**Đề tài**

**MỘT SỐ KINH NGHIỆM GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ Ở LỚP 9**

**PHẦN I**

**MỞ ĐẦU**

**I. Lí do chọn đề tài**

Toán học là một trong những môn khoa học cơ bản mang tính trừu tượng, nhưng mô hình ứng dụng của nó rất rộng rãi và gần gũi trong mọi lĩnh vực của đời sống xã hội, trong khoa học lí thuyết và khoa học ứng dụng. Toán học là một môn học giữ một vai trò quan trọng trong suốt bậc học phổ thông. Tuy nhiên, nó lại là một môn học khó, khô khan và đòi hỏi ở mỗi học sinh phải có một sự nỗ lực rất lớn để chiếm lĩnh những tri thức cho mình. Chính vì vậy, đối với mỗi giáo viên dạy toán việc tìm hiểu cấu trúc của chương trình, nội dung của sách giáo khoa, nắm vững phương pháp dạy học. Để từ đó tìm ra những biện pháp dạy học có hiệu quả trong việc truyền thụ các kiến thức Toán học cho học sinh là công việc cần phải làm thường xuyên

 Dạy học sinh học Toán không chỉ là cung cấp những kiến thức cơ bản, dạy học sinh giải bài tập sách giáo khoa, sách tham khảo mà điều quan trọng là hình thành cho học sinh phương pháp chung để nhận dạng và giải được các dạng toán, từ đó giúp các em tích cực hoạt động, độc lập sáng tạo để dần hoàn thiện kĩ năng, kĩ xảo và hoàn thiện nhân cách nói chung.

Giải toán là một trong những vấn đề trung tâm của phương pháp giảng dạy, đặc biệt là đối với những học sinh bậc THCS thì việc giải toán là hình thức chủ yếu của việc học toán.

 Trong những vấn đề về phương trình thì phương trình vô tỉ lại là một trở ngại không nhỏ khiến cho nhiều học sinh không ít ngỡ ngàng và bối rối khi giải các loại phương trình này. Đặc biệt, với những học sinh tham gia các kì thi học sinh giỏi thì đây là một trong những vấn đề quan trọng mà bắt buộc những học sinh này phải biết và làm chủ được phương pháp giải.

 Là một giáo viên giảng dạy Toán bậc THCS, bản thân tôi lại được nhà trường và Phòng Giáo dục trực tiếp giao trách nhiệm bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi Toán tham dự kì thi các cấp Huyện và Tỉnh, tôi cũng rất trăn trở về vấn đề này. Vấn đề đặt ra là làm thế nào có thể giúp cho học sinh giải thành thạo các loại phương trình vô tỉ, và khi gặp bất cứ một dạng toán nào về phương trình vô tỉ các em cũng có thể tìm ra cách giải một cách tốt nhất?

Với những lí do nêu trên; tôi quyết định chọn đề tài “Một số kinh nghiệm giải phương trình vô tỉ” trong khuôn khổ chương trình bậc THCS để rút ra kinh nghiệm trong bồi dưỡng học sinh giỏi.

**II. Mục đích của đề tài:**

Trên cơ sở những kinh nghiệm bồi dưỡng học sinh giỏi và thực tiễn học tập của học sinh, tổng hợp thành dạng bài tập và tìm ra những phương pháp giải phương trình vô tỉ một cách hiệu quả nhất.

**III. Phạm vi nghiên cứu:**

 Để thực hiện đề tài này, tôi thực hiện nghiên cứu tại đơn vị công tác là Trường THCS. Cụ thể là những học sinh tham gia đội tuyển học sinh giỏi Toán của trường và của huyện.

**IV. Cơ sở nghiên cứu:**

 Để thực hiện đề tài này, tôi dựa trên cơ sở các kiến thức đã học ở Trường sư phạm, các tài liệu về phương pháp giảng dạy, các tài liệu bồi dưỡng thường xuyên, sách giáo khoa, sách bài tập, sách tham khảo Toán 9 và tham khảo tài liệu trên mạng internet về các vấn đề thuộc bộ môn Toán bậc trung học cơ sở.

**V. Giới hạn của đề tài**

 Đề tài được sử dụng trong việc bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi cấp huyện, cấp tỉnh với đối tượng là những học sinh giỏi bộ môn Toán 9.

