

BÀI 6. CẤP SỐ CỘNG

CHƯƠNG 2. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT DÃY SỐ (u_n) LÀ CẤP SỐ CỘNG.

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $A = u_{n+1} - u_n$

- Nếu A là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = A$.
- Nếu A phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

Câu 1. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng này.

Lời giải

Ta có: $u_n - u_{n-1} = (-2n + 3) - [-2(n-1) + 3] = -2$, với mọi $n \geq 2$

Do đó (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 1$ và công sai bằng $d = -2$

Câu 2. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho dãy số (u_n) với $u_n = 4n - 3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng này. Từ đó viết số hạng tổng quát u_n dưới dạng $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Lời giải

Ta có: $u_n - u_{n-1} = (4n - 3) - [4(n-1) - 3] = 4$, với mọi $n \geq 2$

Do đó (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 1$ và công sai bằng $d = 4$

Số hạng tổng quát: $u_n = 1 + 4(n-1)$

Câu 3. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Xác định công sai, số hạng thứ 5, số hạng tổng quát và số hạng thứ 100 của mỗi cấp số cộng sau:

- 4, 9, 14, 19, ...;
- 1, -1, -3, -5, ...

Lời giải

a) $9 - 4 = 5; 14 - 9 = 5$

Suy ra cấp số cộng có $u_1 = 4$, công sai $d = 5$

Số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = 4 + 5(n-1)$

Số hạng thứ 5: $u_5 = 4 + 5(5-1) = 24$

Số hạng thứ 100: $u_{100} = 4 + 5(100-1) = 499$

b) $-1 - 1 = -2; -3 - (-1) = -2$

Suy ra cấp số cộng có $u_1 = 1$, công sai $d = -2$

Số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = 1 + (-2)(n-1)$

Số hạng thứ 5: $u_5 = 1 + (-2)(5-1) = -7$

Số hạng thứ 100: $u_{100} = 1 + (-2)(100-1) = -197$

Câu 4. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số (u_n) sau và xét xem nó có phải là cấp số cộng không. Nếu dãy số đó là cấp số cộng, hãy tìm công sai d và viết số hạng tổng quát của nó dưới dạng $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

- a) $u_n = 3 + 5n$;
- b) $u_n = 6n - 4$;
- c) $u_1 = 2, u_n = u_{n-1} + n$;
- d) $u_1 = 2, u_n = u_{n-1} + 3$.

Lời giải

a) $u_1 = 8; u_2 = 13; u_3 = 18; u_4 = 23; u_5 = 28$

Ta có: $u_n - u_{n-1} = 3 + 5n - [3 + 5(n - 1)] = 5 \forall n \geq 2$

Suy ra dãy số là cấp số cộng có $u_1 = 8$ và công sai $d = 5$

Số hạng tổng quát: $u_n = 8 + 5(n - 1)$

b) $u_1 = 2; u_2 = 8; u_3 = 14; u_4 = 20; u_5 = 26$

Ta có: $u_n - u_{n-1} = 6n - 4 - [6(n - 1) - 4] = 6 \forall n \geq 2$

Suy ra dãy số là cấp số cộng có $u_1 = 2$ công sai $d = 6$

Số hạng tổng quát: $u_n = 2 + 6(n - 1)$

c) $u_1 = 2; u_2 = 4; u_3 = 7; u_4 = 11; u_5 = 16$

Ta có: $u_2 - u_1 = 2 \neq u_3 - u_2 = 3$

Suy ra đây không phải cấp số cộng

d) $u_1 = 2; u_2 = 5; u_3 = 8; u_4 = 11; u_5 = 14$

Ta có: $u_n - u_{n-1} = 3$

Suy ra đây là dãy cấp số cộng có $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$

Số hạng tổng quát: $u_n = 2 + 3(n - 1)$

Câu 5. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó:

- a). Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$
- b). Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$
- c). Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$
- d). Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 10n$

Lời giải

a). Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$

Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - (19n - 5) = 19$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 19$ và số hạng đầu $u_1 = 19 \cdot 1 - 5 = 14$.

b). Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$

Ta có $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 1 - (-3n + 1) = -3$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -3$ và số hạng đầu $u_1 = -3 \cdot 1 + 1 = -2$.

c). Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$

Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 2$, phụ thuộc vào n

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

d). Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 10n$

Ta có $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} + 10(n+1) - [(-1)^n + 10n] = -(-1)^n + 10 - (-1)^n = 10 - 2(-1)^n$, phụ thuộc vào n . Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

Câu 6. Định x để 3 số $10 - 3x, 2x^2 + 3, 7 - 4x$ theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng.

