

DẠNG 10**Bài toán liên quan đến hàm đặc trưng**

- Câu 1.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $x + x^2 - 9^y = 3^y$.
A. 2020. **B.** 1010. **C.** 6. **D.** 7.
- Câu 2.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x, y \in [5; 37]$ và $\sqrt{x} = y^2 + 2y - x + 2 + \sqrt{y^2 + 2y + 2}$.
A. 32. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 33.
- Câu 3.** Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $2 \cdot 2^x + x + \sin^2 y = 2^{\cos^2 y}$.
A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.
- Câu 4.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $3^{x+1} + x + 1 = 3^y + y$
A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2023.
- Câu 5.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2018 để phương trình $\log_2(m + \sqrt{m + 2^x}) = 2x$ có nghiệm thực?
A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2016. **D.** 2015.
- Câu 6.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq y \leq 100$ và $x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 - 19y^3 + 3x^2 - 3y = 0$.
A. 10. **B.** 100. **C.** 20. **D.** 21.
- Câu 7.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x, y \in [3; 48]$ và $(x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1}\sqrt{x^2-4x+5}$ (1).
A. 46. **B.** 6. **C.** 45. **D.** 5.
- Câu 8.** Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $\log_2\left(\frac{x+1}{2}\right) + x = 4^{\sin^4 y + \cos^4 y} - \sin^2 2y$.
A. Vô số. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 9.** Cho số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2} - 2^y = y - x^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x - 2y$.
A. $P = \frac{1}{4}$. **B.** $P = \frac{3}{4}$. **C.** $P = \frac{1}{3}$. **D.** $P = \frac{1}{8}$.
- Câu 10.** Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ trong đó x, y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$.
A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.
- Câu 11.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $3(9^y + 2y) = x + \log_3(x+1)^3 - 2$?
A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.
- Câu 12.** Cho $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong số nguyên m thỏa $f(m+1) + f\left(\frac{m}{2020} - 2020\right) < 0$. Giá trị của m_0 là

A. $m_0 = 2018$. B. $m_0 = 2019$. C. $m_0 = 2020$. D. $m_0 = 2021$.

Câu 13. Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$.

A. $\frac{4\sqrt{6} + 36}{9}$. B. $\frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$. C. $\frac{36 - 296\sqrt{15}}{9}$. D. $\frac{-4\sqrt{6} + 36}{9}$.

Câu 14. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn bất đẳng thức $\log \frac{x+1}{3y+1} \leq 9y^4 + 6y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$ (1).

Biết $y \leq 1000$, hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn bất đẳng thức (1).

A. 1501100. B. 1501300. C. 1501400. D. 1501500.

Câu 15. Cho 2 số thực x, y không âm thỏa mãn: $2^{\frac{x+1}{x}} = \log_2 [14 - (y-2)\sqrt{y+1}]$. Giá trị của biểu thức $P = |1 - 2(x+y)|$ bằng

A. 3. B. 5. C. 1. D. 2.

Câu 16. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$ (*). Biết $0 \leq x \leq 2018$, số cặp x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức (*) là

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 17. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $2(2^{a^2+b^2+c^2} - 1) + (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 4^{a+b+c}$. Đặt

$P = \frac{3a+2b+c}{a+b+c}$ và gọi S là tập hợp gồm những giá trị nguyên của P . Số phần tử của tập S là

A. Vô số. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 18. Phương trình $\log x + 1 = 2$ có nghiệm là.

A. 11. B. 9. C. 101. D. 99.

Câu 19. Cho $2^a = 3$, $3^b = 4$, $4^c = 5$, $5^d = 6$. Tính 2^{abcd} .

A. $\log_2 6$. B. $\log_6 2$. C. 2. D. 6.

Câu 20. Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $2^x = 5^y = 10^{-z}$. Tính $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

A. -2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 21. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x+y)$. Giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Câu 22. Cho x, y, a, b là các số dương thỏa mãn $a > b > 1$ và $a^{x+1} = b^{2y} = \frac{a}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + y$ là

A. -2. B. $\frac{-13}{4}$. C. 4. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 23. Cho biết a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2018^a = 2019^b = 2020^c$. Hãy tính giá trị của biểu

$$\text{thức } P = \frac{a}{b} + \frac{b}{c}.$$

A. $\log_{2018} 2019$.

B. $\log_{2018} 2019 + \log_{2019} 2020$.

C. $\log_{2018} 2020$.

D. $\log_{2018} 2019 \cdot 2020$.

Câu 24. Cho x, y dương thỏa mãn: $\log_3(x^2 + 2y) = 1 + \log_3 4$. Giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{xy}$ thuộc khoảng nào

A. $(-1; 1)$.

B. $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

C. $(5; 10)$.

D. $(-2; 0)$

Câu 25. Cho $a, b, c > 1$ và các số thực dương x, y, z thỏa mãn $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - z^2$.

A. -2 .

B. 3 .

C. -1 .

D. 1 .

Câu 26. Cho $x > 0; y > 0$ và $2020^{2019(x^2 - y + 4)} = \frac{4x + y}{(x + 2)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y - 2x$?

A. $\min P = 4$.

B. $\min P = 2$.

C. $\min P = 1$.

D. $\min P = 3$.

Câu 27. Cho $x > y \geq 0$ thỏa mãn $3^{x+y+2xy-2} = \frac{2(1-xy)}{x+y}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 5y$ là

A. 2 .

B. $\frac{9}{5}$.

C. 4 .

D. $\frac{50 - 8\sqrt{5}}{4\sqrt{5} + 1}$.

Câu 28. Xét các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{3} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) + 12 \log_{\frac{b}{a}}^2 a - 3.$$

A. $\min P = 13$.

B. $\min P = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

C. $\min P = \sqrt[3]{2}$.

D. $\min P = 9$.

Câu 29. Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a > 1, b > 1, c > 1$ và $a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(2; 4)$.

B. $(4; 6)$.

C. $(6; 8)$.

D. $(8; 10)$.

Câu 30. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt[4]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 4y$ là $P_{\min} = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản và $n \in \mathbb{N}$, khi đó giá trị của biểu thức $T = m^2 + n$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 79 .

B. 25 .

C. 34 .

D. 85 .

Câu 31. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x > -1, y > -3$ và $\log_2(y+3)(x+1) + \frac{xy+3x+y+2}{x+1} = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y + 10$ thuộc tập nào dưới đây:

A. $[1; 3)$.

B. $[3; 4)$.

C. $[4; 5)$.

D. $[5; 6)$.

Câu 32. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $1 > a > b > 0,25$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(b - \frac{1}{4} \right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b} \text{ thuộc tập hợp nào dưới đây?}$$

- A. $(0; 1)$. B. $\left(4; \frac{11}{2}\right)$. C. $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$. D. $\left(1; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 33. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \leq 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{6(2x + y)}{x} + \ln \frac{x + 2y}{y} \text{ là } a + \ln b. \text{ Giá trị của tích } a.b \text{ là}$$

- A. 45. B. 81. C. 108. D. 115.

Câu 34. Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $1 < a \leq b \leq a^3$ và $a^x = b^y = \sqrt[3]{ab}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 3y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $[1; 2)$. B. $[2; 3)$. C. $[3; 4)$. D. $[4; 5)$.

Câu 35. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b} \text{ bằng.}$$

- A. $\sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2}$. B. $\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$.
C. $\frac{1}{2} \log_2 3 + \log_3 2$. D. $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}}$.

Câu 36. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{16} x = \log_{20} y = \log_{25} \frac{2x - y}{3}$. Tính giá trị $T = \frac{y}{x}$.

- A. $T = \frac{2}{3}$. B. $T = \frac{3}{2}$. C. $T = -\frac{2}{3}$. D. $T = -\frac{3}{2}$.

