

Người làm: Nguyễn Thị Thu

Zalo: Nguyễn Thị Thu- số dt zalo: 0393588422

Email: thuhienkhai@gmail.com

CD10: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GTLN, GTNN

Dạng 1.

Câu 1. (HSG 7 huyện Vị Thanh+Bổ Trạch, 2017- 2018)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ nên $0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2$

$$\Rightarrow 0 \leq a+b+c+3 \leq 3c+6 \Rightarrow 0 \leq 4 \leq 3c+6 \quad (\text{vì } a+b+c=1)$$

$$3c \geq -2 \Rightarrow c \geq -\frac{2}{3}$$

Hay

Vậy giá trị nhỏ nhất của c là $-\frac{2}{3}$ khi đó $a+b=\frac{5}{3}$

Câu 2. (HSG 7 huyện Việt Yên, 2017-2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |2013 - x| + |2014 - x|$

Lời giải

Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a+b|$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$

$$P = |2013 - x| + |2014 - x| = |x - 2013| + |2014 - x|$$

Ta có:

$$P \geq |x - 2013 + 2014 - x| = |1| = 1$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2013)(2014 - x) \geq 0$, hay $2013 \leq x \leq 2014$

Vậy $\min P = 1$ khi $2013 \leq x \leq 2014$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thạch Thành, tỉnh Thanh Hoá, 2017-2018)

Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn: $a+3c=2016; a+2b=2017$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+b+c$.

Lời giải

Ta có: $a + 3c = 2016$ (1) và $a + 2b = 2017$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow a = 2016 - 3c$

$$2b - 3c = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1+3c}{2}.$$

Thế vào vế của (2) và (1), ta được

Khi đó:

$$P = a + b + c = (2016 - 3c) + \frac{1+3c}{2} + c = \left(2016 + \frac{1}{2}\right) + \frac{-6c + 3c + 2c}{2} = 2016\frac{1}{2} - \frac{c}{2}$$

Vì a, b, c không âm nên $P = 2016\frac{1}{2} - \frac{c}{2} \leq 2016\frac{1}{2}$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + 3c = 2016 \\ a + 2b = 2017. \end{cases} \quad a = 2016, b = \frac{1}{2}, c = 0$$

hay

$$Max P = 2016\frac{1}{2} \quad a = 2016, b = \frac{1}{2}, c = 0$$

Vậy khi

Câu 4. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá, tỉnh Thanh Hoá, 2017-2018)

$$B = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

Lời giải

$$B = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{x^2 + y^2 + 2 + 1}{x^2 + y^2 + 2} = 1 + \frac{1}{x^2 + y^2 + 2}$$

B lớn nhất khi $x^2 + y^2 + 2$ lớn nhất

$$\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2$$

Với mọi x, y ta có: nhỏ nhất bằng 2, khi

$$x = y = 0, \text{ khi đó } B = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Vậy GTLN $B = 1\frac{1}{2}$ khi $x = y = 0$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá, tỉnh Thanh Hoá, 2017-2018)

$$M = |2012 - x| + |2013 - x|$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức: $|A| + |B| \geq |A + B|$. Dấu “=” xảy ra khi $AB \geq 0$ (*)

Ta có:

$$M = |2012 - x| + |2013 - x| = |2012 - x| + |x - 2013| \geq |2012 - x + x - 2013| = |-1| = 1$$
$$(2012 - x)(x - 2013) \geq 0 \Rightarrow 2012 \leq x \leq 2013$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\text{Vậy } \text{Min} M = 1 \Leftrightarrow 2012 \leq x \leq 2013$$

Câu 6. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường.....2017-2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của biểu thức sau:

$$\text{a) } A = |x+1| + 5 \qquad \text{b) } B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3}$$

Lời giải

$$\text{a) } A = |x+1| + 5$$

Với mọi x , ta có: $|x+1| \geq 0 \Rightarrow A = |x+1| + 5 \geq 5$, dấu “=” xảy ra khi $x = -1$

$$\text{Vậy } \text{Min} A = 5 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{b) } B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3} = 1 + \frac{12}{x^2 + 3}$$

Với mọi x , ta có: $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3 \geq 3 > 0 \Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{12}{x^2 + 3} \leq 5$

Với mọi

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$

$$\text{Vậy } \text{Max} B = 5 \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Tân An, 2017-2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của A , biết: $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$

Lời giải

Với mọi x, y, z ta có: $|7x - 5y| \geq 0; |2z - 3x| \geq 0; |xy + yz + zx - 2000| \geq 0$

$$A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000| \geq 0$$

Nên

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ $|7x - 5y| = |2z - 3x| = |xy + yz + zx - 2000| = 0$

Có:

$$|7x - 5y| = 0 \Rightarrow 7x = 5y \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{7} \quad (1)$$

$$|2z - 3x| = 0 \Rightarrow 2z - 3x = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{3} \quad (2)$$

$$|xy + yz + zx - 2000| = 0 \Rightarrow xy + yz + zx - 2000 = 0 \Rightarrow xy + yz + zx = 2000 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15}$$