Lời giải

Theo tính chất cấp số cộng ta có: $(10 - 3x) + (7 - 4x) = 2(2x^2 + 3)$

$$\Leftrightarrow 17 - 7x = 4x^2 + 6 \Leftrightarrow 4x^2 + 7x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{11}{4}$$

Câu 7. Một tam giác vuông có chu vi bằng $3a$, và 3 cạnh lập thành một CSC. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a .

Lời giải

Gọi x, y, z theo thứ tự tăng dần của độ dài ba cạnh của tam giác.

Chu vi của tam giác: $x + y + z = 3a$ (1)

Tính chất của CSC có $x + z = 2y$ (2)

Vì tam giác vuông nên có: $x^2 + y^2 = z^2$ (3)

Thay (2) vào (1) được $3y = 3a \Leftrightarrow y = a$, thay $y = a$ vào (2) được: $x + z = 2a \Rightarrow x = 2a - z$

Thay x và y vào (3) được: $(2a - z)^2 + a^2 = z^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 4az = 0 \Leftrightarrow z = \frac{5a}{4} \Rightarrow x = \frac{3a}{4}$

Kết luận độ dài ba cạnh của tam giác thỏa yêu cầu: $\frac{3a}{4}, a, \frac{5a}{4}$.

Câu 8. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một CSC. Tìm số đo các góc đó.

Lời giải

Gọi 3 góc A, B, C theo thứ tự đó là ba góc của tam giác ABC lập thành CSC.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A + B + C = 180 \\ A + C = 2B \\ C = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 90 \\ A - 2B = -90 \\ C = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 30 \\ B = 60 \\ C = 90 \end{cases}$$

DẠNG 2: TÌM SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN, CÔNG SAI CỦA CẤP SỐ CỘNG, TÌM SỐ HẠNG THỨ k CỦA CẤP SỐ CỘNG, TÍNH TỔNG k SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN.

Ta thiết lập một hệ phương trình gồm hai ẩn u_1 và d . Sau đó giải hệ phương trình này tìm được u_1 và d .

Muốn tìm số hạng thứ k , trước tiên ta phải tìm u_1 và d . Sau đó áp dụng công thức: $u_k = u_1 + (k - 1)d$.

Muốn tính tổng của k số hạng đầu tiên, ta phải tìm u_1 và d . Sau đó áp dụng công thức:

$$S_k = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{k[2u_1 + (k - 1)d]}{2}$$

Câu 9. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

Lời giải

Số tiền lương trong 10 năm của anh Nam lập thành một cấp số cộng, gồm 10 số hạng, với số hạng đầu là $u_1 = 100$ và công sai $d = 20$. Tổng các số hạng này là:

$$S_{10} = u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = \frac{10}{2} [2u_1 + (10 - 1)20] = \frac{10}{2} (2 \times 100 + 9 \times 20) = 1900 \quad (\text{triệu đồng})$$

Vậy tổng số tiền lương anh Nam nhận sau 10 năm là 1900 triệu đồng

Câu 10. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Một cấp số cộng có số hạng thứ 5 bằng 18 và số hạng thứ 12 bằng 32. Tìm số hạng thứ 50 của cấp số cộng này.

Lời giải

Gọi số hạng tổng quát của dãy là: $u_n = u_1 + (n - 1)d$ Ta có: $u_5 = u_1 + 4d = 18; u_{12} = u_1 + 11d = 32$

Suy ra $u_1 = 10, d = 2$

Số hạng tổng quát: $u_n = 10 + 2(n - 1)$

Số hạng thứ 50 là: $u_{50} = 108$

Câu 11. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 5 và công sai bằng 2. Hỏi phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để có tổng bằng 2700?