Câu 37. Cho p và q là các số thực dương sao cho: $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16} (p + q)$. Tìm giá trị của $\frac{q}{p}$

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{8}{5}$ C. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$ D. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

Câu 38. Cho x, y là hai số nguyên không âm thỏa mãn $\log_2 (x + y) = \log_3 (x - y)$. Hỏi tổng $x + y$ là bao nhiêu?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 7.

Câu 39. Cho số thực $1 \leq x \leq 8$. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{\log_2 \frac{x}{128}}{\log_2 x + 1} - \log_{\sqrt{2}} x \text{ lần lượt là } a, b. \text{ Tính } ab.$$

- A. $ab = 5$. B. $ab = 35$. C. $ab = -7$. D. $ab = 35$.

Câu 40. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y), x \leq 2020$ và thỏa mãn phương trình $\log_2 x + \log_2 (x - y) = 1 + 4 \log_4 y$

- A. 2020. B. 1010. C. 2019. D. 1011.

- Câu 41.** Biết $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_2 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{x} \right) = 6x - 4x^2$ và $2x_1 - x_2 = \frac{3}{4}(a - \sqrt{b})$, $(a, b \in \mathbb{N})$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$
- A. $P = -4$. B. $P = 6$. C. $P = -6$. D. $P = 4$.
- Câu 42.** Cho phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$. Phương trình này có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 2020\pi)$
- A. 2020 B. 2019 C. 1009 D. 1010
- Câu 43.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của y thỏa mãn $5^x = \log_5(x + y) + y$. Biết rằng $|y| \leq 2020$.
- A. 1. B. 4. C. 3. D. 7.
- Câu 44.** Cho bất phương trình $\log_{10}x + \log^2 x + 3 \geq m \log_{10}x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m nguyên dương để bất phương trình có nghiệm thuộc $[1; +\infty)$.
- A. 1. B. 3. C. vô số. D. 2.
- Câu 45.** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_3(x + y) = \log_4(x^2 + y^2)$. Tập giá trị của biểu thức $P = x^3 + y^3$ có chứa bao nhiêu giá trị nguyên.
- A. 4. B. 5. C. 9. D. Vô số.
- Câu 46.** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực dương y thỏa mãn $2^{x^2+y^2} = 2.2^{y-x}$?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 47.** Tìm m để phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x-2}\right) + 4m - 4 = 0$ có nghiệm trên $\left[\frac{5}{2}; 4\right]$
- A. $-3 < m \leq \frac{7}{3}$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m \in \{1\}$. D. $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$.
- Câu 48.** Phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; 2020\pi)$?
- A. 2020 nghiệm. B. 1010 nghiệm. C. 2018 nghiệm. D. 1009 nghiệm.
- Câu 49.** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_4(x + y + 3) = \log_5(x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5)$?
- A. 3. B. 2. C. 1. D. Vô số.
- Câu 50.** Cho x, y thỏa mãn $2^{2x-y+1} + 3^{2x-y+1} - 5^{2x-y+1} = 5^{-2x+y+1} - 2^{-2x+y+1} - 3^{-2x+y+1}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2x^2 - y^2 - 2x + 3y + 1$.
- A. 2. B. -2. C. 1. D. 3.
- Câu 51.** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x + \sqrt{2}y) = \log_2(x^2 + y^2)$.
- A. 3. B. 2. C. 1. D. Vô số.
- Câu 52.** Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ thuộc đoạn $[1; 2020]$ thỏa mãn y là số nguyên và $x + \ln x = y + e^y$?
- A. 2021. B. 2020. C. 7. D. 6.

Câu 53. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x > \frac{1}{10}$ và $\log x + \log y + 1 \geq \log(x + y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $\left[\frac{5}{3}; 2\right)$. B. $\left[0; \frac{4}{3}\right]$. C. $\left[\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$. D. $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1D	2C	3D	4B	5A	6D	7B	8B	9D	10B	11D	12A	13B	14D	15C
16C	17D	18D	19D	20C	21A	22D	23B	24B	25C	26D	27A	28D	29A	30D
31B	32B	33B	34B	35B	36A	37D	38A	39B	40B	41B	42D	43A	44A	45A
46B	47D	48B	49B	50D	51B	52C	53B							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn D

Ta có: $x + x^2 - 9^y = 3^y \Leftrightarrow x + x^2 = 3^y + (3^y)^2$ (1). Xét hàm $f(t) = t + t^2$, ($t > 0$).

Ta có: $f'(t) = 1 + 2t > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì vậy, (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(3^y) \Leftrightarrow x = 3^y$.

Theo giả thiết, $1 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 3^y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_3 2020$.

Vì y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow x \in \{1; 3; 9; 27; 81; 243; 729\}$.

Vậy có 7 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 2. Chọn C

Ta có: $\sqrt{x} = y^2 + 2y - x + 2 + \sqrt{y^2 + 2y + 2} \Leftrightarrow x + \sqrt{x} = y^2 + 2y + 2 + \sqrt{y^2 + 2y + 2}$. (2)

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có:

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty).$$

$$(2) \Leftrightarrow f(x) = f(y^2 + 2y + 2) \Leftrightarrow x = y^2 + 2y + 2.$$

Do $x, y \in [5; 37]$ nên $5 \leq y^2 + 2y + 2 \leq 37 \Leftrightarrow 4 \leq (y+1)^2 \leq 36 \Leftrightarrow 2 \leq y+1 \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ và $y \in [5; 37]$ nên $y = 5$, với mỗi giá trị y cho ta 1 giá trị $x = 37 \in [5; 37]$ thỏa đề bài.

Vậy có 1 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa bài toán.

Câu 3. Chọn D

Có $2 \cdot 2^x + x + \sin^2 y = 2^{\cos^2 y} \Leftrightarrow 2^{x+1} + x + 1 = 2^{\cos^2 y} + \cos^2 x$ (3).

Đặt $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow$ Hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì vậy phương trình (3) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(\cos^2 x) \Leftrightarrow x+1 = \cos^2 x \Leftrightarrow x = -\sin^2 x \Rightarrow x \leq 0$.

Mà x là số nguyên dương. Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn.

Câu 4. Chọn B

Ta có: $3^{x+1} + x + 1 = 3^y + y \Leftrightarrow f(x+1) = f(y)$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó $f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y \Rightarrow x = y-1$

Vì $0 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y-1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 2021$

Mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{1; 2; 3; \dots; 2021\}$

Vậy có 2021 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với phương trình :

$$m + \sqrt{m+2^x} = 2^{2x} \Leftrightarrow (m+2^x) + \sqrt{m+2^x} = 2^{2x} + 2^x \quad (1)$$

Ta có $\sqrt{m+2^x} \geq 0, 2^x > 0$. Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^2 + t$ trên $[0; +\infty)$.

$$f'(t) = 2t + 1 \geq 0, \forall t \in [0; +\infty)$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $[0; +\infty)$ do đó (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{m+2^x}) = f(2^x) \Leftrightarrow \sqrt{m+2^x} = 2^x$

$$\Leftrightarrow m = 2^{2x} - 2^x.$$

Đặt $a = 2^x, a > 0$. Ta có $\Leftrightarrow m = g(a) = a^2 - a$.

a	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(a)$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{4}$ mà m nguyên dương nhỏ hơn 2018 nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 2017\}$. Vậy có 2017 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Chọn D

$$\text{Ta có } x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 - 19y^3 + 3x^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3 - 27y^3 + 3x^2 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3 + 3x^2 + 6y = 27y^3 + 9y$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2y)^3 + 3(x^2 + 2y) = (3y)^3 + 3.3y \quad (2)$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + 3t$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Vì vậy, } (2) \Leftrightarrow f(x^2 + 2y) = f(3y) \Leftrightarrow x^2 + 2y = 3y \Leftrightarrow x^2 = y.$$

$$\text{Theo giả thiết: } 0 \leq y \leq 100 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 100 \Leftrightarrow -10 \leq x \leq 10.$$

Vì x nguyên nên $x \in \{-10; -9; -8; \dots; 0; \dots; 8; 9; 10\}$. Với mỗi x xác định duy nhất giá trị $y = x^2$.

