

Câu 1 (7,0 điểm).

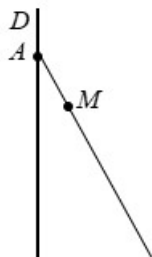
1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3 [x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị?

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - 3\sqrt{x+3} = 3\sqrt{y-5} & (1) \\ \sqrt{x^2 + 16(y-x)} + y = 2\sqrt{xy} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 2 (4,0 điểm)

1) Người ta muốn xây một đoạn đường AB (như hình vẽ) và đoạn đường này phải đi qua điểm M . Biết rằng vị trí điểm M cách OD $125m$ và cách OE $1km$. Giả sử chi phí để làm $100m$ đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành được con đường?



2) Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hai bạn A, B mỗi người chọn ngẫu nhiên một tập con của S. Tính xác suất để tập con mà A và B chọn được có đúng 3 phần tử chung.

Câu 3 (1,5 điểm).

Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^3 + y^3 + z^3 + 8(xy^2 + yz^2 + zx^2)$$

Câu 4 (6,0 điểm). Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a , tâm O . Đường

thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SB = 3a$ và $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BC và SA sao cho $BM = \frac{2}{3}BC, SN = \frac{1}{3}SA$.

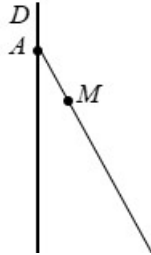
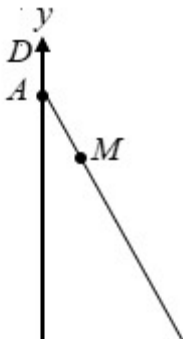
a. Tính thể tích khối chóp $S.MND$ theo a .

b. Gọi φ là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) . Tính $\cos \varphi$.

Câu 5 (1,5 điểm).