Lời giải

Gọi n là số các số hạng đầu cần lấy tổng, ta có:

$$2700 = S_n = \frac{n}{2} [2 \times 5 + (n - 1) \times 2] = \frac{n}{2} (8 + 2n)$$

Do đó $4n + n^2 - 2700 = 0$. Giải phương trình bậc hai này ta được $n = -54$ (loại) hoặc $n = 50$
 Vậy phải lấy 50 số hạng đầu.

Câu 12. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá của chiếc xe sau n năm là: $u_n = 680 - 55(n - 1)$

Vậy sau 5 năm sử dụng giá của chiếc xe là: $u_5 = 680 - 55(5 - 1) = 460$ (triệu đồng)

Câu 13. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu của cấp số cộng cần lấy tổng, ta có:

$$870 = S_n = \frac{n}{2} [2 \times 15 + (n - 1) \times 3] = \frac{n}{2} (27 + 3n)$$

Do đó $27n + 3n^2 - 1740 = 0$, suy ra $n = 20, n = -29$ (loại)
 Vậy cần phải thiết kế 20 hàng ghế

Câu 14. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

Lời giải

Dân số mỗi năm của thành phố lập thành cấp số cộng có $u_1 = 1200$, công sai $d = 30$

Dân số mỗi năm có dạng tổng quát là: $u_n = 1200 + 30(n - 1)$

Dân số của năm 2030 tức $n = 11$; $u_{11} = 1200 + 30(11 - 1) = 1500$ (nghìn người)

Câu 15. Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$

Lời giải

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \quad (1)$. Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$, ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 3$, công sai $d = 4$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19 \cdot 4 = 79$

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2 \cdot 3 + 19 \cdot 4) = 820$

b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \quad (1)$. Ta cũng áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$:

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công sai $d = 3$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = 1 + 19 \cdot 3 = 58$

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3) = 590$

c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases} \quad (1)$. Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$, $S_n = \frac{n[2u_1 + (n - 1)d]}{2}$ Ta có:

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 14 \\ 6(u_1 + u_{12}) = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 14 \\ 12u_1 + 66d = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{5}{2} \\ d = \frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{5}{2}$, công sai $d = \frac{3}{2}$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = \frac{5}{2} + 19 \cdot \frac{3}{2} = 31$

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10 \left(2 \cdot \frac{5}{2} + 19 \cdot \frac{3}{2} \right) = 335$

d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5d = 8 \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 5d \\ (8 - 5d + d)^2 + (8 - 5d + 3d)^2 = 16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 5d \\ (8 - 4d)^2 + (8 - 2d)^2 = 16 \quad (*) \end{cases}$$

Giải (*): $20d^2 - 96d + 112 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{14}{5} \vee d = 2$

Với $d = \frac{14}{5} \Rightarrow u_1 = -6$

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = -6 + 19 \cdot \frac{14}{5} = \frac{236}{5}$

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10 \left(2 \cdot (-6) + 19 \cdot \frac{14}{5} \right) = 412$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = -2$

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = -2 + 19 \cdot 2 = 36$

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2 \cdot (-2) + 19 \cdot 2) = 340$

Câu 16. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a). $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$ c). $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases}$

d). $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$ e). $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ s_3 = 21 \end{cases}$

Lời giải

Gọi số hạng đầu là u_1 và công sai là d .

a). $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 27 \\ u_1 + 14d = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

b). $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ u_1 - 2d = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

c). $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases} \quad (1)$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 3d - (u_1 + 5d) = -7 \\ u_1 + 7d - (u_1 + 6d) = 2(u_1 + 3d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2 \end{cases}$

d). $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \quad (1)$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - (u_1 + 6d) = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4d = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ (u_1 + 2)(u_1 + 12) = 75 \end{cases} \quad (*)$

(*) $\Leftrightarrow u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 = -17 \end{cases}$

Giải

$$\text{Vậy } \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ s_3 = 21 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } S_3 = 21 \Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 21 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 21 \Leftrightarrow d = 7 - u_1.$$

$$\text{Ta có: } u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 155$$

$$\Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + 7 - u_1)^2 + (u_1 + 14 - 2u_1)^2 = 155 \Leftrightarrow u_1^2 + 49 + (14 - u_1)^2 = 155$$

$$\Leftrightarrow 2u_1^2 - 28u_1 + 90 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 9 \vee u_1 = 5$$

$$\text{Với } u_1 = 9 \Rightarrow d = -2. \text{ Với } u_1 = 5 \Rightarrow d = 2$$