Vậy có 21 cặp $(x; y)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 7. Chọn B

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{(y+1)+1} = \sqrt{y+1}\sqrt{(x-2)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(y+1)+1}}{\sqrt{y+1}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2+1}}{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(y+1)+1}{y+1}} = \sqrt{\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}} \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t}}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có:

$$f'(t) = -\frac{1}{2t^2\sqrt{1+\frac{1}{t}}} < 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên } (0; +\infty).$$

$$(2) \Leftrightarrow f(y+1) = f((x-2)^2) \Leftrightarrow y+1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow y = (x-2)^2 - 1$$

$$\text{Do } x, y \in [3; 48] \text{ nên } 3 \leq (x-2)^2 - 1 \leq 48 \Leftrightarrow 4 \leq (x-2)^2 \leq 49 \Leftrightarrow 2 \leq x-2 \leq 7 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 9.$$

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, với mỗi giá trị x cho ta 1 giá trị y thỏa mãn đề bài.

Vậy có 6 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề bài.

Câu 8. Chọn B

$$\text{Ta có: } \log_2\left(\frac{x+1}{2}\right) + x = 4^{\sin^4 y + \cos^4 y} - \sin^2 2y \Leftrightarrow \log_2(x+1) + x - 1 = 4^{\sin^4 y + \cos^4 y} - \sin^2 2y$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} - 4\sin^2 y \cos^2 y + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} - 4\sin^2 y \cos^2 y + 2(\sin^2 y + \cos^2 y)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)} + 2(\sin^4 y + \cos^4 y) \quad (2).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t > 0.$$

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(t)$ đồng biến $(0; +\infty)$.

$$\text{Vì vậy } (2) \Leftrightarrow f(\log_2(x+1)) = f(2(\sin^4 y + \cos^4 y)) \Leftrightarrow x+1 = 2^{2(\sin^4 y + \cos^4 y)}.$$

$$\text{Ta có: } \sin^4 y + \cos^4 y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \text{ nên } 1 \leq 2(\sin^4 y + \cos^4 y) \leq 2$$

$\Rightarrow 2 \leq x+1 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$. Mà x là số nguyên dương $\Rightarrow x \in \{1, 2, 3\}$.

Vậy có 3 giá trị x thỏa mãn.

Câu 9. Chọn D

Ta có: $2^{x^2} - 2^y = y - x^2 \Leftrightarrow 2^{x^2} + x^2 = 2^y + y \Leftrightarrow f(x^2) = f(y)$, với $f(t) = 2^t + t$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(x^2) = f(y) \Leftrightarrow x^2 = y$. $P = x - 2y = x - 2x^2 \leq \frac{1}{8}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{8}$ đạt được khi $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{16}$.

Câu 10. Chọn B

Từ điều kiện đề bài và $\frac{x+y}{1-xy} > 0; 1-xy \neq 0 \Rightarrow x+y > 0; 1-xy > 0$. Khi đó

$$\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x+y) + (x+y) = \log_3(1-xy) + (1-xy) \quad (1).$$

Xét hàm số $g(t) = \log_3 t + t, (t > 0)$ có $g'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra $g(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Vậy phương trình (1) $\Leftrightarrow x+y = 1-xy \Rightarrow y = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow P = 2x + \frac{1-x}{1+x}$.

Xét hàm số $f(x) = 2x + \frac{1-x}{x+1}$ với $x \in [0; 1]$. Ta có $f'(x) = 2 + \frac{-2}{(x+1)^2}$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases} \text{ và } f(0)=1; f(1)=2 \Rightarrow \min_{[0;1]} f(x) = 1.$$

Câu 11. Chọn D

Ta có: $3(9^y + 2y) = x + \log_3(x+1)^3 - 2$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 9^y + 6y = x + 3\log_3(x+1) - 2 \Leftrightarrow 3^{2y+1} + 3(2y+1) = (x+1) + 3\log_3(x+1) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + 3t$. Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 + 3 > 0, \forall t$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow f(2y+1) = f(\log_3(x+1)) \Leftrightarrow 2y+1 = \log_3(x+1) \Leftrightarrow x = 3^{2y+1} - 1.$$

$$\text{Vì } 0 \leq x \leq 2020 \text{ nên } 0 \leq 3^{2y+1} - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{\log_3 2021 - 1}{2}$$

Do y nguyên nên $y \in \{0; 1; 2\}$.

$\Rightarrow (x; y) \in \{(2; 0); (26; 1); (242; 2)\}$ do đó có 3 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 12. Chọn A

Ta có $f(-x) = 2020^{-x} - 2020^x$.

$-f(x) = -(2020^x - 2020^{-x}) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ vậy nên.

$$f(m+1) + f\left(\frac{m}{2020} - 2020\right) < 0 \Leftrightarrow f(m+1) < f\left(-\frac{m}{2020} + 2020\right). \quad (*)$$

Lại có $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Nên } (*) \Leftrightarrow m+1 < \frac{-m}{2020} + 2020 \Leftrightarrow m < \frac{2019 \cdot 2020}{2021}. \text{ Vậy } m_0 = 2018.$$

Câu 13. Chọn B

$$9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy-5})x + \sqrt{3xy-5} = 0 \Leftrightarrow 27x^3 + 6x - 3xy\sqrt{3xy-5} + 3\sqrt{3xy-5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x)^3 + 2(3x) = (\sqrt{3xy-5})^3 + 2\sqrt{3xy-5} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do

$$\text{đó } (*) \Leftrightarrow f(3x) = f(\sqrt{3xy-5}) \Leftrightarrow 3x = \sqrt{3xy-5} \Rightarrow x \geq 0 \text{ và } 9x^2 = 3xy - 5.$$

Với $x = 0$ không thỏa mãn.

$$\begin{aligned} \text{Với } x > 0 \text{ thì } P &= x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2) = x^3 + y^3 + 6xy + (9x^2 + 3)(x + y - 2) \\ &= x^3 + y^3 + 6xy + (3xy - 2)(x + y - 2) = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 2(x + y) + 4 \\ &= (x + y)^3 - 2(x + y) + 4. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } x + y = x + \frac{9x^2 + 5}{3x} = 4x + \frac{5}{3x} \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}. \text{ Đặt } t = x + y \text{ thì } t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(t) = t^3 - 2t + 4 \text{ với } t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}. \text{ Khi đó } g'(t) = 3t^2 - 2 > 0, \forall t \geq \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do đó } g(t) \geq g\left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}. \text{ Vậy } \min P = \frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}.$$

Câu 14. Chọn D

$$\text{Ta có : } \log \frac{x+1}{3y+1} \leq 9y^4 + 6y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{xy+y}{3y^2+y} \leq (9y^4 + 6y^3 + y^2) - (x^2y^2 + 2xy \cdot y + y^2)$$

$$\Leftrightarrow \log(xy+y) - \log(3y^2+y) \leq (3y^2+y)^2 - (xy+y)^2$$

$$\Leftrightarrow \log(xy+y) + (xy+y)^2 \leq \log(3y^2+y) + (3y^2+y)^2 \quad (*)$$

Xét hàm $f(t) = \log t + t^2$ với $t \in (0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 2t > 0 \forall t \in (0; +\infty). \text{ Suy ra } f(t) \text{ là hàm đồng biến trên } t \in (0; +\infty).$$

$$(*) \Leftrightarrow f(xy+y) \leq f(3y^2+y) \Leftrightarrow xy+y \leq 3y^2+y \Leftrightarrow x \leq 3y.$$

Vì $y \leq 2020$ nên ta có các trường hợp sau

$$y=1 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}$$

$$y = 2 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

.....

$$y = 1000 \Rightarrow x \in \{1; 2; \dots; 3000\}$$

Vậy số cặp nghiệm thỏa mãn điều kiện đề bài là: $3 + 6 + 9 + \dots + 3000 = 1501500$.