Từ (1) và (2)

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = k \Rightarrow x = 10k; y = 14k; z = 15k$$

Đặt (4)

$$\begin{cases} k = 2 \\ k = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20; y = 28; z = 30 \\ x = -20; y = -28; z = -30 \end{cases}$$

Từ (3) và (4), tính được:

$$\text{Min } A = 0 \quad \text{khi và chỉ khi } (x, y, z) = (20; 28; 30) \quad \text{hoặc } (x, y, z) = (-20; -28; -30)$$

Vậy

Câu 8. (HSG 7 huyện Hương Khê, tỉnh Hà Tĩnh, 2017-2018)

Cho a, b, c, d là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a + b|$, dấu bằng xảy ra khi $ab \geq 0$ ta có:

$$|x - a| + |x - d| \geq |x - a| + |d - x| \geq |x - a + d - x| = d - a, \forall x \quad (1)$$

$$|x - b| + |x - c| \geq |x - b| + |c - x| \geq |x - b + c - x| = c - b, \forall x \quad (2)$$

Suy ra $A \geq c + d - a - b$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" ở (1) và (2) xảy ra
 khi $(x - a)(d - x) \geq 0$ và $(x - b)(c - x) \geq 0 \Rightarrow a \leq x \leq d$ và $b \leq x \leq c$.

Vậy: $\text{Min } A = c + d - a - b \Leftrightarrow b \leq x \leq c$

Câu 9. (HSG 7 huyện Mộ Cày, 2017-2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + \sqrt{x} + 1$

Lời giải

ĐKXD: $x \geq 0$

Ta có: $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow P = x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$ (thỏa mãn ĐKXĐ). Vậy $P_{\min} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 10. (HSG 7 huyện Việt Yên, 2017-2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |2013 - x| + |2014 - x|$

Lời giải

Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a + b|$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$

Ta có: $P = |2013 - x| + |2014 - x| = |x - 2013| + |2014 - x|$

$P \geq |x - 2013 + 2014 - x| = |1| = 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2013)(2014 - x) \geq 0$ hay $2013 \leq x \leq 2014$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow 2013 \leq x \leq 2014$

Câu 11. (HSG 7 huyện Bố Trạch, tỉnh Quảng Bình, 2017-2018) (HSG 7 Cẩm Phả)

Cho $x + y = 1, x > 0, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$ (a và b là hằng số dương đã cho).

Lời giải

Ta có: $x + y = 1; x > 0; y > 0 \Rightarrow y = 1 - x$

$$P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} = \frac{a^2 \cdot 1}{x} + \frac{b^2 \cdot 1}{y} = \frac{a^2 \cdot (x + y)}{x} + \frac{b^2 \cdot (x + y)}{y} = a^2 + \frac{a^2 y}{x} + b^2 + \frac{b^2 x}{y}$$

Do đó:

$$= \left(\frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} \right) + a^2 + b^2$$

$$\frac{a^2 y}{x} \quad \text{và} \quad \frac{b^2 x}{y}$$

có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ

Các số dương

$$\frac{a^2 y}{x} = \frac{b^2 x}{y} \Leftrightarrow a^2 y^2 = b^2 x^2 \Leftrightarrow ay = bx \Leftrightarrow a(1 - x) = bx \Leftrightarrow x = \frac{a}{a + b}$$

khi

$$y = \frac{b}{a + b}$$

Khi đó tính được

$$\text{Vậy } GTNN(P) = (a+b)^2 \quad \text{khi } x = \frac{a}{a+b}; y = \frac{b}{a+b}$$

Câu 12. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá, tỉnh Thanh Hoá, 2017-2018)

Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{7n-8}{2n-3}$ có giá trị lớn nhất

Lời giải

$$A = \frac{7n-8}{2n-3} = \frac{2(7n-8)}{2(2n-3)} = \frac{7(2n-3)+5}{2(2n-3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2n-3)}$$

Ta có:

Phân số đã cho có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{5}{2(2n-3)}$ lớn nhất.