Câu 17. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

$$1) \begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 = 45 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases} \quad 7) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1 u_2 u_3 = 8 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 u_4 = \frac{65}{72} \end{cases}$$

Lời giải

$$1) \begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}(2u_1 + 2d) = 12 \\ \frac{5}{2}(2u_1 + 4d) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2d = 8 \\ 2u_1 + 4d = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 9 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 - d \\ (3 - d)^2 + 3^2 + (3 + d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 - d \\ d^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 - d \\ d = \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } d = 2 \Rightarrow u_1 = 1. \text{ Với } d = -2 \Rightarrow u_1 = 5.$$

$$3) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + u_1 + 3d = 16 \\ u_1^2 + u_1^2 + u_1^2 + u_1^2 = 84 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 16 & (1) \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 84 & (2) \end{cases}$$

Từ $(1) \Rightarrow u_1 = \frac{16-6d}{4} = 4 - \frac{3}{2}d$ thay vào (2) được:

$$\left(4 - \frac{3}{2}d\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}d + d\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}d + 2d\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}d + 3d\right)^2 = 84$$

$$\Leftrightarrow \left(4 - \frac{3}{2}d\right)^2 + \left(4 - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{d}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{3d}{2}\right)^2 = 84 \Leftrightarrow 64 + 5d^2 = 84 \Leftrightarrow d^2 = 4 \Leftrightarrow d = \pm 2$$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = 1$. Với $d = -2 \Rightarrow u_1 = 7$

$$4) \begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}(2u_1 + 4d) = 5 \Leftrightarrow 2u_1 + 4d = 2 \Rightarrow u_1 = 1 - 2d \quad (1) \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d)(u_1 + 3d)(u_1 + 4d) = 45 \quad (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2):

$$\Leftrightarrow (1 - 2d)(1 - 2d + d)(1 - 2d + 2d)(1 - 2d + 3d)(1 - 2d + 4d) = 45$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2d)(1 - d)(1 + d)(1 + 2d) = 45 \Leftrightarrow (1 - 2d)(1 + 2d)(1 - d)(1 + d) = 45$$

$$\Leftrightarrow (1 - 4d^2)(1 - d^2) = 45. \text{ Đặt } t = d^2, t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - 4t)(1 - t) = 45 \Leftrightarrow 4t^2 - 5t - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 4 \text{ (nhận) hoặc } t = -\frac{11}{4} \text{ (loại)} \Leftrightarrow d^2 = 4 \Leftrightarrow d = \pm 2$$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = -3$. Với $d = -2 \Rightarrow u_1 = 5$.

$$5) \begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2u_1 + 3d) = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 - \frac{3}{2}d \\ \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d} + \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d + d} + \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d + 2d} + \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d + 3d} = \frac{25}{24} \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5 - \frac{3}{2}d} + \frac{1}{5 + \frac{3}{2}d} \right) + \left(\frac{1}{5 - \frac{d}{2}} + \frac{1}{5 + \frac{d}{2}} \right) = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{25 - \frac{9d^2}{4}} + \frac{10}{25 - \frac{d^2}{4}} = \frac{25}{24}$$

Đặt: $\frac{d^2}{4} = t; t \geq 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{10}{25 - 9t} + \frac{10}{25 - t} = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{2(25 - t) + 2(25 - 9t)}{(25 - 9t)(25 - t)} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow \frac{100 - 20t}{(25 - 9t)(25 - t)} = \frac{5}{24}$$

$$\Leftrightarrow 24(20 - 4t) = (25 - 9t)(25 - t) \Leftrightarrow 9t^2 - 154t + 145 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{145}{9} \vee t = 1$$

$$\bullet t = \frac{145}{9} \Leftrightarrow d^2 = \frac{145}{9} \Rightarrow d = \pm \frac{\sqrt{145}}{3}$$

Với $d = \frac{\sqrt{145}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 - \frac{\sqrt{145}}{2}$. Với $d = -\frac{\sqrt{145}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 + \frac{\sqrt{145}}{2}$

$$\bullet t=1 \Leftrightarrow d^2=1 \Leftrightarrow d=\pm 1$$

$$d=1 \Rightarrow u_1=5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2} \quad d=-1 \Rightarrow u_1=5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}.$$