Câu 15. Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $2^{\frac{x+1}{x}} \geq 2^{2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}} = 4, \forall x > 0$ (1)

Mặt khác ta có: $14 - (y-2)\sqrt{y+1} = 14 - (y+1)\sqrt{y+1} + 3\sqrt{y+1}$.

Đặt $t = \sqrt{y+1} \geq 1$. Xét hàm: $f(t) = -t^3 + 3t + 14, t \geq 1$ có $f'(t) = -3t^2 + 3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	16	$-\infty$

$$\Rightarrow f(t) \leq 16 \Rightarrow \log_2 [14 - (y-2)\sqrt{y+1}] \leq \log_2 16 = 4 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} x = \frac{1}{x} \\ t = \sqrt{1+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Vậy: $P = |1 - 2(x+y)| = 1$.

Câu 16. Chọn C

Ta có $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y \Leftrightarrow 2^{\log_2(x+1)} + \log_2(x+1) = 2^{3y} + 3y$ (1)

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(\log_2(x+1)) = f(3y) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3y \Leftrightarrow x = 2^{3y} - 1$

Với $0 \leq x \leq 2018 \Leftrightarrow 1 \leq 8^y \leq 2019 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_8 2019 \approx 3.7$.

Vì $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$. Rõ ràng với y nguyên thì x nguyên.

Vậy có 4 cặp số x, y nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. Chọn D

Ta có: $2(2^{a^2+b^2+c^2} - 1) + (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 4^{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow 2^{a^2+b^2+c^2+1} + a^2 + b^2 + c^2 + 1 = 2^{2a+2b+2c} + (2a+2b+2c)$$

Xét hàm $f(t) = 2^t + t$ trên $\mathbb{R}$

Ta có, $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình đã cho có dạng $f(a^2+b^2+c^2+1) = f(2a+2b+2c)$.

Suy ra: $2a + 2b + 2c = a^2 + b^2 + c^2 + 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 2 (*)$

Ta lại có, $P = \frac{3a+2b+c}{a+b+c} \Leftrightarrow (P-3)a + (P-2)b + (P-1)c = 0 (**)$

Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ lấy $M(a; b; c)$.

Theo (*) ta có M thuộc mặt cầu tâm $I(1; 1; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Theo (**) thì M thuộc mặt phẳng (α) có phương trình $(P-3)x + (P-2)y + (P-1)z = 0$.

Tồn tại bộ $(a; b; c)$ khi và chỉ khi tồn tại M (mặt cầu và mặt phẳng có điểm chung).

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } d(I; (\alpha)) &\leq R \text{ hay } \frac{|3P-6|}{\sqrt{(P-3)^2 + (P-2)^2 + (P-1)^2}} \leq \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow (3P-6)^2 \leq 2 \cdot [(P-3)^2 + (P-2)^2 + (P-1)^2] \\ &\Leftrightarrow 3P^2 - 12P + 8 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \leq P \leq \frac{6+2\sqrt{3}}{3}. \text{ Vậy } S = \{1; 2; 3\}. \end{aligned}$$

Câu 18. Chọn D

Điều kiện $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Ta có $\log x+1 = 2 \Leftrightarrow x+1 = 10^2 \Leftrightarrow x = 99$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = 99$.

Câu 19. Chọn D

Ta có $2^a = 3 \Rightarrow a = \log_2 3$.

Tương tự $b = \log_3 4, c = \log_4 5, d = \log_5 6$

$\Rightarrow abcd = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 = \log_2 6 \Rightarrow P = 2^{\log_2 6} = 6$

Câu 20. Chọn C

Đặt $2^x = 5^y = 10^{-z} = t \ (t > 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = t^{\frac{1}{x}} \\ 5 = t^{\frac{1}{y}} \\ 10 = t^{\frac{-1}{z}} \end{cases} \Rightarrow t^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = t^{\frac{-1}{z}} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0.$$

Câu 21. Chọn A

Đặt $\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 6^t \\ x+y = 9^t \end{cases}$.

Mà $4^t \cdot 9^t = (6^t)^2 \Rightarrow x(x+y) = y^2 \Leftrightarrow x^2 + xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \ (l) \\ \frac{x}{y} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \ (t/m) \end{cases}$.

Câu 22. Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a^{x+1} = \frac{a}{b} \\ b^{2y} = \frac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\log_a b \\ y = \frac{1}{2}(-1 + \log_b a) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-x-1}{2x} \Rightarrow 2xy = -x-1.$$

$$\text{Khi đó } P = x^2 + y^2 + y = (x+y)^2 - 2xy + y = \left(x+y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x+y = -\frac{1}{2} \\ 2xy = -x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{-\sqrt{2}-1}{2} \end{cases}.$$

Câu 23. Chọn B

$$\text{Đặt } 2018^a = 2019^b = 2020^c = k \Rightarrow \begin{cases} a = \log_{2018} k \\ b = \log_{2019} k \\ c = \log_{2020} k \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra } P = \frac{\log_{2018} k}{\log_{2019} k} + \frac{\log_{2019} k}{\log_{2020} k} = \log_{2018} 2019 + \log_{2019} 2020.$$

Câu 24. Chọn B

$$\log_3(x^2 + 2y) = 1 + \log_3 4 = \log_3 3 + \log_3 4 = \log_3 12 \Rightarrow x^2 + 2y = 12$$

$$\text{Ta có: } 16 = x^2 + 4 + 2y \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 4} + 2y \geq 4x + 2y \geq 2\sqrt{4x \cdot 2y} = 2\sqrt{8} \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{xy} \leq \sqrt{8}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x^2 = 4, x > 0, y > 0 \\ 4x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}. \text{ Vậy } \min P = \sqrt{8}.$$

Câu 25. Chọn C

$$\text{Đặt } a^x = b^y = c^{\frac{z}{2}} = \sqrt{abc} = t \quad (t > 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = t^{\frac{1}{x}} \\ b = t^{\frac{1}{y}} \\ c = t^{\frac{2}{z}} \\ abc = t^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 - \frac{2}{z}.$$

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - z^2 = 2 - \frac{2}{z} - z^2 = 2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z} + z^2\right).$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô - si cho ba số dương } \frac{1}{z}; \frac{1}{z}; z^2 \text{ ta có: } \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + z^2 \geq 3 \Rightarrow P \leq -1.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{z} = z^2 \Leftrightarrow z = 1. \text{ Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ bằng } -1.$$

Câu 26. Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2020^{2019(x^2-y+4)} &= \frac{4x+y}{(x+2)^2} \Leftrightarrow 2020^{2019[(x+2)^2-(4x+y)]} = \frac{4x+y}{(x+2)^2} \Leftrightarrow \frac{2020^{2019(x+2)^2}}{2020^{2019(4x+y)}} = \frac{4x+y}{(x+2)^2} \\ &\Leftrightarrow 2020^{2019(x+2)^2} (x+2)^2 = 2020^{2019(4x+y)} (4x+y)(1). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2020^{2019t}t$ với $t > 0$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 2020^{2019t} + 2020^{2019t}t \ln 2020^{2019} > 0 \forall t > 0.$$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow (x+2)^2 = 4x+y \Leftrightarrow y = x^2 + 4.$$

$$\text{Nên } P = y - 2x = x^2 + 4 - 2x = (x-1)^2 + 3 \geq 3. \min P = 3 \text{ khi } \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}.$$

Câu 27. Chọn A

Điều kiện $1-xy > 0$.

