x) = \frac{1}{4}\left[q(x) + q(-x) + q\left(\frac{1}{x}\right) + q\left(-\frac{1}{x}\right)\right]$$

Dẫn đến

$$g(x) + g(-x) + g\left(\frac{1}{x}\right) + g\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

với $g(x) = f(x) - \frac{1}{4}q(x)$

Đặt $h(x) = g(x) + g(-x)$ ta được

$$\begin{cases} h(x) + h\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0 \\ h(-x) = h(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) = \dfrac{1}{2}\left[h(x) - h\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] \\ h(-x) = h(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

với $\varphi(x)$ là hàm chẵn tùy ý.

Bài toán 2.1.34. $f(x) - f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right).f\left(-\frac{1}{x}\right) = h(x)$

Thành lập hệ.

$$\begin{cases} f(x) - f(-x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right).f\left(-\dfrac{1}{x}\right) = h(x) \\ f(-x) - f(x) + f\left(-\dfrac{1}{x}\right).f\left(\dfrac{1}{x}\right) = h(-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - f(-x) = \dfrac{1}{2}[h(x) - h(-x)] \\ f\left(-\dfrac{1}{x}\right).f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}[h(x) + h(-x)] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - f(-x) = \dfrac{1}{2}[h(x) - h(-x)] \\ f(x).f(-x) = \dfrac{1}{2}\left[h\left(\dfrac{1}{x}\right) + h\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right] \end{cases}$$

Bài toán 2.1.35. $f(x).f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

Dùng hằng đẳng thức

$$A.B = 1 \Leftrightarrow A = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

Ta được

$$f(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{\frac{q(x)}{q\left(\frac{1}{x}\right)}}$$

với $q(x)$ là hàm tùy ý thỏa $q(x).q\left(\frac{1}{x}\right) > 0, \forall x \neq 0.$

Bài toán 2.1.36. $f(x).f\left(\frac{1}{x}\right) = h(x)$

Thay x bởi $\frac{1}{x}$ ta thu được điều kiện cần:

$$h(x) = h\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow h(x) = \sqrt{h(x).h\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Do đó phương trình trở thành

$$f(x).f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{h(x).h\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Chuẩn hóa ta được:

$$\frac{f(x)}{\sqrt{h(x)}}.\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{h\left(\frac{1}{x}\right)}} = 1$$

Bài toán 2.1.37. $f(x).f\left(\frac{1}{x}\right) + f(-x).f\left(-\frac{1}{x}\right) = h(x)$

Thay x bỡi $-x; \frac{1}{x}; -\frac{1}{x}$ ta nhận được điều kiện cần:

$$h(x) = h(-x) = h\left(\frac{1}{x}\right) = h\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Do đó:

$$h(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{h(x).h\left(\frac{1}{x}\right)} + \sqrt{h(-x).h\left(-\frac{1}{x}\right)}\right]$$

Đặt

$$g(x) = f(x).f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{h(x).h\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Ta được:

$$\begin{cases} g(x) + g(-x) = 0 \\ g\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)] \\ g\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2}[q(x) - q(-x)],$$

với $q(x)$ là hàm tùy ý thỏa $q\left(\frac{1}{x}\right) = q(x)$. Việc tìm $q(x)$ đã biết.

Bài toán 2.1.38. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, thỏa

$i) f(-x) = -f(x), \forall x$

$ii) f(x+1) = f(x) + 1, \forall x$

$iii) f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}, \forall x \neq 0.$

$\forall t \neq -1; 0.$ Ta sẽ tính $f\left(\frac{t+1}{t}\right)$ theo hai cách.

$C_1 : f\left(\frac{t+1}{t}\right) = f\left(1 + \frac{1}{t}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{t}\right) = 1 + \frac{f(t)}{t^2}$

$C_2 : f\left(\frac{t+1}{t}\right) = \frac{f\left(\frac{t}{t+1}\right)}{\left(\frac{t}{t+1}\right)^2} = \frac{f\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)}{\left(\frac{t}{t+1}\right)^2} = \frac{1 - f\left(\frac{1}{t+1}\right)}{\left(\frac{t}{t+1}\right)^2} = \frac{1 - \frac{f(t+1)}{(t+1)^2}}{\left(\frac{t}{t+1}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1+f(t)}{(t+1)^2}}{\left(\frac{t}{t+1}\right)^2}$

2.2 Phương trình hàm với hai biến số độc lập

*) Hàm số liên tục biến một tập liên thông thành một tập liên thông.
*) Việc chuyển đổi thứ tự lấy giới hạn của một hàm số liên tục luôn thực hiện được.
Về tập hợp số thực $\mathbb{R}$.

1. Tính trù mật: Tập các số hữu tỷ và tập $\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}\}$ là hai tập số trù mật trong tập các số thực.
2. Cận trên, cận dưới.