Với

$$6) \begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=20 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2=170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1+d+u_1+2d+u_1+3d+u_1+4d=20 \\ u_1^2+u_1^2+u_1^2+u_1^2+u_1^2=170 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1+10d=20 \Rightarrow u_1=4-2d \\ u_1^2+(u_1+d)^2+(u_1+2d)^2+(u_1+3d)^2+(u_1+4d)^2=170 \quad (2) \end{cases}$$

Thay: $u_1=4-2d$ vào (2) được:

$$(4-2d)^2+(4-2d+d)^2+(4-2d+2d)^2+(4-2d+3d)^2+(4-2d+4d)^2=170$$

$$\Leftrightarrow (4-2d)^2+(4-d)^2+4^2+(4+d)^2+(4+2d)^2=170$$

$$\Leftrightarrow 80+10d^2=170 \Leftrightarrow d^2=9 \Leftrightarrow d=\pm 3.$$

$$\text{Với } d=3 \Rightarrow u_1=4-6=-2. \quad \text{Với } d=-3 \Rightarrow u_1=4+6=10.$$

$$7) \begin{cases} u_1+u_2+u_3=-12 \\ u_1u_2u_3=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1+d+u_1+2d=-12 \\ u_1u_2u_3=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1+3d=-12 \\ u_1(u_1+d)(u_1+2d)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=-4-d \quad (1) \\ u_1(u_1+d)(u_1+2d)=8 \quad (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được: $(-4-d)(-4-d+d)(-4-d+2d)=8 \Leftrightarrow (4+d)(d-4)=2$

$$\Leftrightarrow d^2-16=2 \Leftrightarrow d^2=18 \Leftrightarrow d=\pm 3\sqrt{2}$$

$$\text{Với } d=3\sqrt{2} \Rightarrow u_1=-4-3\sqrt{2}. \quad \text{Với } d=-3\sqrt{2} \Rightarrow u_1=-4+3\sqrt{2}.$$

$$8) \begin{cases} u_1+u_5=\frac{5}{3} \\ u_3u_4=\frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1+4d=\frac{5}{3} \\ (u_1+2d)(u_1+3d)=\frac{65}{72} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\frac{5}{6}-2d \\ \left(\frac{5}{6}-2d+2d\right)\left(\frac{5}{6}-2d+3d\right)=\frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\frac{5}{6}-2d \\ \frac{5}{6}+d=\frac{13}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\frac{1}{3} \\ d=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Câu 18. Xác định số hạng đầu, công sai và số hạng thứ n của các cấp số cộng sau, biết rằng:

$$a). \begin{cases} S_{12}=34 \\ S_{18}=45 \end{cases} \quad b). \begin{cases} u_5=10 \\ S_{10}=5 \end{cases} \quad c). \frac{S_{20}}{5}=\frac{S_{10}}{3}=\frac{S_5}{2} \quad d). \begin{cases} S_{20}=2S_{10} \\ S_{15}=3S_5 \end{cases}$$

Lời giải

$$a). \begin{cases} S_{12}=34 \\ S_{18}=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12(2u_1+11d)}{2}=34 \\ \frac{18(2u_1+17d)}{2}=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u_1+33d=17 \\ 2u_1+17d=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\frac{32}{9} \\ d=-\frac{1}{9} \end{cases}$$

$$u_n=u_1+(n-1)d=\frac{33}{9}-\frac{1}{9}n$$

$$\begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 10 \\ \frac{10(2u_1 + 9d)}{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 10 \\ 2u_1 + 9d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 86 \\ d = -19 \end{cases}$$

b).

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 105 - 19n$$

$$\frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} \\ \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{20(2u_1 + 19d)}{10} = \frac{10(2u_1 + 9d)}{6} \\ \frac{10(2u_1 + 9d)}{6} = \frac{5(2u_1 + 4d)}{4} \end{cases}$$

c).

$$\begin{cases} 2u_1 + 55d = 0 \\ 2u_1 + 24d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow u_n = 0$$

$$\begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20(2u_1 + 19d) = 20(2u_1 + 9d) \\ 15(2u_1 + 14d) = 15(2u_1 + 4d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ u_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 \in \mathbb{R}$$

d).