$$\text{Ta có: } 3^{x+y+2xy-2} = \frac{2(1-xy)}{x+y} \Leftrightarrow x+y+2xy-2 = \log_3 \frac{2(1-xy)}{x+y}.$$

$$\Leftrightarrow \log_3 [2(1-xy)] + 2(1-xy) = \log_3 (x+y) + (x+y)(*).$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = t + \log_3 t \text{ với } t > 0 \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 3} > 0.$$

$$(*) \Leftrightarrow f(2(1-xy)) = f(x+y) \Leftrightarrow 2(1-xy) = x+y \Leftrightarrow y = \frac{2-x}{2x+1}.$$

$$\text{Khi đó } 1-xy > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{2x+1} > 0 \text{ (luôn đúng).}$$

$$\text{Ta có } P = x + 5y = x + 5 \frac{2-x}{2x+1}. \text{ Đặt } f(x) = x + 5 \frac{2-x}{2x+1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{25}{(2x+1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2.$$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$			

$$\text{Vậy } P_{\min} = 2 \text{ đạt được khi } \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}.$$

Câu 28. Chọn D

$$\text{Ta có } (2b-1)^2(b+1) \geq 0 \Rightarrow 3b-1 \leq 4b^3 \text{ và từ điều kiện bài toán suy ra } \log_a b > 1.$$

Từ đó suy ra

$$P \geq 3 \log_a b + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} - 3 = \frac{3 \log_a b \cdot (\log_a b - 3)^2}{(\log_a b - 1)^2} + 9 \geq 9$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

$$\text{Vậy } \min P = 9.$$

Câu 29. Chọn A

Ta có: $a, b, c > 1$ và $x, y, z > 0$ nên $a^x; b^y; c^z; \sqrt[3]{abc} > 1$

$$\text{Do đó: } a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(1 + \log_a b + \log_a c) \\ y = \frac{1}{3}(\log_b a + 1 + \log_b c) \\ z = \frac{1}{3}(\log_c a + \log_c b + 1) \end{cases}$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} P &= x + y + z = \frac{1}{3}(1 + \log_a b + \log_a c + \log_b a + 1 + \log_b c + \log_c a + \log_c b + 1) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (3 + \log_a b + \log_a c + \log_b a + \log_b c + \log_c a + \log_c b) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (3 + \log_a b + \log_b c + \log_c a + \log_a c + \log_c b + \log_b a) \end{aligned}$$

Mặt khác $a, b, c > 1$ nên $\log_a b, \log_b c, \log_c a, \log_a c, \log_c b, \log_b a > 0$

$$\text{Suy ra: } P \geq \frac{1}{3}(3 + 3\sqrt{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} + 3\sqrt{\log_a c \cdot \log_c b \cdot \log_b a}) = 3.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} \log_a b = \log_b c = \log_c a \\ \log_a c = \log_c b = \log_b a \\ a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b = \log_b c = \log_c a \\ \frac{1}{\log_c a} = \frac{1}{\log_b c} = \frac{1}{\log_a b} \\ a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ x = y = z = 1 \end{cases}$$

Vậy $\min P = 3 \in (2; 4)$.

Câu 30. Chọn D

$$\text{Theo bài ra ta có: } a^x = b^y = \sqrt[4]{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a^x = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}} \\ b^y = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{x-\frac{1}{4}} = b^{\frac{1}{4}} \\ b^{y-\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \log_a b \\ y - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \log_b a \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } P = x + 4y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_a b + 1 + \log_b a = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \log_a b + \log_b a.$$

Đặt $t = \log_a b$. Vì $a, b > 1$ nên $\log_a b > \log_a 1 = 0$. Suy ra: $t = \log_a b > 0$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{t} \geq \frac{5}{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}t \cdot \frac{1}{t}} = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}.$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$ khi $\frac{1}{4}t + \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = 2$ hay $\log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$.

$$\text{Suy ra: } a^x = a^{2y} = \sqrt[4]{a^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Khi đó: $m = 9, n = 4 \Rightarrow T = 85$.

Câu 31. Chọn B

Với điều kiện: $x > -1, y > -3 \Rightarrow x+1 > 0, y+3 > 0$. Ta có:

$$\log_2(y+3)(x+1) + \frac{xy+3x+y+2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \log_2(y+3) + \log_2(x+1) + (y+3) - \frac{1}{x+1} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \log_2(y+3) + (y+3) = \log_2 \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \quad (1).$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t + t$ ($t > 0$), $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên

khoảng $(0; +\infty)$. Do đó: $(1) \Leftrightarrow y+3 = \frac{1}{x+1}$.

$$\text{Khi đó: } P = x + 3y + 10 = x + 3\left(\frac{1}{x+1} - 3\right) + 10 = x + 1 + \frac{3}{x+1} \geq 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x+1 + \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow 3 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 1, (\text{vì } x > -1).$$

$$\text{Vậy: } \min P = 2\sqrt{3}.$$

Câu 32. Chọn B

Đặt $\log_b a = t$.

Với điều kiện: $1 > a > b > \frac{1}{4}$ khi đó: $0 = \log_b 1 < \log_b a < \log_b b = 1 \Rightarrow t \in (0; 1)$

$$\text{Ta có: } b^2 - b + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow b - \frac{1}{4} \leq b^2 \Rightarrow \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) \geq \log_a b^2 \Rightarrow \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) \geq \frac{2}{t}.$$

$$\log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b} = \frac{1}{2(\log_b a - 1)} = \frac{1}{2(t-1)}. \text{ Do đó } P = \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b} \geq \frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}.$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = \frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)} \text{ với } t \in (0; 1) \text{ có } f'(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{2(1-t)^2}.$$

$$\text{Với } t \in (0; 1) \text{ ta có: } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Do: } \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}\right) = +\infty; \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}\right) = +\infty.$$

Lập BBT của hàm số $f(t) = \frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}$ với $t \in (0; 1)$ ta có:

x	0	$\frac{2}{3}$	1
$f'(t)$		- 0 +	
$f(t)$	$+\infty$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta tìm được $\min f(t) = \frac{9}{2}$ tại $t = \frac{2}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{9}{2}$.

Câu 33. Chọn B

$$\text{Ta có: } xy \leq 4y - 1 \Leftrightarrow 4y \geq xy + 1 \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 4y \geq 2\sqrt{xy} \text{ nên: } \sqrt{\frac{x}{y}} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq 4.$$

$$\text{Xét } P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln \frac{x+2y}{y} = 12 + 6 \cdot \frac{y}{x} + \ln \left(\frac{x}{y} + 2 \right).$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y}, 0 < t \leq 4. \text{ Suy ra: } P = f(t) = 12 + \frac{6}{t} + \ln(t+2).$$

$$\text{Ta có: } f'(t) = -\frac{6}{t^2} + \frac{1}{t+2} = \frac{t^2 - 6t - 12}{t^2 \cdot (t+2)} = \frac{(t-3)^2 - 21}{t^2 \cdot (t+2)}.$$

$$\text{Với } 0 < t \leq 4 \text{ thì } -3 < t-3 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (t-3)^2 < 9 \text{ nên } (t-3)^2 - 21 < 0, \forall t \in (0; 4].$$

$$\text{Do đó: } f'(t) < 0. \text{ Hàm số } f(t) \text{ nghịch biến trên } (0; 4].$$

$$\text{Suy ra: } f(t) \geq f(4), \forall t \in (0; 4]. \text{ Hay } P \geq f(4) = 12 + \frac{6}{4} + \ln 6 \Leftrightarrow P \geq \frac{27}{2} + \ln 6.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{27}{2} + \ln 6. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } a = \frac{27}{2}; b = 6 \text{ nên } ab = 81.$$

Câu 34. Chọn B

$$\text{Ta có } a^x = \sqrt[3]{ab} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(1 + \log_a b), b^y = \sqrt[3]{ab} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(1 + \log_b a).$$

$$P = x + 3y = \frac{1}{3}(1 + \log_a b) + 1 + \log_b a = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \log_a b + \frac{1}{\log_a b}.$$

$$\text{Đặt } \log_a b = t, \text{ do } 1 < a \leq b \leq a^3 \Rightarrow 1 \leq \log_a b \leq 3 \Rightarrow t \in [1; 3] \Rightarrow P = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} + \frac{1}{t}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} + \frac{1}{t}; \text{ với } t \in [1; 3].$$

$$f'(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{3} \\ t = -\sqrt{3} \end{cases}. \text{ Do } t \in [1; 3] \Rightarrow t = \sqrt{3}.$$

$$f(1) = f(3) = \frac{8}{3}; f(\sqrt{3}) = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \max_{[1; 3]} f(t) = \frac{8}{3}. \text{ Vậy giá trị lớn nhất của } P \text{ bằng } \frac{8}{3}.$$