2.2.1 Hàm số chuyển đổi các phép tính số học

2.2.2 Hàm số chuyển đổi các đại lượng trung bình

LUYỆN TẬP.

Bài toán 2.2.1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục và $f(ax+by)=af(x)+bf(y),\forall x,y$.

$$x=y=0\to(a+b-1)\,f(0)=0$$

$TH: a+b\neq 1\Rightarrow f(0)=0\to f(ax)=af(x);f(by)=bf(y)\Rightarrow f(ax+by)=f(ax)+f(by),\forall x,y\Leftrightarrow f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y$
$TH: a+b=1\Rightarrow f(0)=c.$ Đặt $g(x)=f(x)-f(0)$

Bài toán 2.2.2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục và $f(ax+by)=af(x)-bf(y),\forall x,y$.

Bài toán 2.2.3. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, liên tục và $f\left(x^ay^b\right)=[f(x)]^a[f(y)]^b,\forall x,y>0$

Đặt $x=e^u,y=e^v,\ g(u)=f(e^u)\to g(au+bv)=[g(u)]^a[g(v)]^b,\forall u,v$
logrit hóa.

Bài toán 2.2.4. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, liên tục và

$$f\left(\left(\frac{x^\alpha+y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)=\left[\frac{[f(x)]^\beta+[f(y)]^\beta}{2}\right]^{\frac{1}{\beta}},\forall x,y>0$$

$\to\left[f\left(\left(\frac{x^\alpha+y^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right]^\beta=\frac{[f(x)]^\beta+[f(y)]^\beta}{2}$. Đặt $g(x)=[f(x)]^\beta$

Bài toán 2.2.5. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, liên tục và $f\left(\sqrt{xy}\right)=\left[\frac{[f(x)]^\beta+[f(y)]^\beta}{2}\right]^{\frac{1}{\beta}},\forall x,y>0$

Bài toán 2.2.6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, liên tục và $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}+(x-y)^2,\forall x,y$

$NX:(x-y)^2=2x^2+2y^2-4\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\to f\left(\frac{x+y}{2}\right)+4\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{f(x)+4x^2+f(y)+4y^2}{2}$

Bài toán 2.2.7. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, liên tục và $\sqrt{xy}f\left(\sqrt{xy}\right)=\frac{yf(x)+xf(y)}{2},\forall x,y>0$

$\to\frac{f\left(\sqrt{xy}\right)}{\sqrt{xy}}=\frac{\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y}}{2},\forall x,y>0$

Bài toán 2.2.8. Tìm hàm liên tục thỏa $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, thỏa

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,\forall x,y$$

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,\forall x,y\Leftrightarrow f(x+y)-(x+y)^2=\left[f(x)-x^2\right]+\left[f(y)-y^2\right],\forall x,y$
$\Leftrightarrow g(x+y)=g(x)+g(y),g(x)=f(x)-x^2$

Bài toán 2.2.9. Tìm hàm liên tục thỏa $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, thỏa

$$(x-y)\,f(x+y)=xf(x)-yf(y)\,,\forall x,y$$

$(x-y)\,f(x+y)=xf(x)-yf(y)\,,\forall x,y\Leftrightarrow xf(x)=yf(y)+(x-y)\,f(x+y)\,,\forall x,y$
$\Rightarrow xf(x)=(x+y)\,f(x+y)-yf(2x+y)\,,\forall x,y$
$\Rightarrow yf(y)+(x-y)\,f(x+y)=(x+y)\,f(x+y)-yf(2x+y)\,,\forall x,y$
$\Rightarrow 2yf(x+y)=y\left[f(y)+f(2x+y)\right],\forall x,y$
$\Rightarrow f(x+y)=\dfrac{f(y)+f(2x+y)}{2},\forall x,\forall y\neq 0$
Lưu ý: $y+(2x+y)=2\,(x+y)\to$
Đặt: $\begin{cases}u=y\neq 0\\ v=2x+y\end{cases}\to f\left(\frac{u+v}{2}\right)=\frac{f(u)+f(v)}{2},\forall u\neq 0,\forall v$

Bài toán 2.2.10. Tìm hàm liên tục $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ f\left(\frac{1}{f(xy)}\right)=f(x)\,f(y)\,,\forall x,y>0$

Đặt: $f(1)=a.$
$*)y=1\to f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=af(x)\,,\forall x>0.\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{f(xy)}\right)=af(xy)\,,\forall x,y>0$
$\Rightarrow af(xy)=f(x)\,f(y)\,,\forall x,y>0\Leftrightarrow \dfrac{f(xy)}{a}=\dfrac{f(x)}{a}\dfrac{f(y)}{a},\forall x,y>0$