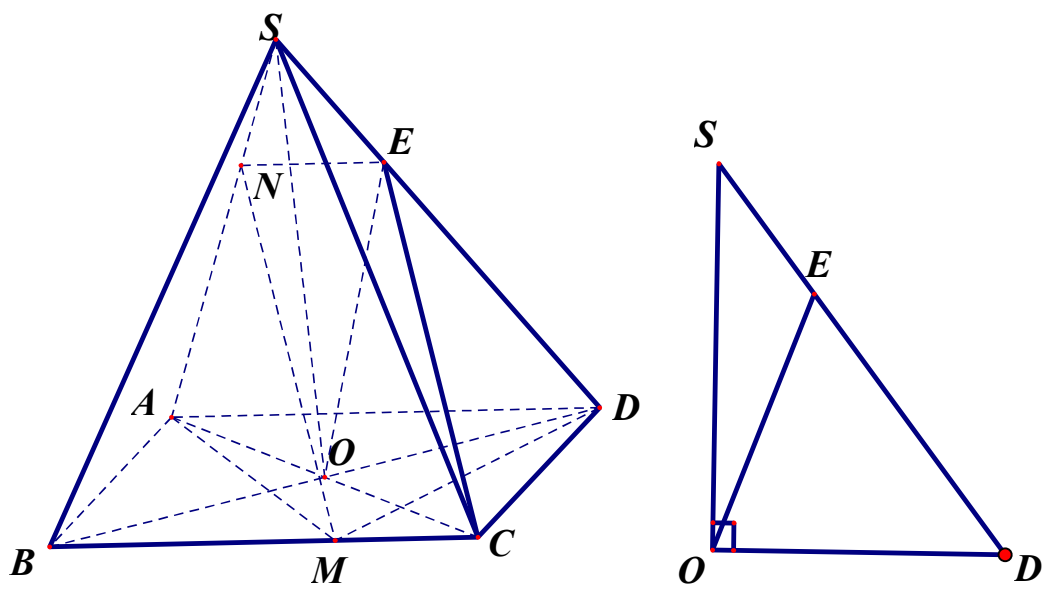
Hai hình chóp tam giác đều có chung chiều cao, đỉnh của hình chóp này trùng với tâm của đáy hình chóp kia. Mỗi cạnh bên của hình chóp này đều cắt một cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên có độ dài l của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao một góc α . Cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao một góc β . Tìm thể tích phần chung của hai hình chóp.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1.1 (4 đ)	1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3 [x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6], \forall x \in \mathbb{R}.$ Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x)$ có đúng 5 điểm cực trị?	
	Do hàm số $y = g(x) = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số $y = g(x)$ là hàm số chẵn nên đồ thị của hàm số $y = g(x)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng. Ta xét với $x > 0 \Rightarrow y' = g'(x) = f'(x) = (x-1)^3 [x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6]$ Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + (4m-5)x + m^2 - 7m + 6 = 0 \end{cases} (*)$	1.0
	Hàm số $y = g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $\text{mãn } x_1 \leq 0 < x_2 \text{ và } x_2 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (4m-5)^2 - 4(m^2 - 7m + 6) > 0 \\ m^2 - 7m + 6 < 0 \\ \begin{cases} m^2 - 7m + 6 = 0 \\ 5 - 4m > 0 \end{cases} \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 6 \\ m \neq 2 \end{cases}$	0.7 5
	Do m nguyên suy ra tập các giá trị của m thỏa mãn là $\{3; 4; 5\}$.	0.2 5
Câu 1.2 (3 đ)	2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 3\sqrt{x+3} = 3\sqrt{y-5} & (1) \\ \sqrt{x^2 + 16(y-x)} + y = 2\sqrt{xy} & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$	
	Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 5 \\ x^2 + 16(y-x) \geq 0 \end{cases}$ Từ phương trình (1) ta có $y - 5 - 3\sqrt{y-5} + x - 3\sqrt{x+3} + 5 = 0$ Đặt $t = \sqrt{y-5} \geq 0$ Khi đó ta có $t^2 - 3t + x - 3\sqrt{x+3} + 5 = 0$ $\Delta_t = 9 - 4(x + 5 - 3\sqrt{x+3}) \geq 0 \Leftrightarrow 4(x+3) - 12\sqrt{x+3} - 1 \leq 0$ $\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x+3} \leq \frac{6+2\sqrt{10}}{4} \Rightarrow x < 16$	0.5
	Mặt khác từ (2) ta có	1.0

	$\sqrt{x^2 + 16(y-x)} - \sqrt{xy} - \sqrt{xy} + y = 0$ $\Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{x-16}{\sqrt{x^2 + 16(y-x)} + \sqrt{xy}} \right) - (x-y) \frac{y}{y + \sqrt{xy}} = 0$ $\Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{x-16}{\sqrt{x^2 + 16(y-x)} + \sqrt{xy}} - \frac{y}{y + \sqrt{xy}} \right) = 0$	
	Do $0 \leq x < 16; y \geq 5 \Rightarrow \frac{x-16}{\sqrt{x^2 + 16(y-x)} + \sqrt{xy}} - \frac{y}{y + \sqrt{xy}} < 0$	0.5
	Với $x = y \Rightarrow 2x = 3(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-5})$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 9\sqrt{x^2 - 2x - 15}$ $\Rightarrow x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 324 = 0$ $\Rightarrow (x-6)^2(x^2 + 3x + 9) = 0$ $\Rightarrow x = 6$ Thử lại thỏa mãn Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (6; 6)$.	1.0
Câu 2.1 (2đ)	1) Người ta muốn xây một đoạn đường AB (như hình vẽ) và đoạn đường này phải đi qua điểm M. Biết rằng vị trí điểm M cách OD $125m$ và cách OE $1km$. Giả sử chi phí để làm $100m$ đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành được con đường? 	
	Để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất thì phải chọn A, B sao cho đoạn thẳng AB là bé nhất. Thiết lập khoảng cách giữa hai điểm A, B và tìm giá trị nhỏ nhất. Chọn hệ tọa độ xOy như hình dưới đây với OD nằm trên tia Oy, $1km$ trên thực tế ứng với 1 đơn vị trên hệ trục tọa độ. Khi đó điểm $M\left(\frac{1}{8}; 1\right)$.  Gọi $B(m; 0), A(0; n)$ ($m, n > 0$). Khi đó ta có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.	0.5

