**LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN**

**BÌNH THUẬN NĂM 2023-2024**

**Phạm Minh Trí- Cựu học sinh chuyên Toán trường THPT chuyên Trần Hưng Đạo Trần Chí Nhân- TK30 trường THPT chuyên Trần Hưng Đạo**

**I. Đề bài**

**Bài 1: (2,0 điểm):** Giải phương trình:

 $9x^{2}-53x=\sqrt{2x+1}-71$

**Bài 2: (2,0 điểm):**

 **a)** Kí hiệu S(n) là tổng các chữ số của số nguyên dương n. Biết a và b là hai số nguyên dương thỏa S(a) = S(b) = S(a + b) . Chứng minh rằng a và b chia hết cho 9.

 **b)** Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^{2}+(x+1)^{2}=y^{4}+(y+1)^{4}$

**Bài 3: (2,0 điểm):**

 Cho các số dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 3abc

 Chứng minh rằng:

 $\frac{a}{a^{2}+bc}+\frac{b}{b^{2}+ca}+\frac{c}{c^{2}+ab}\leq \frac{3}{2}$

**Bài 4: (3,0 điểm):**

 Cho tam giác đều ABC có đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng B,H,C). Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC.

 **a)** Chứng minh MP + MQ = AH

 **b)** Gọi K là trung điểm của AM. Chứng minh rằng KH $⊥$ PQ

 **c)** Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABM. Gọi D,E,F theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với các cạnh BM,AB,AM. Vẽ DN vuông góc với EF tại N. Chứng minh $\hat{BNE}=\hat{MNF}$

**Bài 5: (1,0 điểm):**

 Chia bảng hình vuông có cạnh 23cm thành các ô vuông có cạnh bằng 1cm. Ban đầu, tất cả các ô vuông được điền bởi dấu "+". Sau đó người ta thực hiện đổi dấu (mỗi lần đổi dấu là chuyển " + " thành " — ", " — " thành “ + “ ) trong các ô vuông ở các dòng và các cột của bảng theo quy tắc sau:

* Tất cả các ô của dòng thứ i được đổi dấu i lần ($i\in N , 1\leq i\leq 23$ )
* Tất cả các ô ở cột thứ j được đổi dấu 5j + 1 lần ($j\in N , 1\leq j\leq 23$ )

 Hỏi sau khi thực hiện tất cả thao tác đổi dấu, trên bảng còn bao nhiêu dấu " + "?

**II. Bài giải**

**Bài 1: (2,0 điểm):** ***Giải phương trình:***

$9x^{2}-53x=\sqrt{2x+1}-71$

 **Giải**

 Điều kiện $2x+1\geq 0⟺x\geq -\frac{1}{2}$

 Phương trình viết lại thành:

 $36x^{2}-212x+284=4\sqrt{2x+1} $

 $ ⟺36x^{2}-212x+284+8x+5=4\left(2x+1\right)+4\sqrt{2x+1}+1$

 $⟺36x^{2}-204x+289=4\left(2x+1\right)+4\sqrt{2x+1}+1$

 $⟺\left(6x-17\right)^{2}=\left(2\sqrt{2x+1}+1\right)^{2}$

 $⟺\left[\begin{matrix}2\sqrt{2x+1}+1=6x-17 (1)\\2\sqrt{2x+1}+1=17-6x (2)\end{matrix}\right.$

 Xét (1), ta có:

 (1)$⟺2\sqrt{2x+1}=6x-18$

 $ ⟺2\sqrt{2x+1}=3\left(2x+1\right)-21 (1') $

 Đặt $t=\sqrt{2x+1}\geq 0 $ta có:

 $\left(1^{'}\right)⟺3t^{2}-2t-21=0$

 $⟺\left(t-3\right)\left(3t+7\right)=0$

 $⟺\left[\begin{matrix}t-3=0\\3t+7=0\end{matrix}\right.$

 Xét (2), ta có:

 $\left(2\right)⟺6x+2\sqrt{2x+1}-16=0$

 $⟺3\left(2x+1\right)+2\sqrt{2x+1}-19=0$

 Đặt $t=\sqrt{2x+1}\geq 0$ ta có:

 $\left(2^{'}\right)⟺3t^{2}+2t-19=0$

 Giải phương trình này ta được hai nghiệm $t\_{1}=\frac{-1+\sqrt{58}}{3} \left(nhận\right);t\_{2}=\frac{-1-\sqrt{58}}{3}(loại) $

 Với $t\_{1}=\frac{-1+\sqrt{58}}{3} $ ta được:

