PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TP BẮC GIANG

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2017-2018
MÔN THI: TOÁN 8
Thời gian: 150 phút không kể thời gian giao đề

Bài 1: (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $M=\frac{x^4+2}{x^6+1}+\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\frac{x^2+3}{x^4+4x^2+3}$
   a) Rút gọn M
   b) Tìm giá trị lớn nhất của M
2. Cho x,y là số hữu tỉ khác 1 thỏa mãn $\frac{1-2x}{1-x}+\frac{1-2y}{1-y}=1$

Chứng minh $M=x^2+y^2-xy$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Tìm số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$
2. Cho x,y,z thỏa mãn $x+y+z=7;\quad x^2+y^2+z^2=23;\quad xyz=3$

Tính giá trị của biểu thức $H=\frac{1}{xy+z-6}+\frac{1}{yz+x-6}+\frac{1}{zx+y-6}$

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $3x^2+3xy-17=7x-2y$
2. Giải phương trình: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8)=-16$

Bài 4. (6 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Trên cạnh AB lấy M $(0<MB<MA)$ và trên cạnh BC lấy N sao cho $\widehat{MON}=90^0$. Gọi E là giao điểm của AN với DC, gọi K là giao điểm của ON với BE.

1) Chứng minh ΔMON vuông cân
2) Chứng minh MN song song với BE
3) Chứng minh CK vuông góc với BE
4) Qua K vẽ đường song song với OM cắt BC tại H. Chứng minh:
   $\frac{KC}{KB}+\frac{KN}{KH}+\frac{CN}{BH}=1$

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho $x,y>0$ thỏa mãn $x+2y\ge 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $H=x^2+2y^2+\frac{1}{x}+\frac{24}{y}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1.

a)

$$M=\frac{x^4+2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}+\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+3)}$$

$$=\frac{x^4+2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}+\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^4+2+(x^2-1)(x^2+1)-(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\frac{x^4+2+x^4-1-x^4+x^2-1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}$$

$$=\frac{x^4+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\frac{x^2.(x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$$

Vậy $M=\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$ với mọi x

b) Ta có : $M=\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$ với mọi x

- Nếu $x=0$ ta có $M=0$

- Nếu $x\neq 0$, chia cả tử và mẫu của M cho x^2 ta có: $M=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}$

Ta có: $x^2+\frac{1}{x^2}-1=\left(x^2-2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+1=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1\geq 1$

Nên ta có: $M=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\leq 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Vậy M lớn nhất là $M=1$ khi $x=1$

2.

$$\frac{1-2x}{1-x}+\frac{1-2y}{1-y}=1\Leftrightarrow(1-2x)(1-y)+(1-2y)(1-x)=(1-x)(1-y)$$

$$\Leftrightarrow 1-y-2x+2xy+1-x-2y+2xy=1-x-y+xy\Leftrightarrow x+y=\frac{3xy+1}{2}$$

Ta có

$$M=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy=\left(\frac{3xy+1}{2}\right)^2-3xy=...=\left(\frac{3xy-1}{2}\right)^2$$

Ta có :

Vì $x,y\in\mathbb{Q}$ nên $\frac{3xy-1}{2}$ là số hữu tỷ , Vậy M là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 2.

1)

Ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=....=(x^2+12x+27)(x^2+12x+35)+2033$

Đặt $x^2+12x+30=t,$ ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=(t-3)(t+5)+2033$

$=t^2+2t-15+2033=t(t+2)+2018$

Vậy ta có $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033=(x^2+12x+30)(x^2+12x+32)+2018$

Vậy số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$ là 2018.

2) Vì $x+y+z=7\Rightarrow z=-x-y+7\Rightarrow xy+z-6=...=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$

Tương tự ta có: $yz+x-6=(y-1)(z-1);zx+y-6=(z-1)(y-1)$

Vậy $H=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}=\frac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

$=\frac{(x+y+z)-3}{xyz-(xy+yz+xz)+(x+y+z)-1}=\frac{7-3}{3-(xy+yz+xz)+7-1}=\frac{4}{9-(xy+yz+xz)}$ Ta có: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)\Rightarrow 7^2=23+2(xy+yz+xz)$

$\Rightarrow xy+yz+xz=13$

Vậy $H=\frac{4}{9-13}=-1$

Bài 3.