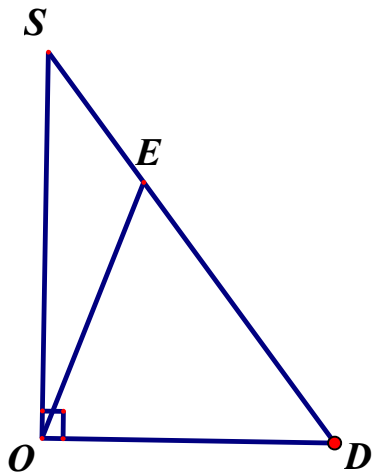
	Do đường thẳng đi qua $M\left(\frac{1}{8}; 1\right)$ nên $\frac{1}{8m} + \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{8m} = \frac{8m-1}{8m} \Rightarrow n = \frac{8m}{8m-1}$.	
	Có $AB^2 = m^2 + n^2 = m^2 + \left(\frac{8m}{8m-1}\right)^2 = f(m)$. Xét hàm số $f(m)$, ta có : $f'(m) = 2m + 2 \cdot \frac{8m}{8m-1} \cdot \frac{-8}{(8m-1)^2} = 2m \cdot \left(1 - \frac{64}{(8m-1)^3}\right); f'(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ 1 - \frac{64}{(8m-1)^3} = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow (8m-1)^3 = 64 \Leftrightarrow m = \frac{5}{8}$	0.5
	$f(m) \geq f\left(\frac{5}{8}\right) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{8 \cdot \frac{5}{8}}{8 \cdot \frac{5}{8} - 1}\right)^2 = \frac{25}{64} + \frac{25}{16} = \frac{125}{64} \Rightarrow AB \geq \sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{5\sqrt{5}}{8}.$ Vậy quãng đường ngắn nhất là $\frac{5\sqrt{5}}{8} (km)$	0.5
	Giá để làm 1 km đường là 1500 triệu đồng = 1,5 tỷ đồng nên khi đó chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là $\frac{5\sqrt{5}}{8} \cdot 1,5 \approx 2,0963$ (tỷ đồng).	0.5
Câu 2.2 (2.0)	2) Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hai bạn A, B mỗi người chọn ngẫu nhiên một tập con của S. Tính xác suất để tập con mà A và B chọn được có đúng 3 phần tử chung.	
	Vì S có 6 phần tử nên số tập con của S là $2^6 = 64$. Mỗi bạn A và B có 64 cách chọn tập con, do vậy số phần tử của không gian mẫu là 64^2 .	1.0
	Ta tìm số cách chọn tập con thỏa mãn yêu cầu. Vì tập con của A và B chọn được có chung 3 phần tử nên các tập con này phải có ít nhất 3 phần tử. Giả sử tập con của A và B gồm $x; y (x, y \geq 3)$ phần tử, khi đó: A có C_6^x cách chọn tập con, lúc này S còn $(6-x)$ phần tử. Chọn ra 3 phần tử gọi là a, b, c có trong tập con gồm x phần tử của A (để làm 3 phần tử chung với tập con mà B chọn) có C_x^3 cách; Lúc này tập con mà B chọn đã có 3 phần tử chung với tập con của A là a, b, c ta cần chọn thêm $(y-3)$ phần tử khác trong $(6-x)$ phần tử còn lại sau khi A đã chọn tập con, có C_{6-x}^{y-3} cách. Vậy có tất cả $C_6^x C_x^3 C_{6-x}^{y-3}$ cách. $\text{Ta có điều kiện: } \begin{cases} x, y \geq 3 \\ y-3 \leq 6-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 6 \\ 3 \leq y \leq 9-x \end{cases}$ Khi đó số cách chọn tập con thỏa mãn điều kiện của bài toán là:	0.7 5