 $\sqrt{2x+1}=\frac{-1+\sqrt{58}}{3}$

 $⟺2x+1=\frac{59-2\sqrt{58}}{9}$

 $⟺2x=\frac{50-2\sqrt{58}}{9} $

 $⟺x=\frac{25-\sqrt{58}}{9} (nhận)$

 Vậy $S=\left\{\frac{25-\sqrt{58}}{9};4\right\}$

**Bài 2: (2,0 điểm):**

 ***a) Kí hiệu S(n) là tổng các chữ số của số nguyên dương n. Biết a và b là hai số nguyên dương thỏa S(a) = S(b) = S(a + b) Chứng minh rằng a và b chia hết cho 9.***

 ***b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:*** $x^{2}+(x+1)^{2}=y^{4}+(y+1)^{4}$

**Giải**

 **a)** Ta áp dụng tính chất a - S (a) $\vdots $ 9 với mọi số nguyên dương a (bạn đọc tự chứng minh tính chất này)

 Vậy ( a + b - S(a) = a + b - S(a+b)$\vdots $9

 $⟹\left(a-S\left(a\right)\right)+b\vdots 9⟹b\vdots 9$

 Tương tự , ta được $a\vdots 9.$ Vậy a , b chia hết cho 9 (đpcm)

 **b)** Phương trình viết lại:

 $2x^{2}+2x+1=2y^{4}+4y^{3}+6y^{2}+4y+1$

 $⟺2x^{2}+2x+2=2y^{4}+4y^{3}+6y^{2}+4y+2 $

 $ ⟺x^{2}+x+1=(y^{2}+y+1)^{2}$

 Vậy từ đây ta được $x^{2}+x+1$ là số chính phương hay $4x^{2}+4x+4=(2x+1)^{2}+3 $là số chính phương.

 Đặt $(2x+1)^{2}+3=t^{2}(t ϵ Z )$ (\*\*)

 Ta có:

 $\left(\*\*\right)⟺t^{2}-\left(2x+1\right)^{2}=3$

 $⟺\left(t-2x-1\right)\left(t+2x+1\right)=3$

 Xét tất cả các trường hợp sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  $t-2x-1$ | 1 | 3 | -1 | -3 |
| $$t+2x+1$$ | 3 | 1 | -3 | -1 |
| $$t$$ | 2 | 2 | -2 | -2 |
| $$x$$ | 0 | -1 | -1 | 0 |

 Vậy $x=0 và x=-1$

 Với x = 0 thay vào (\*), ta được:

 (\*)$⟺\left(y^{2}+y+1\right)^{2}=1$

 $⟺\left[\begin{matrix}y^{2}+y+1=1⟺y^{2}+y=0⟺y\left(y+1\right)=0⟺\left[\begin{matrix}y=0\\y=-1\end{matrix}\right.\\y^{2}+y+1=-1(vô nghiệm)\end{matrix}\right.$

 Với x = - 1 thay vào (\*), ta được:

 (\*)$ ⟺\left(y^{2}+y+1\right)^{2}=1⟺\left[\begin{matrix}y=0\\y=-1\end{matrix}\right.$

 Vậy phương trình có các nghiệm (x; y) = (0; 0); (0; - 1); (- 1; 0); (- 1; - 1)

**Bài 3: (2,0 điểm):**

 ***Cho các số dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 3abc***

 Chứng minh rằng:

 $\frac{a}{a^{2}+bc}+\frac{b}{b^{2}+ca}+\frac{c}{c^{2}+ab}\leq \frac{3}{2}$

 Giải

 Biến đổi giá trị thiết ta được:

 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$

 Ta có:

 $\frac{a}{a^{2}+bc}\leq \frac{a}{2a\sqrt{bc}}=\frac{1}{2\sqrt{bc}}=\frac{1}{4}.\frac{2}{\sqrt{bc}}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

 Tương tự:

 $\frac{b}{b^{2}+ca}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$

 $\frac{c}{c^{2}+ab}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

 Vậy

 $\frac{a}{a^{2}+bc}+\frac{b}{b^{2}+ca}+\frac{c}{c^{2}+ab}\leq \frac{1}{4}.2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{2}{4}.3=\frac{3}{2}$

 Dấu “ = ” xảy ra khi $a=b=c=1.$

**Bài 4: (3,0 điểm):**

 ***Cho tam giác đều ABC có đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng B,H,C). Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC.***

 ***a) Chứng minh MP + MQ = AH***

 ***b) Gọi K là trung điểm của AM. Chứng minh rằng KH*** $⊥$ ***PQ***

 ***c) Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABM. Gọi D,E,F theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với các cạnh BM,AB,AM. Vẽ DN vuông góc với EF tại N. Chứng minh*** $\hat{BNE}=\hat{MNF}$

 **Giải:**

****

 **a)** Trong $∆ $BMP vuông ở P. ta có: $MP=MB.\sin(MBP=MB.sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}MB)$

 Tương tự, ta chứng minh được: $MQ=\frac{\sqrt{3}}{2}MC$

 Vậy $MP+MQ=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=AH$

 **b)** Do $\hat{APM}=\hat{AQM}=\hat{AHM}$ = 90 ° nên A, M, P, Q, H cùng nằm trên đường tròn đường kính AM. Do đó, K là tâm của đường tròn này$⟹ $ KP = KH = KQ