**PHẦN II**

**NỘI DUNG ĐỀ TÀI**

**I. Khảo sát tình hình thực tế**

 Năm học qua, tôi được Trường THCS ….. phân công bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi Toán của trường chuẩn bị kỳ thi cấp huyện và Phòng Giáo dục & Đào tạo …… phân công tăng cường bồi dưỡng các học sinh trong đội tuyển học sinh giỏi Toán các trường. Đây là một cơ hội rất tốt để tôi thực hiện đề tài này; trong các chuyên đề bồi dưỡng, tôi thấy phương trình vô tỉ là một trong những dạng phương trình khó, học sinh ngán ngại và vất vã mỗi khi đụng đến dạng toán này. Trong quá trình giải toán học sinh còn rất lúng túng, kể cả những học sinh trội nhất thì những dạng phương trình vô tỉ cũng là một dạng toán mới.

**II. Một số phương pháp giải phương trình vô tỉ**

***1. Phương pháp nâng lên lũy thừa****:*

*Hình thức chủ yếu là biến đổi để mất đi dấu căn, đưa về dạng quen thuộc để giải*

 ***a) Dạng 1:*** **⇔**

Ví dụ. Giải phương trình:  (1)

Giải: (1) ⇔ 

 Vậy: phương trình đã cho có một nghiệm x = 3

 ***b) Dạng 2:*** 

Ví dụ. Giải phương trình:  (2)

Giải. Với điều kiện x ≥ 2. Ta có:

 (2) ⇔ 

 ⇔ 

 ⇔ 

 ⇔ 

Vậy: phương trình đã cho có một nghiệm x = 6

 **c) Dạng 3:** 

Ví dụ. Giải phương trình:  (3)

Giải: Với điều kiện 7 ≤ x ≤ 12. Ta có:

 (3) ⇔ 

 ⇔ 

 ⇔ 

 ⇔ 4(19x – x2 – 84) = x2 – 8x + 16

 ⇔ 76x – 4x2 – 336 – x2 + 8x – 16 = 0

 ⇔ 5x2 – 84x + 352 = 0

 

 ⇔ x1 = ; x2 = 8

Vậy: phương trình đã cho có hai nghiệm x1 = ; x2 = 8

 ***d) Dạng 4:***

Ví dụ. Giải phương trình: (4)

Giải: Với điều kiện x ≥ 4. Ta có:

 (4) ⇔ 

 ⇔ 

 ⇔ 

 ⇔ 

 ⇔ 45 + 14x + 14 = 0

Với x ≥ 4 ⇒ vế trái của phương trình luôn là một số dương ⇒ phương trình vô nghiệm

***2) Phương pháp trị tuyệt đối hóa:***

 *Cũng là hình thức biến đổi để mất căn, mà chủ yếu là căn bậc 2 để dùng khái niệm trị tuyệt đối giải phương trình*

Ví dụ 1.Giải phương trình:  (1)

Giải: (1) ⇔ 

Với điều kiện x ≤ 8. Ta có:

 (1) ⇔ |x – 2| = 8 – x

 – Nếu x < 2: (1) ⇒ 2 – x = 8 – x (vô nghiệm)

 – Nếu 2 ≤ x ≤ 8: (1) ⇒ x – 2 = 8 – x ⇔ x = 5

HD: Đáp số: x = 5.

Ví dụ 2.Giải phương trình  (2)

Giải: (2) ⇔ 

 ⇔ 

 Đặt y =  (y ≥ 0) ⇒ phương trình đã cho trở thành:

 

 – Nếu 0 ≤ y < 1: y + 1 + 3 – y = 2 – 2y ⇔ y = –1 (loại)

 – Nếu 1 ≤ y ≤ 3: y + 1 + 3 – y = 2y – 2 ⇔ y = 3

 – Nếu y > 3: y + 1 + y – 3 = 2y – 2 (vô nghiệm)

Với y = 3 ⇔ x + 1 = 9 ⇔ x = 8

Vậy: phương trình đã cho có một nghiệm là x = 8

***3) Phương pháp sử dụng bất đẳng thức***

***a) Chứng tỏ tập giá trị của hai vế là rời nhau, khi đó phương trình vô nghiệm***

Ví dụ 1**.** Giải phương trình 

Cách 1. điều kiện x ≥ 1

 Với x ≥ 1 thì: Vế trái:  ⇒ vế trái luôn âm

 Vế phải: ≥ 1 ⇒ vế phải luôn dương

 Vậy: phương trình đã cho vô nghiệm

Cách 2. Với x ≥ 1, ta có:

 

 ⇔ 

 ⇔ 

Vế trái luôn là một số âm với x ≥ 1, vế phải dương với x ≥ 1 ⇒ phương trình vô nghiệm