Câu 19. Cho cấp số cộng: $u_1; u_2; u_3; \dots$ có công sai d .

1). Biết $u_2 + u_{22} = 40$. Tính S_{23}

2). Biết $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$. Tính $u_6 + u_{11} \quad u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}$

4). Biết $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$. Tính: S_{19}

5). Biết $u_{23} + u_{57} = 29$. Tính: $u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1$

Lời giải

1). Biết $u_2 + u_{22} = 40$. Tính S_{23}

Ta có: $u_2 + u_{22} = 40 \Leftrightarrow u_1 + d + u_1 + 21d = 40 \Leftrightarrow 2u_1 + 22d = 40$

Mà $S_{23} = \frac{23}{2}(2u_1 + 22d) = \frac{23}{2} \cdot 40 = 460$.

2). Biết $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$. Tính $u_6 + u_{11} \quad u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}$

Có: $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$.

$$\Leftrightarrow u_1 + u_1 + 3d + u_1 + 6d + u_1 + 9d + u_1 + 12d + u_1 + 15d = 147.$$

$$\Leftrightarrow 6u_1 + 45d = 147 \Leftrightarrow 2u_1 + 15d = 49.$$

Ta có: $u_6 + u_{11} = u_1 + 5d + u_1 + 10d = 2u_1 + 15d = 49$.

Ta có: $u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16} = u_1 + u_1 + 5d + u_1 + 10d + u_1 + 15d = 4u_1 + 30d = 2(2u_1 + 15d) = 2 \cdot 49 = 98$.

4). Biết $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$. Tính: S_{19}

Có: $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$

$$\Leftrightarrow u_1 + 3d + u_1 + 7d + u_1 + 15d = 224 \Leftrightarrow 4u_1 + 36d = 224 \Leftrightarrow u_1 + 9d = 56$$

Ta có: $S_{19} = \frac{19}{2}(2u_1 + 18d) = 19(u_1 + 9d) = 19 \cdot 56 = 1064$.

5). Biết $u_{23} + u_{57} = 29$. Tính: $u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1$

Ta có: $u_{23} + u_{57} = 29 \Leftrightarrow u_1 + 22d + u_1 + 56d = 29 \Leftrightarrow 2u_1 + 78d = 29$.

Ta có: $3u_1 + u_{10} + u_{70} + u_{157} = 3u_1 + u_1 + 9d + u_1 + 69d + u_1 + 156d$
 $= 6u_1 + 234d = 3(2u_1 + 78d) = 3.29 = 87$

Câu 20. Tìm 3 số hạng liên tiếp của 1 cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

Lời giải

Gọi 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng: $u_1; u_2; u_3$. Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 & (1) \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 293 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 27 \Leftrightarrow 3u_1 + 3d = 27 \Leftrightarrow d = 9 - u_1.$$

$$(2) \Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 293$$

$$\Leftrightarrow u_1^2 + (u_1 + 9 - u_1)^2 + (u_1 + 18 - 2u_1)^2 = 293 \Leftrightarrow u_1^2 + 81 + (18 - u_1)^2 = 293$$

$$\Leftrightarrow 2u_1^2 - 36u_1 - 112 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 14 \vee u_1 = 4$$

$$\text{Với } u_1 = 14 \Rightarrow d = -5 \Rightarrow u_2 = 9; u_3 = 4.$$

$$\text{Với } u_1 = 4 \Rightarrow d = 5 \Rightarrow u_2 = 9; u_3 = 14.$$

Ta có thể gọi 3 số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - d, u_2 = u, u_3 = u + d$ với công sai d

Câu 21. Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có tổng bằng 20 và tích của chúng là 384.