Phân số $\frac{5}{2(2n-3)}$ có tử là $5 > 0$, nên phân số có giá trị lớn nhất khi $2(2n-3)$ là số nguyên dương nhỏ nhất, mà $2(2n-3)$ là số chẵn nên $2(2n-3) = 2 \Rightarrow n = 2$, khi đó $A = 6$

Vậy giá trị lớn nhất của phân số đã cho bằng 6 khi $n = 2$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Sông Lô, 2017-2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x-2015| + |x-2016| + |x-2017|$

Lời giải

$$P = |x-2015| + |2016-x| + |x-2017| = (|x-2015| + |2017-x|) + |x-2016|$$

Ta có: $|x-2015| + |2017-x| \geq |x-2015+2017-x| = 2$. Dấu "=" xảy ra khi $2015 \leq x \leq 2017$ (1)

Lại có $|x-2016| \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 2016$ (2)
 $\min P = 2 \Leftrightarrow x = 2016$

Từ (1) và (2) ta có

Câu 14. (HSG 7 huyện Sông Lô, 2017-2018)

Cho bốn số nguyên dương khác nhau thỏa mãn tổng của hai số bất kỳ chia hết cho 2^2 và tổng của ba số bất kỳ chia hết cho 3^3 . Tính giá trị nhỏ nhất của tổng bốn số này

Lời giải

Nhận xét: Vì trong bốn số nguyên dương khác nhau luôn thỏa mãn tổng của hai số bất kỳ chia hết cho 2^2 và tổng của ba số bất kỳ chia hết cho 3^3 nên bốn số phải cùng số dư khi chia cho 2^2 và 3^3 . Để có tổng nhỏ nhất, mỗi trong hai số dư này là 1 .
 Từ đó ta có các số $1, 7, 13, 19$. Tổng của chúng là $1+7+13+19=40$.

Dạng 2. 1 (không có)

Dạng 2. 2: Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Hương Điền- Nam Hương, 2017-2018)

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$$

Chứng minh:

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

.....

$$\frac{1}{2005^2} < \frac{1}{2004.2005} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Đông Sơn, tỉnh Thanh Hoá, trường Nguyễn Chí, 2017-2018)

$$B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$$

Cho B . Chứng tỏ B không phải là số nguyên.

Lời giải

$$B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$$

Ta có:

$$B = 49 - \left(1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{8}{9} + 1 - \frac{15}{16} + 1 - \frac{24}{25} + \dots + 1 - \frac{2499}{2500} \right)$$

$$B = 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) = 49 - M$$

$$M = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right)$$

Trong đó

$$\frac{1}{(n+1)n} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$$

Áp dụng tính chất

Ta có:

$$\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) < \left(\frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{4.3} + \frac{1}{5.4} + \dots + \frac{1}{50.49} \right)$$

$$M < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = 1 - \frac{1}{50} < 1$$

Ta lại có:

$$M > \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{50.51} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{50} - \frac{1}{51}$$

$$M > \frac{1}{2} - \frac{1}{51} = \frac{49}{101} > 0$$

Từ đó suy ra $0 < M < 1 \Rightarrow B = 49 - M$, không phải là một số nguyên.

Câu 3. (HSG 7 huyện Anh Sơn, trường THCS Tào Sơn, 2017-2018)

$$A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$$

Chứng minh rằng:

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} \\ &= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2 \cdot 10^2} \\ &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} \\ &= 1 - \frac{1}{10^2} < 1 \end{aligned}$$

Dạng 2. 3 (không có)

Dạng 3. Bất đẳng thức dạng chữ.

Câu 1. (HSG 7 huyện Hương Sơn, tỉnh, trường 2017- 2018)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

$$\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

Tương tự:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

Do đó:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

Mà:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Từ (4) và (5) suy ra: (đpcm)

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường THCS Trần Hưng Đạo, 2017 - 2018)

Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lời giải

$$x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$$

Xét

$$n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad 0 < x < 1 \Rightarrow x^{n-1} < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0 \quad x > 0 \Rightarrow x^n - x < 0$$

Vì và , mà

Suy ra điều phải chứng minh

Câu 3. (HSG 7 huyện Mỹ Cày, 2017 - 2018)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

Lời giải

$$0 \leq (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

+ Ta có

$$b^2 + c^2 \geq 2bc; c^2 + a^2 \geq 2ca;$$

Tương tự:

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (1)$$

+) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên theo bất đẳng thức tam giác ta có:
 $a < b + c$, nhân cả 2 vế với a dương ta được: $a^2 < ab + ac$.
 $b^2 < ba + bc; c^2 < ca + cb$

Tương tự:

$$a^2 + b^2 + c^2 < ab + ac + ba + bc + ca + cb = 2(ab + bc + ca) \quad (2)$$

Suy ra:

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4. (HSG 7 huyện Năm Căn, 2017 - 2018)

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$.

Lời giải

Với: $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

Suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$$

Vậy

Câu 5. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hoá, 2017 - 2018)

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Lời giải

Vì $a < b + c$ nên $\frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{b+c+a} \quad (1)$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{c+a} < 1 \Rightarrow \frac{b}{c+a} < \frac{b+b}{c+a+b} \quad (2)$$

$$\frac{c}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{c}{a+b} < \frac{c+c}{a+b+c} \quad (3)$$

Từ (1) (2), (3) suy ra : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$

Câu 6. (HSG 7 huyện Dương Nam, 2017 - 2018)

Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh $ab > a + b$.

Lời giải

Từ $a > 2 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{2}; b > 2 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} < 1$

Vậy $ab > a + b$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>