***b) Sử dụng tính đối nghịch ở hai vế***

Ví dụ 2. Giải phương trình:  (1)

Giải: Ta có (1) ⇔ 

 ⇔ 

Ta có: Vế trái ≥ . Dấu “=” xảy ra ⇔ x = –1

 Vế phải ≤ 5. Dấu “=” xảy ra ⇔ x = –1

Vậy: phương trình đã cho có một nghiệm x = –1

***c) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số*** *(tìm một nghiệm, chứng minh nghiệm đó là duy nhất)*

Ví dụ 1.Giải phương trình: 

Giải: điều kiện x ≥ 

Dễ thấy x = 2 là một nghiệm của phương trình

 – Nếu : VT = . Mà: VP > 

– Nếu x > 2: VP = 2x2 +  > 2.22 +  = . VT < 

 

Vậy: phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là x = 2

Ví dụ 2. Giải phương trình: 

Giải: Thử với x = 2. Ta có:

 

(1) ⇔ 

Nếu x > 2: VT < VP

Nếu x < 2: VT > VP

Vậy: x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình

Ví dụ 3.Giải phương trình: 

Giải: ĐK: x < 2. Bằng cách thử, ta thấy x =  là nghiệm của phương trình. Ta cần chứng minh đó là nghiệm duy nhất. Thật vậy: Với x < :  và  ⇒ .

 Tương tự với  < x < 2: 

Ví dụ 4.Giải phương trình: (1)

Giải: (1) 

 

 Nếu 3x = –(2x + 1) ⇔ x =  thì các biểu thức trong căn ở hai vế bằng nhau. Vậy x =  là một nghiệm của phương trình. Hơn nữa nghiệm của (1) nằm trong khoảng . Ta chứng minh đó là nghiệm duy nhất.

Với : 3x < –2x – 1 < 0

⇒ (3x)2 > (2x + 1)2 ⇒ 

Suy ra: ⇒ (1) không có nghiệm trong khoảng này. Chứng minh tương tự, ta cũng đi đến kết luận (1) không có nghiệm khi 

***d) Sử dụng điều kiện xảy ra dấu “=” ở bất đẳng thức không chặt***

Ví dụ.Giải phương trình 

Giải: điều kiện 

 Áp dụng bất đẳng thức  với ab > 0

Với điều kiện . Nên:

 . Dấu “=” xảy ra ⇔ 

 ⇔ 

***4. Phương pháp đưa về phương trình tích:***

Ví dụ 1.Giải phương trình: 

Giải. ĐK: x ≥ 2. Để ý thấy: (2x + 1) – (x – 2) = x + 3. Do đó, nhân lượng liên hợp vào hai vế của phương trình:

⇔ ⇒ PT vô nghiệm

Ví dụ 2. Giải phương trình:  (1)

Giải. ĐK: | x | ≤ 1: (1) ⇔ 

 ⇔ x1 = 0; x2 = 

Ví dụ 3.Giải phương trình:  (1)

Giải. Chú ý: x4 – 1 = (x – 1)(x3 + x2 + x + 1).

(1) ⇔  ⇔ x = 2

***5) Phương pháp đặt ẩn phụ:***

***a) Sử dụng một ẩn phụ***

Ví dụ 1.Giải phương trình:  (1)

Giải. Đặt  = y (y ≥ 0)

⇒y2 = x + 1 ⇔ x = y2 – 1 ⇔ x2 = (y2 – 1)2

⇒ (2) ⇔ (y2 – 1)2 + y – 1 = 0 ⇔ y(y − 1)(y2 + y − 1) = 0.

Từ đó suy ra tập nghiệm của phương trình là: 

Ví dụ 2. Giải phương trình:  (1)

HD: ĐK: x ≥ 1. Đặt = y

(1) ⇔ 

⇔ y3 + y2 – 2 = 0

⇔ (y – 1)(y2 + 2y + 2) = 0 ⇔ y = 1 ⇔ x = 1

***b) Sử dụng hai ẩn phụ***

Ví dụ 1. Giải phương trình: 2(x2 + 2) = 5 (3)

Giải. Đặt u = , v =  (ĐK: x ≥ −1, u ≥ 0, v ≥ 0). Khi đó:

 u2 = x + 1, v2 = x2 – x + 1, u2v2 = x3 + 1. ⇒ (3) ⇔ 2(u2 + v2) = 5uv ⇔ (2u − v)(u − 2v) = 0