1) Ta có:

$3x^2+3xy-17=7x-2y\Leftrightarrow 3xy+2y=-3x^2+7x+17\Leftrightarrow(3x+2)y=-3x^2+7x+17$ Vì x nguyên nên $2x+3\neq 0$ nên ta có:

$$y=\frac{-3x^2+7x+17}{3x+2}=\frac{-3x^2-2x+9x+6+11}{2}$$

$$=\frac{-x(3x+2)+3(3x+2)+11}{3x+2}=-x+3+\frac{11}{3x+2}$$

Vì x,y nguyên nên ta có $\frac{11}{3x+2}$ nguyên $\Rightarrow 11:3x+2\Rightarrow 3x+2=\pm 1;\pm 11$

- Xét các trường hợp ta tìm được $x=-1;y=-1;x=-3;y=5$ thỏa mãn và kết luận

2) Ta có: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8)=-16\Leftrightarrow(3x-2)(3x+3)^2(3x+8)=-144$

Đặt $3x+3=t\Rightarrow 3x-2=t-5;3x+8=t+5$

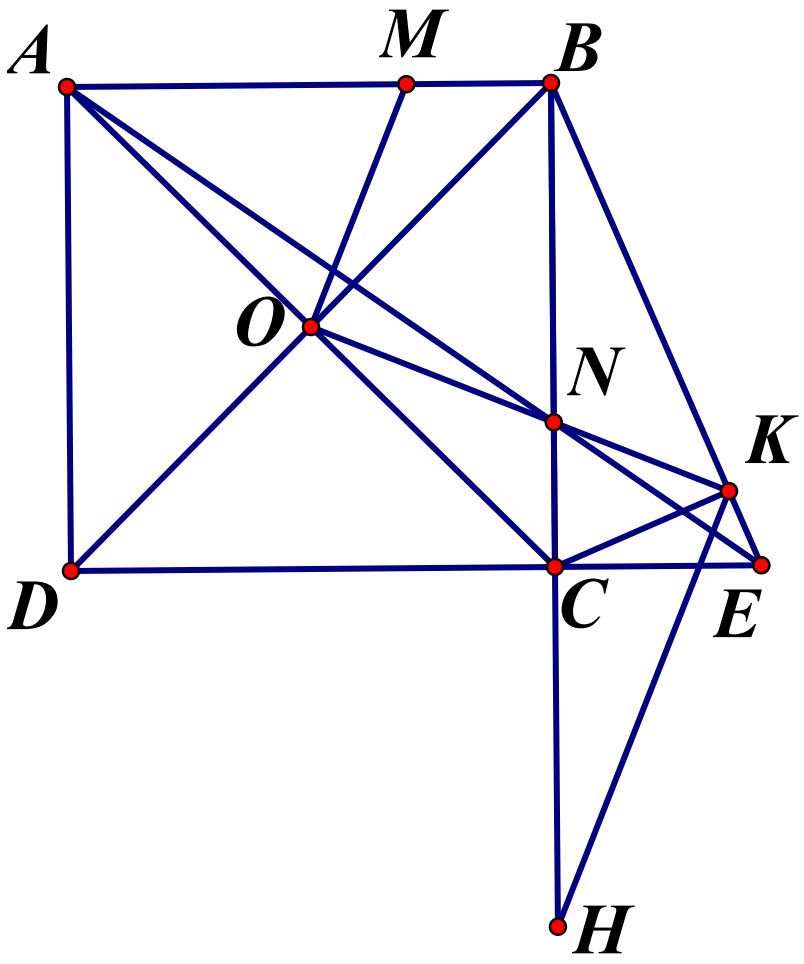
Ta có phương trình: $(t-5)t^2(t+5)=-144$

$$\Leftrightarrow t^4-25t^2+144=0\Leftrightarrow(t^2-9)(t^2-16)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2=9\\t^2=16\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\pm 3\\t=\pm 5\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp ta tìm được $x=0;x=-2;x=\frac{2}{3};x=-\frac{8}{3}$

Bài 4.