Câu 35. Chọn B

Biến đổi yêu cầu của bài toán ta được:

$$P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b} = \sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}} + \sqrt{\frac{\log_3 b}{\log_3 2}} = \sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}} + \sqrt{\frac{1 - \log_2 a}{\log_3 2}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\log_2 3}} + \sqrt{\log_2 3} \cdot \sqrt{1-t} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{\log_2 3}} - \frac{\sqrt{\log_2 3}}{2\sqrt{1-t}}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-t} = \log_2 3 \sqrt{t} \Leftrightarrow 1-t = t \cdot \log_2^2 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{1 + \log_2^2 3}.$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{1 + \log_2^2 3}\right) = \sqrt{\log_2 3 + \log_3 2} \Rightarrow \min P = \sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}.$$

Câu 36. Chọn A

$$\text{Đặt } \log_{16} x = \log_{20} y = \log_{25} \frac{2x-y}{3} = t \ (t > 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 16^t \\ y = 20^t \\ \frac{2x-y}{3} = 25^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot 16^t - 20^t}{3} = 25^t \Leftrightarrow 2 \cdot 16^t - 20^t = 3 \cdot 25^t \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{2t} + \left(\frac{5}{4}\right)^t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{4}\right)^t = \frac{2}{3} \ (N) \\ \left(\frac{5}{4}\right)^t = -1 \ (L) \end{cases}$$

Vậy $\frac{y}{x} = \left(\frac{20}{16}\right)^t = \left(\frac{5}{4}\right)^t = \frac{2}{3}$.

Câu 37. Chọn D

$$\text{Đặt: } t = \log_9 p = \log_{12} q = \log_{16} (p+q) \ (t > 0) \text{ ta có } \begin{cases} p = 9^t \\ q = 12^t \\ p+q = 16^t \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } 9^t + 12^t = 16^t \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^t = \left(\frac{4}{3}\right)^{2t}.$$

$$\text{Đặt } x = \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{q}{p} > 0 \text{ phương trình trở thành: } x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do } x > 0 \text{ nên suy ra } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \text{ Vậy } \frac{q}{p} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Câu 38. Chọn A

$$\text{Điều kiện: } x > y \geq 0. \text{ Đặt: } \log_2 (x+y) = \log_3 (x-y) = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 2^t \\ x-y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2^t + 3^t}{2} \\ y = \frac{2^t - 3^t}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y \geq 0 \Rightarrow \frac{2^t - 3^t}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 2^t \geq 3^t \Leftrightarrow t \leq 0$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 0 < 2^t \leq 1 \\ 0 < 3^t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < 2^t + 3^t \leq 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{2^t + 3^t}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1; x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow y = 0. \text{ Vậy } x + y = 1.$$

Câu 39. Chọn B

$$P = \frac{\log_2 \frac{x}{128}}{\log_2 x + 1} - \log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x - \log_2 128}{\log_2 x + 1} - 2 \log_2 x = \frac{\log_2 x - 7}{\log_2 x + 1} - 2 \log_2 x.$$

Đặt $t = \log_2 x$ ($0 \leq t \leq 3$). Ta có: $P = \frac{t-7}{t+1} - 2t$ trên $[0; 3]$.

$$P' = \frac{8}{(t+1)^2} - 2, P' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	1	3	$+\infty$
P'		+	0	-
P			-5	
			-7	
				$-\infty$

Giá trị lớn nhất của biểu thức là $b = -5$, Giá trị lớn nhất của biểu thức là $a = -7$. Khi đó $ab = 35$.

Câu 40. Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_2 (x - y) &= 1 + 2 \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 x(x - y) = 1 + \log_2 y^2 \Leftrightarrow \log_2 x(x - y) = \log_2 2y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - xy &= 2y^2 \Leftrightarrow (x - 2y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = -y(L) \end{cases}. \end{aligned}$$

Xét $x = 2y$, mà $x \leq 2020 \Rightarrow 2y \leq 2020 \Leftrightarrow y \leq 1010$, kết hợp điều kiện ta có $y \in \{1; 2; \dots; 1010\}$.

Vậy có 1010 giá trị của y , tương ứng với có 1010 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 41. Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \log_2 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{x} \right) = 6x - 4x^2 \Leftrightarrow \log_2 (4x^2 - 4x + 1) - \log_2 x = 6x - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (4x^2 - 4x + 1) + (4x^2 - 4x + 1) = \log_2 x + (2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x - 1)^2 + (2x - 1)^2 = \log_2 (2x) + 2x \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty).$$

$$(*) \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{cases}.$$

Do

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow 2x_1 - x_2 = 2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{3-3\sqrt{5}}{4} = \frac{3}{4}(1-\sqrt{5})$$

$$\text{Vậy } a=1, b=5 \Rightarrow P=a+b=6.$$

Câu 42. Chọn D

Điều kiện $\sin x > 0, \cos x > 0$.

$$\text{Đặt } u = 2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x) \text{ ta có } \begin{cases} \cot^2 x = 3^u \\ \cos x = 2^u \end{cases}$$

$$\text{Vì } \cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} \text{ nên suy ra } \frac{(2^u)^2}{1-(2^u)^2} = 3^u \Leftrightarrow (2^u)^2 = 3^u \cdot (1-(2^u)^2) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^u + 4^u - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(u) = \left(\frac{4}{3}\right)^u + 4^u - 1 \text{ ta có: } f'(u) = \left(\frac{4}{3}\right)^u \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 4^u \ln 4 > 0, \forall u \in \mathbb{R}.$$

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $f(u) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Để thấy $f(-1) = 0$ suy ra phương trình (1) có nghiệm duy nhất $u = -1$

$$u = -1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện suy ra nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. Mà $x \in (0; 2020\pi)$ nên

$$-\frac{1}{6} < k < \frac{6059}{6} \text{ ta chọn } k \in \{0; 1; 2; \dots; 1009\}$$

Khi đó số nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0; 2020\pi)$ là 1010.

Câu 43. Chọn A

Điều kiện $x + y > 0$. Đặt $\log_5(x + y) = t \Leftrightarrow x + y = 5^t$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} 5^x = t + y \\ 5^t = x + y \end{cases} \Leftrightarrow 5^t + t = 5^x + x$$

Xét hàm số $f(u) = 5^u + u \Rightarrow f'(u) = 5^u \ln 5 + 1 > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến với $\forall u \in \mathbb{R}$

Ta có: $f(t) = f(x) \Rightarrow t = x$. Khi đó: $5^x = x + y \Leftrightarrow y = 5^x - x$

$$\text{Đặt } g(x) = 5^x - x \Rightarrow g'(x) = 5^x \ln 5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_5(\ln 5)$$

x	$-\infty$	$-\log_5(\ln 5)$	$+\infty$
$g'(x)$			
$g(x)$			

$\frac{1}{\ln 5} + \log_5(\ln 5)$

Để phương trình có nghiệm thì $y \geq \frac{1}{\ln 5} + \log_5(\ln 5) \approx 0,917$

Mà $|y| \leq 2020$ nên có đúng 2020 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 44. Chọn A

Tập xác định: $D = [1; +\infty)$.

$$\log 10x + \log^2 x + 3 \geq m \log 100x \Leftrightarrow m \leq \frac{\log 10x + \log^2 x + 3}{\log 100x} = \frac{\log x + \log^2 x + 4}{\log x + 2}.$$

Đặt $t = \log x$ $x \geq 1 \Rightarrow t \geq 0$, bất phương trình trở thành: $m \leq \frac{t^2 + t + 4}{t + 2}$ (2).

