

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (4 điểm)

Cho biểu thức : $P = \left(\frac{x}{x^2 - 25} + \frac{5 - x}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x - 5}{x^2 + 5x} - \frac{2x}{5 - x}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để P có giá trị là một số nguyên.

Bài 2. (3 điểm)

Giải phương trình sau:

$$\frac{2010x + 2010}{x^2 + x + 1} - \frac{2010x - 2010}{x^2 - x + 1} = \frac{2011}{x(x^4 + x^2 + 1)}$$

Bài 3. (3 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$$

b) Cho a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 8$. Chứng minh $-4 \leq a + b \leq 4$

Bài 4. (8 điểm)

Cho O là trung điểm của đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm D bất kỳ, qua O vẽ hai đường thẳng vuông góc với DO tại O cắt By tại C

a) Chứng minh $BC \cdot AD = a^2$

b) Chứng minh DO và CO lần lượt là tia phân giác của $\angle ADC$ và $\angle BCD$

c) Vẽ $OH \perp CD (H \in CD)$. Gọi I là giao điểm của AC và BD , E là giao điểm của AH và DO , F là giao điểm của BH và CO . Chứng minh ba điểm E, I, F thẳng hàng

d) Xác định vị trí của điểm D trên tia Ax để tích $DO \cdot CO$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 5. (2 điểm)

Cho hai số x, y thỏa mãn điều kiện $(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Tìm được ĐKXĐ của P là : $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x}{(x+5)(x-5)} - \frac{x-5}{x(x+5)} \right) : \frac{2x-5}{x(x+5)} - \frac{2x}{5-x} \\ &= \frac{x^2 - (x-5)^2}{x(x+5)(x-5)} : \frac{2x-5}{x(x+5)} - \frac{2x}{5-x} \\ &= \frac{(x-x+5)(x+x-5)}{x(x-5)(x+5)} \cdot \frac{x(x+5)}{2x-5} - \frac{2x}{5-x} \\ &= \frac{5}{x-5} + \frac{2x}{x-5} = \frac{5+2x}{x-5} \end{aligned}$$

b)

$$P \in \mathbb{Z} \begin{cases} x \neq 0; x \neq \pm 5; x \in \mathbb{Z} (*) \\ \frac{5+2x}{x-5} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\frac{5+2x}{x-5} = 2 + \frac{15}{x-5}$$

Ta có:

$$\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-5 \in U(15) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15\}$$

Mà x lớn nhất nên $x-5$ lớn nhất. Do đó $x-5=15 \Leftrightarrow x=20$ (thỏa mãn $(*)$)

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của $x=20$ để P có giá trị là một số nguyên.

Bài 2.

$$\frac{2010x+2010}{x^2+x+1} - \frac{2010x-2010}{x^2-x+1} = \frac{2011}{x(x^4+x^2+1)} \quad (1)$$

$$x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x; \quad x^2-x+1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$$

Ta có:

Điều kiện xác định của phương trình (1) là : $x \neq 0$

$$\text{Ta có: } x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = (x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

Quy đồng mẫu hai vế và khử mẫu:

$$(1) \Rightarrow 2010x(x+1)(x^2 - x + 1) - 2010x(x-1)(x^2 + x + 1) = 2011$$

$$\Leftrightarrow 2010x(x^3 + 1) - 2010x(x^3 - 1) = 2011$$

$$\Leftrightarrow 2010x(x^3 + 1 - x^3 + 1) = 2011$$

$$\Leftrightarrow 2010x \cdot 2 = 2011 \Leftrightarrow x = \frac{2011}{4020} (TM)$$

Bài 3.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b) = a^4(b-c) - b^4(a-c) + c^4(a-b) \\ & = a^4(b-c) - b^4(a-b+b-c) + c^4(a-b) \\ & = a^4(b-c) - b^4(a-b) - b^4(b-c) + c^4(a-b) \\ & = (b-c)(a^4 - b^4) - (a-b)(b^4 - c^4) \\ & = (b-c)(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) - (a-b)(b-c)(b+c)(b^2 + c^2) \\ & = (a-b)(b-c)(a^3 + ab^2 + a^2b + b^3 - b^3 - bc^2 - b^2c - c^3) \\ & = (a-b)(b-c) \left[(a-c)(a^2 + ac + c^2) + b^2(a-c) + b(a-c)(a+c) \right] \\ & = (a-b)(b-c)(a-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ mà } a^2 + b^2 \leq 8 \text{ nên } 2ab \leq 8$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 8 + 8 = 16$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow (a+b+4)(a+b-4) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq a+b \leq 4 (dfcm)$$

- a) Chứng minh $\triangle ADO = \triangle BOC$ (cùng phụ với $\angle AOD$)
 $\triangle ADO \sim \triangle BOC (gg) \Rightarrow \frac{OA}{BC} = \frac{AD}{OB} \Rightarrow BC \cdot AD = a^2$
 Chứng minh $\frac{OB}{BC} = \frac{OD}{OC}$.
- b) Chứng minh $\triangle ODC \sim \triangle BOC (c.g.c)$
 Suy ra và kết luận CO là tia phân giác của $\angle BCD$
 Chỉ ra $\triangle ADO \sim \triangle ODC$ (cùng đồng dạng với $\triangle BOC$)
 Chứng minh DO là tia phân giác của $\angle ADC$
- c) Chứng minh $\triangle vuông OBC = \triangle vuông OHC$ (cạnh huyền – góc nhọn)
 $\Rightarrow CB = CH$
 Chứng minh OC là đường trung trực HB
 Tương tự chứng minh $AD = DH$ và OD là trung trực của HA
 Chứng minh EF là đường trung bình $\triangle AHB \Rightarrow EF \parallel AB$

Chỉ ra $EH // OC \Rightarrow \frac{DE}{EO} = \frac{DH}{HC} = \frac{AD}{BC}$

$AD // BC \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{DI}{IB}$

$\frac{DE}{EO} = \frac{DI}{IB}$

Suy ra Áp dụng định lý Ta let đảo cho $\Delta DOB \Rightarrow EI // OB$

Theo tiên đề Oclit kết luận E, I, F thẳng hàng

d) Chỉ ra $2S_{DOC} = OC \cdot OD = OH \cdot DC = a \cdot DC$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow DC$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow DC \perp Ax \Leftrightarrow ABCD$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow AD = BC; CD = AB$

Mà $BC \cdot AD = a^2 \Leftrightarrow AD^2 = a^2 \Leftrightarrow AD = a$

Xét tam giác vuông AHB có HO là đường trung tuyến thuộc cạnh huyền

$\Rightarrow OH = \frac{AB}{2} = a$

Suy ra GTNN của $OD \cdot OC$ bằng $2a^2$ khi và chỉ khi $D \in Ax$ và $AD = a$.

Bài 5.

$$(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + x^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 = -3x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 = -3x^2 + 1$$

Ta có: $-3x^2 + 1 \leq 1 \forall x \Rightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 + y^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq A \leq 2$

$$A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0. \quad \text{Vậy } \min A = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}. \quad \text{Vậy } \max A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}$$