 Trong $∆$ PKH cân ở K có $\hat{PHK}=\hat{2PAH}=2\hat{BAH}$=2. 30 °=$60°. $Vậy $∆$ PKH đều $⟹ HP=HK (1)$

 Tương tự, là chứng minh được $∆ $QKH đều $⟹ HQ=HK (2)$

 Từ (1), (2) ta được:

 $\left.\begin{matrix}HQ=HK\\Mà PQ=PK\end{matrix}\right\}⟹PQ$ là đường trung trực của $HK⟹PQ⊥HK$

 **c)** Gọi B', M' lần lượt là hình chiếu của B, M lên EF. Khi đó do BB'||DN||MM' Gọi N là giao điểm của DN và BM.

 Áp dụng định lý Thales trong $∆$ BMM'; $∆$ M'BB' có BB'||DN|| MM'; D $\in BM;N^{'}\in BM^{'};N\in B^{'}M^{'}, $ ta có:

 $\left.\begin{matrix}\frac{MD}{DB}=\frac{M'N'}{N'B}\\\frac{M'N'}{N'B}=\frac{M'N}{NB'}\end{matrix}\right\}⟹\frac{BD}{DM}=\frac{B'N}{NM'} (3)$

 Xét $∆ $BB'E và $∆$ MM'F , ta có:

 $\hat{BB'E}=\hat{MM'F}=90°$

 $\hat{BEB'}=\hat{AEF}=\hat{AFE}$ ($∆ AEF $cân tại F do AE = AF theo tính chất tiếp tuyến )

 $=\hat{MFM'}$

 Vậy $∆ BB^{'}E \~ ∆ MM^{'}F \left(g.g\right)⟹\frac{B^{'}E}{M^{'}F}=\frac{BE}{MF}=\frac{BD}{DM} $(4) ( do $BE=BD ;MF=MD $theo tính chất tiếp tuyến )

 Từ (3) và (4 ), ta được $\frac{B^{'}M}{NM^{'}}=\frac{B^{'}E}{M^{'}F}=\frac{B^{'}N-B^{'}E}{ NM^{'}-M^{'}F}=\frac{EN}{FN}$

 Xét $∆ BNE và ∆ MNF, ta có:$

 $\hat{BEN}=\hat{MFN}$

 $\frac{EN}{FN}=\frac{B^{'}N}{MN^{'}}=\frac{BE}{MF} (CMT)$

 Vậy $∆ BNE \~ ∆ MNF \left(c.g.c\right)⟹\hat{BNE}=\hat{MNF}(ĐPCM)$

**Bài 5: (1,0 điểm ):**

 ***Chia bảng hình vuông có cạnh 23cm thành các ô vuông có cạnh bằng 1cm. Ban đầu, tất cả các ô vuông được điền bởi dấu "+". Sau đó người ta thực hiện đổi dấu (mỗi lần đổi dấu là chuyển " + " thành " — ", " — " thành “ + “ ) trong các ô vuông ở các dòng và các cột của bảng theo quy tắc sau:***

* ***Tất cả các ô của dòng thứ i được đổi dấu i lần (***$i\in N , 1\leq i\leq 23$ ***)***
* ***Tất cả các ô ở cột thứ j được đổi dấu 5j + 1 lần (***$j\in N , 1\leq j\leq 23$ ***)***

 ***Hỏi sau khi thực hiện tất cả thao tác đổi dấu, trên bảng còn bao nhiêu dấu " + "?***

 **Giải :**

 Ta gọi ô (i; j) là ô ở dòng thứ i và cột thứ j trong bảng. Khi đó, sau tất cả các thao tác đổi dấu, ô (i; j) bị đổi dấu i +5j+1 (lần) và i + 5j +1 $≡$ i+j+1 (mod 2)

 Sau tất cả các thao tác đổi dấu, ô ($i$;$j$ ) sẽ mang “ + ”nếu bị dỗi dấu một số chẵn lần. Vậy sau khi thao tác, các ô (i; j) mang dấu “ + ” và chỉ khi i + j + 1 j + 1$\vdots $2 hay i, j khác tính chẵn lė.

 **Th 1** : i lẽ, j chẵn.

 Ta chọn i thỏa mãn thì có 12 cách, chọn j thỏa thì có 11 cách. Vậy số ô (i; j) thỏa thì là 12.11 =132( ô )

 **Th2:** i chẵn, j lẻ.

 Bằng cách chọn tương tự, ta được só ô thỏa mãn là 11.12 =132 (ô)

 Vậy số ô mang dấu “ + ” sau khi thự hiện đổi dấu 132 + 132 = 246 ô