

DẠNG 8**Một số bài toán số phức chọn lọc****1. PHẦN ĐỀ BÀI**

- Câu 1:** [Số Phức 2023] Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 + 2i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a - b$ khi $|z - 3 - 3i| + |z - 7 - i|$ đạt giá trị lớn nhất.
- A. 8 B. 6 C. 4 D. 10
- Câu 2:** [Số Phức 2023] Trong tập các số phức, phương trình $z^2 - 6z + m = 0, m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Gọi m_0 là một giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0; 20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0 \in \mathbb{N}$?
- A. 10 B. 12 C. 11 D. 13
- Câu 3:** [Số Phức 2023] Xét các số phức z và w thỏa mãn $|z| = |w| = 1$ và $|z + w| = \sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |zw + 2i(z + w) - 4|$ bằng
- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{1+5\sqrt{2}}{4}$. C. $5 - 2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{5}$.
- Câu 4:** [Số Phức 2023] Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $z \cdot \overline{z} = |z + \overline{z}|$. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ sao cho $|z_1 - z_2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - \sqrt{3}i| + |\overline{z_2} + \sqrt{3}i|$ bằng
- A. 2. B. $1 + \sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{20 - 8\sqrt{3}}$.
- Câu 5:** [Số Phức 2023] Biết phương trình $z^2 + mz + m^2 - 2 = 0$ (m là tham số thực) có hai nghiệm phức z_1, z_2 . Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 và $z_0 = i$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để diện tích tam giác ABC bằng 1?
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.
- Câu 6:** [Số Phức 2023] Cho số phức z thỏa mãn $iz \cdot \overline{z} + (1 + 2i)z - (1 - 2i)\overline{z} - 4i = 0$. Giá trị lớn nhất của $P = |z + 1 + 2i| + |z + 4 - i|$ gần số nào nhất sau đây?
- A. 7,4. B. 4,6. C. 4,2. D. 7,7.
- Câu 7:** [Số Phức 2023] Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 6m - 5 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$?
- A. 5. B. 3. C. 6. D. 4.
- Câu 8:** [Số Phức 2023] Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{3}, |z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |3z_1 - z_2 - 10 + 5i| + 2$ bằng
- A. $10\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{5} - 1$. C. $2 + 2\sqrt{5}$. D. $8 - 2\sqrt{5}$.

- Câu 9: [Số Phức 2023]** Có tất cả bao nhiêu số phức w thỏa mãn điều kiện $2w\bar{w}=1$ và $\frac{w}{w^2}$ là số thuần ảo?
- A. 4. B. 6. C. 3. D. 2.
- Câu 10: [Số Phức 2023]** Cho hai số phức z và w thay đổi thỏa mãn các điều kiện $|z+1+i|=|z|$ và $|w-3-4i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-w-1-i|$.
- A. $\min P=3\sqrt{2}-1$. B. $\min P=3\sqrt{2}$. C. $\min P=5\sqrt{2}$. D. $\min P=5\sqrt{2}-1$.
- Câu 11: [Số Phức 2023]** Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1+3i|=2$ và số phức $w=(1-2i)z$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn (C) trong mặt phẳng (Oxy) . Tìm bán kính R của đường tròn (C) .
- A. $R=5$. B. $R=\sqrt{10}$. C. $R=6$. D. $R=2\sqrt{5}$.
- Câu 12: [Số Phức 2023]** Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho $iz.\bar{z}+(1+2i)z-(1-2i)\bar{z}-4i=0$ và T là tập hợp tất cả các số phức w có phần thực khác 0 sao cho $\frac{w}{\bar{w}+6i}$ là số thực. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ và $w \in T$ thỏa mãn $|z_1-z_2|=2\sqrt{5}$ và $\frac{w-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\bar{w}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}}$. Khi $|w-z_1| \cdot |w-z_1|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $|w-z_1|+|w-z_1|$ bằng
- A. $\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $-4\sqrt{3}$.
- Câu 13: [Số Phức 2023]** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2mz-m+12=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=\sqrt{2}|z_1-z_2|$?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 14: [Số Phức 2023]** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+3m+10=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 không phải số thực thỏa mãn $|z_1|+|z_2|\leq 8$?
- A. 1 B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 15: [Số Phức 2023]** Cho số phức z và số phức $w=(z-i)(\bar{z}+i)+2z-3i$ thỏa mãn $|w-i^{2022}|-|i^{2023} \cdot \bar{w}-1|=0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z-3+i|^2+|\bar{z}+1-3i|^2$ bằng $m+n\sqrt{5}$ với $m, n \in \mathbb{R}$. Tính $P=m.n$.
- A. $P=124$. B. $P=876$. C. $P=416$. D. $P=104$.
- Câu 16: [Số Phức 2023]** Giả sử $z_1; z_2$ là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8-i\bar{z})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=6$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng
- A. $-5+\sqrt{73}$. B. $5-\sqrt{21}$. C. $20-2\sqrt{73}$. D. $20-4\sqrt{21}$.