	$\sum_{y=3}^6 C_6^3 \cdot C_3^3 \cdot C_3^{y-3} + \sum_{y=3}^5 C_6^4 \cdot C_4^3 \cdot C_2^{y-3} + \sum_{y=3}^4 C_6^5 \cdot C_5^3 \cdot C_1^{y-3} + \sum_{y=3}^3 C_6^6 \cdot C_6^3 \cdot C_0^{y-3} = 160 + 240 + 120 + 20 = 540$	
	Xác suất cần tính bằng $\frac{540}{64^2} = \frac{135}{1024}$	0.5
Câu 3 (1.5 đ)	Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 + 8(xy^2 + yz^2 + zx^2)$	
	Không mất tính tổng quát giả sử rằng $x \leq y \leq z$. Khi đó $2y \leq x + y + z \Rightarrow y \leq 2$. Và $(y-x)(y-z) \leq 0 \Rightarrow y^2 + xz \leq xy + yz \Rightarrow xy^2 + x^2z \leq x^2y + xyz \Rightarrow xy^2 + x^2z + z^2y \leq x^2y + xyz$ Do đó $xy^2 + x^2z + z^2y \leq x^2y + xyz + z^2y = y(x^2 + xz + z^2) \leq y(x^2 + 2xz + z^2) = y(x+z)^2.$ Hay ta có $xy^2 + x^2z + z^2y \leq y(4-y)^2 \quad (1)$ Tiếp tục đánh giá phần còn lại, ta có $x^3 + y^3 + z^3 = y^3 + (x+z)^3 - 3xz(x+z) \leq y^3 + (x+z)^3 = y^3 + (4-y)^3.$ Vì vậy ta được $x^3 + y^3 + z^3 \leq y^3 + (4-y)^3 \quad (2)$ Từ (1), (2) ta được $P \leq y^3 + (4-y)^3 + 8y(4-y)^2 = 8y^3 - 52y^2 + 80y + 64.$	0.5
	Ký hiệu $f(y) = 8y^3 - 52y^2 + 80y + 64, y \in [0; 2].$ Ta có $f'(y) = 24y^2 - 104y + 80$ $f'(y) = 0 \Leftrightarrow 24y^2 - 104y + 80 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{10}{3} \notin [0; 2]. \end{cases}$ $f(0) = 64; f(1) = 100; f(2) = 80$	0.5

	Vì vậy giá trị lớn nhất của P là 100 khi $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ và các hoán vị.	0.5
Câu 4	Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SB = 3a$ và $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BC và SA sao cho $BM = \frac{2}{3}BC, SN = \frac{1}{3}SA$. a. Tính thể tích khối chóp $S.MND$ theo a. b. Gọi φ là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD). Tính $\cos \varphi$.	
		
4đ	Vì $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{BAD} = 120^\circ$ nên $\triangle ABC$ và $\triangle ADC$ là các tam giác đều cạnh a $SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{9a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{33}}{2}$ $dt(ABCD) = AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ $dt(MAD) = dt(ABCD) - dt(MAB) - dt(MCD)$ $dt(MAD) = dt(ABCD) - \frac{1}{3}dt(ABCD) - \frac{1}{6}dt(ABCD) = \frac{1}{2}dt(ABCD) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $V_{S.AMD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot dt(MAD) = \frac{a^3\sqrt{11}}{8}$ $\frac{V_{S.NMD}}{V_{S.AMD}} = \frac{SN}{SM} = \frac{1}{3}. \text{ Suy ra, } V_{S.NMD} = \frac{a^3\sqrt{11}}{24}$	
2đ	Lấy điểm E trên cạnh SD sao cho $SD = 3SE$. Suy ra, $\begin{cases} NE // MC \\ NE = MC \end{cases}$ Do đó $EC // MN$. Suy ra, góc giữa đường thẳng MN và $mp(SBD)$ bằng góc giữa EC và $mp(SBD)$.	