Để bất phương trình ban đầu có nghiệm $[1; +\infty)$ thì bất phương trình (2) có nghiệm $[0; +\infty)$.

Xét $f(t) = \frac{t^2 + t + 4}{t + 2}$ trên $[0; +\infty)$.

Trên $[0; +\infty)$ ta có: $f'(t) = \frac{t^2 + 4t - 2}{(t + 2)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{6}(tm) \\ x = -2 - \sqrt{6}(l) \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2	0	$-2 + \sqrt{6}$	$+\infty$
$f'(t)$		-	+	0	-
$f(t)$				$-3 + 2\sqrt{6}$	

-2 $-\infty$

Bất phương trình (2) có nghiệm $[0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \max_{[0; +\infty)} f(t) \Leftrightarrow m \leq -3 + 2\sqrt{6}$

Mà m nguyên nên $m = \{1\}$. Vậy có 1 giá trị nguyên dương thỏa mãn.

Câu 45. Chọn A

Điều kiện $x + y > 0; x^2 + y^2 \neq 0$.

Ta đặt: $\log_3(x + y) = \log_4(x^2 + y^2) = t$. Ta có $\begin{cases} x + y = 3^t \\ x^2 + y^2 = 4^t \end{cases}$ (1)

Vì $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \Rightarrow (3^t)^2 \leq 2 \cdot 4^t \Rightarrow t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2 \approx 0,85$.

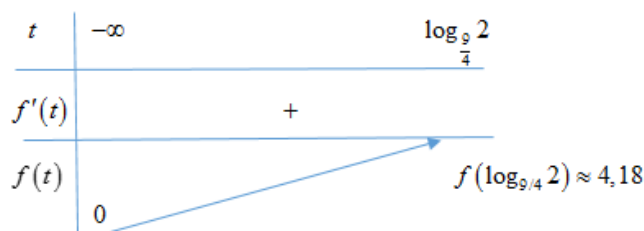
Ta có $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \Rightarrow xy = \frac{9^t - 4^t}{2}$.

Khi đó, $P = x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 27^t - 3 \cdot \frac{9^t - 4^t}{2} = -\frac{1}{2} \cdot 27^t + \frac{3}{2} \cdot 12^t = f(t)$.

Xét $f(t) = -\frac{1}{2} \cdot 27^t + \frac{3}{2} \cdot 12^t$ với $t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2$, có $f'(t) = -\frac{1}{2} \cdot 27^t \cdot \ln 27 + \frac{3}{2} \cdot 12^t \cdot \ln 12$,

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 27^t \cdot \ln 27 = \frac{3}{2} \cdot 12^t \cdot \ln 12 \Leftrightarrow \left(\frac{27}{12}\right)^t = 3 \cdot \frac{\ln 12}{\ln 27} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{27}{12}} \left(3 \cdot \frac{\ln 12}{\ln 27}\right) \approx 1,006(L)$.

Bảng biến thiên:



Gọi T là tập giá trị của P . Từ BBT ta có $\begin{cases} T = (0; 4] \\ P \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \{1; 2; 3; 4\} \in T$ nên suy ra tập giá trị của

P có chứa 4 giá trị nguyên.

Câu 46. Chọn B

Ta có: $2^{x^2+y^2} = 2 \cdot 2^{y-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2} = 2^{y-x+1} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = y - x + 1 \Leftrightarrow y^2 - y = -x^2 - x + 1 (*)$

Cách1:

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm $x \in \mathbb{Z}$ để phương trình (*) có nghiệm y dương

Xét hàm số $f(y) = y^2 - y$ trên $(0, +\infty)$

$f'(y) = 2y - 1; f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên :

y	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(y)$	-	0	+
$f(y)$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Phương trình (*) có nghiệm y dương $\Leftrightarrow -x^2 - x + 1 \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{2}$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0\}$.

Vậy có 2 số nguyên x để phương trình (*) có nghiệm thực y dương.

Cách2:

Yêu cầu của bài toán được thỏa

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \vee y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \text{ ta chọn } x \in \{-1; 0\}.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}; y > 0 \end{cases}, \text{ không tồn tại } x \in \mathbb{Z} \text{ để}$$

 $y > 0.$ Vậy có 2 số nguyên x để phương trình (*) có nghiệm thực y dương.**Câu 47. Chọn D**Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right]$ nên $t \in [-1; 1]$

Ta có phương trình

$$4(m-1)t^2 - 4(m-5)t + 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow (m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(t^2 - t + 1) = t^2 - 5t + 1 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1} \Leftrightarrow m = f(t)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$ với $t \in [-1; 1]$

$$f'(t) = \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2} = \frac{-4(1-t^2)}{(t^2 - t + 1)^2} \leq 0 \quad \forall t \in [-1; 1] \Rightarrow \text{Hàm số nghịch biến trên đoạn } [-1; 1]$$

Phương trình có nghiệm khi đường thẳng $y = m$ có điểm chung với đồ thị hàm số

$$y = f(t) \text{ trên đoạn } [-1; 1] \Leftrightarrow f(1) \leq m \leq f(-1) \Leftrightarrow -3 \leq m \leq \frac{7}{3}$$

Câu 48. Chọn B

$$\text{Đk: } \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Với điều kiện trên ta có: $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x) \Leftrightarrow \log_3(\cot x)^2 = \log_2(\cos x)$

$$\Leftrightarrow \log_3 \cos^2 x - \log_3 \sin^2 x = \log_2(\cos x) \Leftrightarrow \log_3 \cos^2 x - \log_3(1 - \cos^2 x) = \log_2(\cos x)$$

Đặt $t = \log_2 \cos x \Rightarrow \cos x = 2^t$.

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow \log_3 \frac{2^{2t}}{1-2^{2t}} = t \Leftrightarrow 4^t = 3^t - 12^t$ hay $\left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t = 1$

Hàm số $f(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t$ có $f'(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t \cdot \ln \frac{4}{3} + 4^t \cdot \ln 4 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác $f(-1) = 1$ nên $t = -1$ là nghiệm của phương trình.

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $t = -1$.

$$\log_2 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = -\frac{\pi}{3} + k.2\pi \quad (\text{loại do } \sin x > 0) \end{cases}.$$

$$x \in (0; 2020\pi) \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{6059}{6}.$$

Vậy trong khoảng $(0; 2020\pi)$ thì phương trình có 1010 nghiệm.

Câu 49. Chọn B

Cách 1:

Ta có

$$\log_4(x+y+3) = \log_5(x^2+y^2+2x+4y+5) \Leftrightarrow \log_4[(x+1)+(y+2)] = \log_5[(x+1)^2+(y+2)^2]$$

Đặt $X = x+1; Y = y+2$. Khi đó ta có $\log_4(X+Y) = \log_5(X^2+Y^2)$

$$\text{Đặt } t = \log_4(X+Y) = \log_5(X^2+Y^2). \text{ Suy ra ta có hệ phương trình } \begin{cases} X+Y = 4^t \\ X^2+Y^2 = 5^t \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức B.C.S ta có $(X+Y)^2 \leq 2(X^2+Y^2) \Leftrightarrow 16^t \leq 2.5^t \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{16}{5}} 2$.

$$\text{Mặt khác } X^2 = 5^t - Y^2 \leq 5^t \leq 5^{\frac{\log_{16} 2}{5}} \Leftrightarrow -5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \leq X \leq 5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \text{ vì } X \in \mathbb{Z} \Rightarrow X \in \{-1, 0, 1\}$$

$$\text{Tương tự ta có } -5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \leq Y \leq 5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2}.$$

TH1: $X = 0$ ta có $\log_4 Y = \log_5 Y^2$ nghiệm là $Y = 1$. Do đó $x = y = -1$.