Giải ra, xác định x. Kết quả là: x ∈ 

Ví dụ 2. Giải phương trình:  (1)

Giải. ĐK: x ≥ –2. (1) ⇔ 

Đặt:  = u,  = v (u, v ≥ 0)⇒ u2 – v2 = 3. (1) ⇔ (a – b)(1 + ab) = a2 – b2

⇔ (a – b)(1 – a + ab – b) = 0 ⇔ (a – b)(1 – a)(1 – b) = 0

Giải ra: x = –1 là nghiệm duy nhất

Ví dụ 3. Giải phương trình:  (1)

Giải. ĐK: x ≥ 0. Đặt  = u,  = v (u, v ≥ 0): (1) ⇔ b – a = a2 – b2 ⇔ (a – b)(a + b + 1) = 0

Mà a + b + 1 > 0 ⇒ a = b ⇔ x =  là nghiệm duy nhất của phương trình.

***c) Sử dụng ba ẩn phụ***

Ví dụ 1 Giải phương trình:  (1)

Giải. ĐK: x ≥ 2. (1) ⇔ 

Đặt:  = a,  = b,  = c (a, b, c ≥ 0): (1) ⇔ ab + c = b + ac ⇔ (a – 1)(b – c) = 0

⇔ a = 1 hoặc b = c. Thay ngược trở lại ta được x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình

Ví dụ 2. Giải phương trình : 

Giải.Đặt :  ;  ;  (u ; v ; t ≥ 0)

⇒ x = 2 − u2 = 3 − v2 = 5 − t2 = uv + vt + tu

Từ đó ta có hệ: 

Nhân từng vế của (1), (2), (3) ta có : [ (u + v)(v + t)(t + u) ]2 = 30

Vì u ; v ; t ≥ 0 nên:  (4)

Kết hợp (4) với lần lượt (1) ; (2) ; (3) dẫn đến:

 

Cộng từng vế của (5) ; (6) ; (7) ta có:

 (8)

Kết hợp (8) với lần lượt (5) ; (6) ; (7) ta có:



***d) Sử dụng ẩn phụ đưa về hệ phương trình***

Ví dụ 1. Giải phương trình 

Cách 1: Giải tương tự bài 1. Ta được x = 5

Cách 2: Đặt  và . Ta có hệ: ⇔ ⇔ x = 5.

Ví dụ 2Giải phương trình: 

Giải. ĐK: 0 ≤ x ≤ 25. Đặt  = u ,  (u, v ≥ 0):

⇒Giải ra ta có x = 1 là nghiệm duy nhất.

Ví dụ 3.Giải phương trình: 

Giải. ĐK: –3 ≤ x ≤ 3: Đặt  = u,  = v (u, v ≥ 0)

⇒  ⇔ . Thế ngược trở lại: x = 0 là nghiệm duy nhất.

Ví dụ 4. Giải phương trình: 

Giải. ĐK: – 4 ≤ x ≤ 1. Đặt  (u, v ≥ 0)

⇒  ⇒ 

***6) Giải và biện luận phương trình vô tỉ:***

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình: 

Giải. Ta có: ⇔ 

 – Nếu m = 0: phương trình vô nghiệm

 – Nếu m ≠ 0: . Điều kiện để có nghiệm: x ≥ m ⇔  ≥ m

 + Nếu m > 0: m2 + 4 ≥ 2m2 ⇔ m2 ≤ 4 ⇔ 

 + Nếu m < 0: m2 + 4 ≤ 2m2 ⇔ m2 ≥ 4 ⇔ m ≤ –2

Tóm lại:

 – Nếu m ≤ –2 hoặc 0 < m ≤ 2: phương trình có một nghiệm 

 – Nếu –2 < m ≤ 0 hoặc m > 2: phương trình vô nghiệm

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình với m là tham số: 

*(Đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh năm học 1999 – 2000)*

Giải. Ta có: 

 – Nếu m = 0: phương trình vô nghiệm

 – Nếu m ≠ 0:. Điều kiện để có nghiệm: x ≥ m ⇔ 

 + Nếu m > 0: m2 + 3 ≥ 2m2 ⇔ m2 ≤ 3 ⇔ 

 + Nếu m < 0: m2 + 3 ≤ 2m2 ⇔ m2 ≥ 3 ⇔ m ≤ 

Tóm lại:

 – Nếu  hoặc . Phương trình có một nghiệm: 