Lời giải

Gọi 4 số hạng của cấp số cộng cần tìm là u_1, u_2, u_3, u_4 có công sai d .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 20 & (1) \\ u_1 u_2 u_3 u_4 = 384 & (2) \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:

$$(1) \Leftrightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + u_1 + 3d = 20$$

$$\Leftrightarrow 4u_1 + 6d = 20 \Rightarrow u_1 = \frac{20 - 6d}{4} = 5 - \frac{3}{2}d.$$

$$(2) \Leftrightarrow u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d)(u_1 + 3d) = 384.$$

$$\Leftrightarrow \left(5 - \frac{3}{2}d\right) \left(5 - \frac{3}{2}d + d\right) \left(5 - \frac{3}{2}d + 2d\right) \left(5 - \frac{3}{2}d + 3d\right) = 384$$

$$\Leftrightarrow \left(5 - \frac{3}{2}d\right) \left(5 + \frac{3}{2}d\right) \left(5 - \frac{d}{2}\right) \left(5 + \frac{d}{2}\right) = 384 \Leftrightarrow \left(25 - \frac{9d^2}{4}\right) \left(25 - \frac{d^2}{4}\right) = 384.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{d^2}{4}, t \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (25 - 9t)(25 - t) = 384 \Leftrightarrow 9t^2 - 250t + 241 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{241}{9} \vee t_2 = 1.$$

Cách 2: gọi $u_1 = u - 3d, u_2 = u - d, u_3 = u + d, u_4 = u + 3d$

$$\text{Ta có: } u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 20 \Leftrightarrow 4u = 20 \Rightarrow u = 5.$$

$$\text{Và: } u_1 u_2 u_3 u_4 = 384. \Leftrightarrow (u - 3d)(u - d)(u + d)(u + 3d) = 384$$

$$\Leftrightarrow (u^2 - 9d^2)(u^2 - d^2) = 384 \Leftrightarrow (25 - 9d^2)(25 - d^2) = 384.$$

Đặt: $t = d^2, t \geq 0$.

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 250t + 241 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{241}{9}$$

Với $t = 1 \Leftrightarrow d^2 = 1 \Leftrightarrow d = \pm 1$.

$$\bullet d = 1 \Rightarrow u_1 = 2; u_2 = 4; u_3 = 6; u_4 = 8$$

$$\bullet d = -1 \Rightarrow u_1 = 8; u_2 = 6; u_3 = 4; u_4 = 2$$

$$\text{Với: } t = \frac{241}{9} \Rightarrow d = \pm \frac{\sqrt{241}}{3}$$

$$\bullet d = \frac{\sqrt{241}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 - \sqrt{241}; u_2 = 5 - \sqrt{241}; u_3 = 5 + \frac{\sqrt{241}}{3}; u_4 = 5 + \sqrt{241}$$

$$\bullet d = -\frac{\sqrt{241}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 + \sqrt{241}; u_2 = 5 + \frac{\sqrt{241}}{3}; u_3 = 5 - \frac{\sqrt{241}}{3}; u_4 = 5 - \sqrt{241}.$$

Ta có thể gọi 4 số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - 3d, u_2 = u - d, u_3 = u + d, u_4 = u + 3d$ với công sai $2d$.

Câu 22. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.

Lời giải

Gọi ba số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - d, u_2 = u, u_3 = u + d$ với công sai là d :

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u = 15 \\ (u - d)^2 + u^2 + (u + d)^2 = 83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ d^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ d = \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } d = 2 \Rightarrow u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7$$

$$\text{Với } d = -2 \Rightarrow u_1 = 7, u_2 = 5, u_3 = 3$$

Câu 23. Tìm 5 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

Lời giải

Gọi năm số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - 2d, u_2 = u - d, u_3 = u, u_4 = u + d, u_5 = u + 2d$ với công sai là d :

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 40 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 480 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5u = 40 \\ (u - 2d)^2 + (u - d)^2 + u^2 + (u + d)^2 + (u + 2d)^2 = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ d^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ d = \pm 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } d = 4 \Rightarrow u_1 = 0, u_2 = 4, u_3 = 8, u_4 = 12, u_5 = 16$$

$$\text{Với } d = -4 \Rightarrow u_1 = 16, u_2 = 12, u_3 = 8, u_4 = 4, u_5 = 0$$

Câu 24. Tìm 4 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

Lời giải

Gọi bốn số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - 3d, u_2 = u - d, u_3 = u + d, u_4 = u + 3d$ với công sai là $2d$:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 10 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 30 \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u = 10 \\ (u - 3d)^2 + (u - d)^2 + (u + d)^2 + (u + 3d)^2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{5}{2} \\ d^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ d = \pm 4 \end{cases}$$

Câu 25. Một CSC có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của CSC đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

Lời giải

Gọi $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ là bảy số hạng liên tiếp của CSC với công sai d .