1) Ta có : $\widehat{BOC}=90^0 \Rightarrow \widehat{CON}+\widehat{BON}=90^0$; vì $\widehat{MON}=90^0 \Rightarrow \widehat{BOM}+\widehat{BON}=90^0 \Rightarrow \widehat{BOM}=\widehat{CON}$

Ta có BD là phân giác $\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{MBO}=\widehat{CBO}=\dfrac{\widehat{BOC}}{2}=45^0$

Tương tự ta có: $\widehat{NCO}=\widehat{DCO}=\dfrac{\widehat{BOC}}{2}=45^0$. Vậy ta có : $\widehat{MBO}=\widehat{NCO}$

Xét ΔOBM và ΔOCN có $OB=OC;\widehat{BOM}=\widehat{CON};\widehat{MBO}=\widehat{NCO}$

$\Rightarrow \Delta OBM=\Delta OCN \Rightarrow OM=ON$

Xét ΔMON có $\widehat{MON}=90^0;OM=ON \Rightarrow \Delta MON$ vuông cân

2) $\Delta OBM=\Delta OCN \Rightarrow MB=NC$ mà $AB=BC \Rightarrow AB-MB=BC-NC$

$\Rightarrow AM=BM \Rightarrow \dfrac{AM}{MB}=\dfrac{BN}{NC}$

Ta có: $AB//CD \Rightarrow AM//CE \Rightarrow \frac{AN}{NE}=\frac{BN}{NC}$

Vậy ta có: $\Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NE} \Rightarrow MN//BE$ (Theo định lý Talet đảo)

3) Vì $MN//BE \Rightarrow \widehat{BKN}=\widehat{MNO}=45^0$ (đồng vị và có tam giác MON vuông cân)

$\Rightarrow \Delta BNK \sim \Delta ONC$ (vì có $\widehat{BNK}=\widehat{ONK};\widehat{BKN}=\widehat{OCN}=45^0$) $\Rightarrow \frac{NB}{NK}=\frac{NO}{NC}$

- Xét $\Delta BNO;\Delta KNC$ có $\widehat{BNO}=\widehat{CNK};\frac{NB}{NK}=\frac{NO}{NC} \Rightarrow \Delta BNO \sim \Delta KNC$

  $\Rightarrow \widehat{NKC}=\widehat{NBO}=45^0$

  Vậy ta có: $\widehat{BKC}=\widehat{BKN}+\widehat{CKN}=45^0+45^0=90^0 \Rightarrow CK \perp BE$

4) – Vì $KH//OM$ mà $MK \perp OK \Rightarrow MK \perp KH \Rightarrow \widehat{NKH}=90^0$ mà

$\widehat{NKC}=45^0 \Rightarrow \widehat{CKH}=45^0 \Rightarrow \widehat{BKN}=\widehat{NKC}=\widehat{CKH}=45^0$

Xét ΔBKC có $\widehat{BKN}=\widehat{NKC} \Rightarrow KN$ là phân giác trong của ΔBKC, mà $KH \perp KN$

$\Rightarrow KH$ là phân giác ngoài của $\Delta BKC \Rightarrow \frac{KC}{KB}=\frac{HC}{HB}$

Chứng minh tương tự ta có : $\frac{KN}{KH}=\frac{BN}{BH}$

Vậy ta có $\frac{KC}{KB}+\frac{KN}{KH}+\frac{NC}{BH}=\frac{HC}{HB}+\frac{BN}{BH}+\frac{CN}{BH}=.....=\frac{BH}{BH}=1$

Bài 5

Ta có: $H=x^2+2y^2+\frac{1}{x}+\frac{24}{y}$

$$=(x^2-2x+1)+(2y^2-8y+8)+\left(\frac{1}{x}+x-2\right)+\left(\frac{24}{y}+6y-24\right)+(x+2y)+17$$

$$=(x-1)^2+2(y-2)^2+\frac{(x-1)^2}{x}+\frac{6(y-2)^2}{y}+(x+2y)+17$$

$$\geq 0+0+0+0+5+17=22$$

Dấu " =" xảy ra $\Leftrightarrow (x-1)^2=2(y-2)^2=\frac{(x-1)^2}{x}=\frac{6(y-2)^2}{y}=0$ và $x+2y=5$

$\Leftrightarrow x=1$ và $y=2$. Vậy H nhỏ nhất là $H=22 \Leftrightarrow x=1,y=2$