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $CO \perp BD \Rightarrow CO \perp (SBD)$.

Suy ra góc giữa EC và $mp(SBD)$ là góc $\widehat{CEO}$.



$$\cos \widehat{DSO} = \frac{SO}{SD} = \frac{\sqrt{33}}{6}, SE = \frac{1}{3}SD = a. \text{ Suy ra,}$$

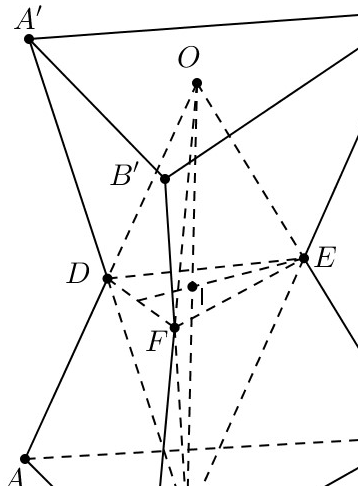
$$OE^2 = SO^2 + SE^2 - 2.SO.SE.\cos \widehat{DSO} = \frac{33a^2}{4} + a^2 - 2.\frac{a\sqrt{33}}{2}.a.\frac{\sqrt{33}}{6} = \frac{15a^2}{4}.$$

$$\text{Do đó, } OE = \frac{a\sqrt{15}}{2} \Rightarrow CE = \sqrt{CO^2 + OE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{15a^2}{4}} = 2a$$

$$\text{Vậy } \cos \widehat{CEO} = \frac{EO}{EC} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Câu 5

Hai hình chóp tam giác đều có chung chiều cao, đỉnh của hình chóp này trùng với tâm của đáy hình chóp kia. Mỗi cạnh bên của hình chóp này đều cắt một cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên l của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao một góc α . Cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao một góc β . Tìm thể tích phân chung của hai hình chóp.



Gọi hai hình chóp đều là $O.ABC$ và $O'.A'B'C'$ với O là tâm tam giác $A'B'C'$, O' là tâm tam giác ABC . Theo bài ra thì OO' là chiều cao chung của hai hình chóp.

0.5

	Gọi D, E, F là các giao điểm của các cặp cạnh bên tương ứng của hai hình chóp. Phần thể tích chung của hai hình chóp là thể tích của khối đa diện $ODEFO'$. Gọi V là thể tích đó thì $V = \frac{1}{3}OO'.S_{\Delta DEF}$; $\Delta OO'C$ vuông tại O' nên $OO' = l \cos \alpha$.	
	Do tính đối xứng nên OO' đi qua tâm I của ΔDEF. Xét $\Delta IOE : OI = IE \cdot \cot \alpha$, $\Delta IO'E : O'I = IE \cdot \cot \beta$. $\Rightarrow OO' = IE(\cot \alpha + \cot \beta) \Rightarrow IE = \frac{OO'}{\cot \alpha + \cot \beta} = \frac{l \cos \alpha}{\cot \alpha + \cot \beta}.$	0.5
	ΔDEF đều có đường cao $h = \frac{3}{2}IE = \frac{3l \cos \alpha}{2(\cot \alpha + \cot \beta)},$ $DF = 2\left(\frac{h}{\tan 60^\circ}\right) = 2\frac{3l \cos \alpha}{2(\cot \alpha + \cot \beta)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3} l \cos \alpha}{(\cot \alpha + \cot \beta)}.$ Vậy $S_{\Delta DEF} = \frac{DF^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}l^2 \cos^2 \alpha}{4(\cot \alpha + \cot \beta)^2}.$	0.5