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_4 = 11 \\ u_3 - u_5 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 11 \\ (u_1 + 2d) - (u_1 + 5d) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 11 \\ d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 17 \\ d = -2 \end{cases}$$

Kết luận: $u_1 = 17, u_2 = 15, u_3 = 13, u_4 = 11, u_5 = 9, u_6 = 7, u_7 = 5$.

Câu 26. Một CSC có 7 số hạng mà tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 28, tổng số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 140. Tìm CSC đó.

Lời giải

Gọi $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ là bảy số hạng liên tiếp của CSC với công sai d .

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_3 + u_5 = 28 \\ u_5 + u_7 = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 28 \\ u_1 + 4d + u_1 + 6d = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 28 \\ 2u_1 + 10d = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -70 \\ d = 28 \end{cases}$$

Câu 27. Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được CSC có tám số hạng. Tìm CSC đó

Lời giải

Gọi $3, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, 24$ là CSC cần tìm, ta có:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_8 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 + 7d = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy $u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 9, u_4 = 12, u_5 = 15, u_6 = 18, u_7 = 21, u_8 = 24$

Câu 28. Bốn số nguyên lập thành CSC, biết tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$. Tìm bốn số đó.

Lời giải

Gọi bốn số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - 3d, u_2 = u - d, u_3 = u + d, u_4 = u + 3d$ với công sai là $2d$:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u = 20 \\ \frac{1}{u - 3d} + \frac{1}{u - d} + \frac{1}{u + d} + \frac{1}{u + 3d} = \frac{25}{24} \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} u=5 \\ \frac{1}{5-3d} + \frac{1}{5+3d} + \frac{1}{5-d} + \frac{1}{5+d} = \frac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ \frac{10}{25-9d^2} + \frac{10}{25-d^2} = \frac{25}{24} \end{cases} \quad (2)$$

Giải (2): đặt $t = d^2$, điều kiện $t \geq 0$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2}{25-9t} + \frac{2}{25-t} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow \frac{100-20t}{(25-9t)(25-t)} = \frac{5}{24} \Leftrightarrow 24(20-4t) = (25-9t)(25-t)$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 154t + 145 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{145}{9}$$

Vì các số hạng là những số nguyên nên chọn $t = 1$.

Câu 29. Tính các tổng sau:

a). $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1)$

b). $S = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) + (3n+1) + (3n+4)$

c). $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

Lời giải

a). Ta có dãy số $1, 3, 5, \dots, (2n-1), (2n+1)$ là cấp số cộng với công sai $d = 2$ và $u_1 = 1$, số hạng tổng quát $u_m = 2n+1$. Do đó có $2n+1 = u_1 + (m-1)d \Leftrightarrow 2n+1 = 1 + (m-1).2 \Rightarrow m = n+1$.

$$\text{Vậy } S_{n+1} = \frac{(n+1)(2u_1 + nd)}{2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2}$$

b). Ta có dãy số $1, 4, 7, \dots, (3n-2), (3n+1), (3n+4)$ là cấp số cộng với công sai $d = 3$ và $u_1 = 1$, số hạng tổng quát $u_m = 3n+4$. Do đó có: $3n+4 = u_1 + (m-1)d \Leftrightarrow 3n+4 = 1 + (m-1).3 \Rightarrow m = n+2$

$$\text{Vậy } S_{n+2} = \frac{m(2u_1 + (m-1)d)}{2} = \frac{(n+2)[2 + (n+1)3]}{2} = \frac{(n+2)(3n+5)}{2}$$

c). $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

$$= (100 - 99)(100 + 99) + (98 - 97)(98 + 97) + \dots + (2 - 1)(2 + 1)$$

$$= 199 + 195 + \dots + 3$$

Ta có dãy số $3, 7, \dots, 195, 199$ là cấp số cộng với công sai $d = 4$, số hạng đầu tiên $u_1 = 3$ và số hạng n là $u_n = 199$.

$$\text{Do đó có } 199 = 3 + (n-1).4 \Rightarrow n = 50$$

$$\text{Vậy } S = \frac{50(2.3 + 49.4)}{2} = 5050$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>