 – Nếu  hoặc : phương trình vô nghiệm

Ví dụ 3. Giải và biện luận theo tham số m phương trình: 

Giải. Điều kiện: x ≥ 0

 Nếu m < 0: phương trình vô nghiệm

 Nếu m = 0: phương trình  ⇒ có hai nghiệm: x1 = 0, x2 = 1

 Nếu m > 0: phương trình đã cho tương đương với

 

 

 + Nếu 0 < m ≤ 1: phương trình có hai nghiệm: x1 = m; x2 = 

 + Nếu m > 1: phương trình có một nghiệm: x = m

**II. Kết quả thực hiện:**

 Qua việc áp dụng các nội dung của đề tài này vào việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán, hằng năm trường chọn 03 học sinh dự thi học sinh giỏi cấp huyện môn Toán và đạt được kết quả như sau:

 Năm học: 2015 – 2016: 01 học sinh đạt giải nhì.

 Năm học: 2017 – 2018: 02 học sinh đạt giải khuyến khích.

 Năm học: 2018 – 2019: 01 học sinh đạt giải nhì, 01 học sinh đạt giải ba.

**III. Bài học kinh nghiệm**

 Với những kinh nghiệm khi giảng dạy về giải phương trình vô tỉ trong chương trình của cấp THCS và việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán thuộc chuyên đề này; bản thân tôi đã rút ra được một số bài học kinh nghiệm như sau:

1. Về phía học sinh:

 Để gặt hái được những thành tích cao trong công tác mũi nhọn, học sinh phải biết mình là nhân vật trung tâm trong việc tự học, tự bồi dưỡng, đây là nhân tố giữ vai trò quyết định trong sự thành công hay thất bại của việc học. Chính các em là người học, là người đi thi và là người đem lại những thành tích đó.

2. Về phía giáo viên tham gia trực tiếp công tác bồi dưỡng học sinh giỏi:

- Để giúp cho học sinh có thể gặt hái được những thành công thì sự động viên, quan tâm, giúp đỡ của lãnh đạo ngành, gia đình các em và những giáo viên tham gia làm công tác bồi dưỡng là rất lớn, nhất là đối với học sinh lứa tuổi lớp 9.

 Nhận thức rõ điều đó, mỗi giáo viên làm công tác bồi dưỡng cần phải dành một sự quan tâm đúng mức đến các em, thường xuyên động viên, uốn nắn kịp thời để giúp cho các em có thể có một sự quyết tâm lớn trong công việc học tập của mình. Đặc biệt là với những học sinh tham gia bồi dưỡng bộ môn Toán, đây là một môn học khó, có rất ít học sinh lựa chọn tham gia thi môn này.

- Nếu học sinh giữ vai trò trung tâm trong công tác tự bồi dưỡng học sinh giỏi thì vị trí của người thầy lại giữ vai trò chủ đạo. Toán học là một môn học khó, khô khan và lượng kiến thức rất rộng, vì học sinh đã được học toán từ khi vào lớp 1, tức là các em đã được học toán 9 năm liền. Chính vì vậy, những giáo viên tham gia bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi Toán cần phải có thời gian bồi dưỡng nhiều hơn, phải đầu tư thời gian, công sức nhiều hơn so với những giáo viên tham gia bồi dưỡng những môn học khác. Vấn đề chính nằm ở chỗ thời gian bồi dưỡng, vì học sinh không phải là những cái máy, chúng ta không thể cùng một lúc nhồi nhét vào đầu các em mọi vấn đề mà chúng ta cho rằng các em cần phải học. Việc tiếp thu, học tập của các em là cả một quá trình bền bỉ, lâu dài mới mong đạt được hiệu quả như mong muốn. Ở đây tồn tại hai vấn đề:

Một là, giáo viên giảng dạy toán phải là người có một cái nhìn tổng quát về kiến thức môn toán trong phạm vi giảng dạy của mình, phải là người thường xuyên giải toán, cập nhật thường xuyên những thuật toán, những thủ thuật giải toán hiệu quả. Nói tóm lại là kiến thức của thầy phải vững vàng, thầy thực sự phải là người giỏi toán.

Hai là, cần phải lên được kế hoạch giảng dạy một cách chi tiết, chặt chẽ. Cập nhật thường xuyên những kiến thức mới mà các em vừa học để bồi dưỡng ngay, đặc biệt là phải kích thích được các em say sưa học tập, tự giác học tập, phát huy được những tố chất tốt nhất của các em để công việc học tập của các em đạt được hiệu quả cao.