TH2: $X = -1$ ta có $\log_4(Y-1) = \log_5(1+Y^2)$

Xét hàm số $f(Y) = \log_4(Y-1) - \log_5(1+Y^2)$ với $-5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \leq Y \leq 5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2}$, ta lấy đạo hàm và lập bảng biến thiên chứng minh được $\max_{\left(-5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \leq Y \leq 5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2}\right)} f(Y) \approx -0,93 < 0$ nên không tồn tại Y .

TH3: $X = 1$ ta có $\log_4(Y+1) = \log_5(1+Y^2)$ ta lập bảng biến thiên và chứng minh phương trình có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $Y = 0$ và một nghiệm còn lại thỏa

$$-5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \leq Y \leq 5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2}.$$

Vậy có 2 giá trị $X \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn là $\begin{cases} X=0 \\ X=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \end{cases}$

Cách 2: (Biểu diễn miền trên đồ thị)

Ta có

$$\log_4(x+y+3) = \log_5(x^2+y^2+2x+4y+5) \Leftrightarrow \log_4[(x+1)+(y+2)] = \log_5[(x+1)^2+(y+2)^2]$$

Đặt $X = x+1$; $Y = y+2$. Khi đó ta có $\log_4(X+Y) = \log_5(X^2+Y^2)$

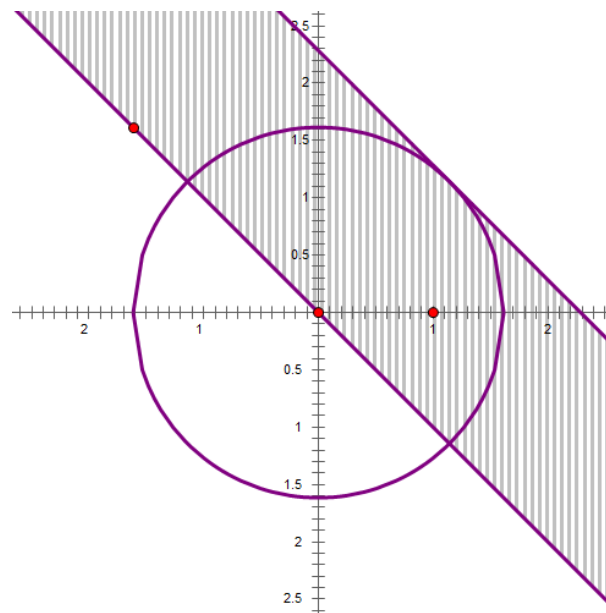
Đặt $t = \log_4(X+Y) = \log_5(X^2+Y^2)$.

Suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} X+Y = 4^t \\ X^2+Y^2 = 5^t \end{cases}$

Theo bất đẳng thức B.C.S ta có $(X+Y)^2 \leq 2(X^2+Y^2) \Leftrightarrow 16^t \leq 2 \cdot 5^t \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{16}{5}} 2$.

Khi đó ta có $\begin{cases} 0 < X+Y = 4^t \leq 4^{\log_{\frac{16}{5}} 2} \\ 0 < X^2+Y^2 = 5^t \leq 5^{\log_{\frac{16}{5}} 2} \end{cases}$

Minh họa bằng hình vẽ:



Vậy có 2 giá trị $X \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn là $\begin{cases} X=0 \\ X=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \end{cases}$.

Câu 50. Chọn D

Phương trình tương đương $2^{2x-y+1} + 2^{-2x+y+1} + 3^{2x-y+1} + 3^{-2x+y+1} = 5^{2x-y+1} + 5^{-2x+y+1}$

Đặt $2x-y=a$, phương trình trở thành

$$2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) = 5(5^a + 5^{-a})$$

Nhận thấy nếu a là nghiệm thì $-a$ cũng là nghiệm nên chỉ cần xét $a \geq 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^t + x^{-t}$, $x > 1$ với số thực t dương tùy ý.

Ta có: $f'(x) = tx^{t-1}(1-x^{-2t})$, do $x > 1$ nên $1-x^{-2t} > 0$ suy ra hàm số này đồng biến trên $(1; +\infty)$

Do đó, ta được bất đẳng thức sau: $2^a + 2^{-a} \leq 3^a + 3^{-a} \leq 5^a + 5^{-a}, \forall a \geq 0$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = 0$.

$$\text{Suy ra } 2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) \leq 5(5^a + 5^{-a})$$

Đẳng thức phải xảy ra nên $a = 0$ hay $2x - y = 0 \Leftrightarrow 2x = y$.

$$\text{Khi đó } P = 2x^2 - y^2 - 2x + 3y + 1 = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x-1)^2 + 3 \leq 3$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 3 khi $x = 1$.

Câu 51. Chọn B

Điều kiện $x + \sqrt{2}y > 0; x^2 + y^2 \neq 0$. Đặt $\log_3(x + \sqrt{2}y) = \log_2(x^2 + y^2) = t$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x + \sqrt{2}y = 3^t \\ x^2 + y^2 = 2^t \end{cases}$$

$$\text{Vì } (x + \sqrt{2}y)^2 \leq 3(x^2 + y^2) \Rightarrow 9^t \leq 3 \cdot 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^t \leq 3 \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{9}{2}} 3.$$

Như vậy $x^2 + y^2 = 2^t \Rightarrow x^2 \leq 2^t \leq 2^{\log_{\frac{9}{2}} 3} \approx 1,65$. Vì x nguyên nên $x^2 \in \{0; 1\}$.

$$\text{Với } x = 0 \text{ ta có hệ } \begin{cases} y = \frac{3^t}{\sqrt{2}} \\ y^2 = 2^t \end{cases}. \text{ Suy ra } \frac{9^t}{2} = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^t = 2 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{9}{2}} 2 \Rightarrow y = \frac{3^{\log_{\frac{9}{2}} 2}}{\sqrt{2}} \approx 1,17.$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ ta có phương trình } \log_3(1 + \sqrt{2}y) = \log_2(1 + y^2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y \approx 0,7686 \end{cases}.$$

$$\text{Với } x = -1 \text{ ta có phương trình } \log_3(\sqrt{2}y - 1) - \log_2(1 + y^2) = 0.$$

Xét hàm số $f(y) = \log_3(\sqrt{2}y - 1) - \log_2(1 + y^2)$. Lập bảng biến thiên, ta chứng minh được $\max f(y) \approx f(1,369) \approx -1,583 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Do đó ta chọn được $x \in \{0; 1\}$. Vậy có 2 giá trị x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 52. Chọn C

Xét hàm số $f(t) = t + e^t \Rightarrow f'(t) = 1 + e^t > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (1).

$$x + \ln x = y + e^y \Leftrightarrow f(\ln x) = f(y) \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$

$$\text{Để } 1 \leq x \leq 2020 \text{ thì } 1 \leq e^y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \ln 2020.$$

Mà y nguyên và $y \in [1; 2020]$ nên $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Với mỗi giá trị $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ta có 1 giá trị x tương ứng thuộc đoạn $[1; 2020]$.

Vậy có 7 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 53. Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. Với điều kiện trên ta có: $\log(10xy) \geq \log(x+y) \Leftrightarrow 10xy \geq x+y$

$$\Leftrightarrow y(10x-1) \geq x > 0 \Rightarrow y \geq \frac{x}{10x-1} \left(\text{do } x > \frac{1}{10} \right)$$

$$\text{Do đó: } S = x + 3y \geq f(x) = x + \frac{3x}{10x-1}; \quad f'(x) = 1 - \frac{3}{(10x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (10x-1)^2 = 3 \Leftrightarrow 10x-1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}+1}{10} \left(\text{do } x > \frac{1}{10} \right).$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta có } \min_{\left(\frac{1}{10}; +\infty\right)} f(x) = f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{5}.$$

$$S = x + 3y \geq f(x) = x + \frac{3x}{10x-1} \geq \min_{\left(\frac{1}{10}; +\infty\right)} f(x) = f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{5} \in \left[0; \frac{4}{3}\right].$$