Câu 17: [Số Phức 2023] Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 2, |w - 3 + 2i| = 1$ khi đó $|z^2 - 2zw - 4|$ đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. 16. B. 24. C. $4 + 4\sqrt{13}$. D. 20.

Câu 18: [Số Phức 2023] Cho số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z + \bar{z} - 2| + 3|z - \bar{z} + 4i| \leq 6$ và $|z - 1 - i| \leq |z + 3 + i|$. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x + 3y + 5$. Khi đó $M + m$ bằng:

- A. $\frac{17}{5}$. B. $\frac{33}{5}$. C. $-\frac{13}{5}$. D. $\frac{22}{5}$.

Câu 19: [Số Phức 2023] Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - \sqrt{m+1}z - \frac{1}{4}(m^2 - 5m - 6) = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10; 10]$ để phương trình trên có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| \leq |z_1 - z_2|$?

- A. 11. B. 10. C. 8. D. 9.

Câu 20: [Số Phức 2023] Cho M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $|5z_1 + 9 - 3i| = 5|\bar{z}_1|, |z_2 - 2| = |z_2 - 3 - i|, |z_3 + 1| + |z_3 - 3| = 4$. Khi M, N, P không thẳng hàng, giá trị nhỏ nhất của nửa chu vi p của tam giác MNP là

- A. $\frac{10\sqrt{5}}{9}$. B. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{9\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{5\sqrt{11}}{13}$.

Câu 21: [Số Phức 2023] Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z + w| = \sqrt{10}, |2z + w| = \sqrt{17}$ và $|\bar{z} - 3\bar{w}| = \sqrt{146}$. Tính giá trị của biểu thức $P = z.\bar{w} + \bar{z}.w$.

- A. $P = -14$. B. $P = 14$. C. $P = 16$. D. $P = -8$.

I. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: [Số Phức 2023] Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 + 2i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a - b$ khi $|z - 3 - 3i| + |z - 7 - i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. 8

B. 6

C. 4

D. 10

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } |z - 3 + 2i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b + 2)^2 = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{a - 3}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{b + 2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \frac{a - 3}{\sqrt{5}} = \sin t \Rightarrow a = \sqrt{5} \sin t + 3 \\ \frac{b + 2}{\sqrt{5}} = \cos t \Rightarrow b = \sqrt{5} \cos t - 2 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } T = |z - 3 - 3i| + |z - 7 - i| = \sqrt{(a - 3)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a - 7)^2 + (b - 1)^2}$$

Thay (*) vào ta có:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{5 \sin^2 t + (\sqrt{5} \cos t - 5)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} \sin t - 4)^2 + (\sqrt{5} \cos t - 3)^2} \\ &= \sqrt{30 - 10\sqrt{5} \cos t} + \sqrt{30 - 8\sqrt{5} \sin t - 6\sqrt{5} \cos t} \\ &\leq \sqrt{2(60 - 8\sqrt{5} \sin t - 16\sqrt{5} \cos t)} = \sqrt{2[60 - 8\sqrt{5}(\sin t + 2 \cos t)]} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } -\sqrt{5} \leq \sin t + 2 \cos t \leq \sqrt{5} \Rightarrow T \leq \sqrt{2(60 - 8\sqrt{5}(-\sqrt{5}))} = 10\sqrt{2}$$

Suy ra $T_{\max} = 10\sqrt{2}$ khi:

$$\begin{cases} 30 - 10\sqrt{5} \cos t = 30 - 8\sqrt{5} \sin t - 6\sqrt{5} \cos t \\ \sin t + 2 \cos t = -\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \sin t - 2 \cos t = 0 \\ \sin t + 2 \cos t = -\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \sin t = \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Vậy $P = a - b = 6$.

Câu 2: [Số Phức 2023] Trong tập các số phức, phương trình $z^2 - 6z + m = 0, m \in \mathbb{R} (1)$. Gọi m_0 là một giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0; 20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0 \in \mathbb{N}$?

A. 10

B. 12

C. 11

D. 13

Lời giải**Chọn A**

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$ thì

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Leftrightarrow 6^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > 9 \\ z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \text{ (luôn đúng)} \\ \Delta > 0 \Leftrightarrow 6^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 9 \end{cases} \Leftrightarrow m > 9.$$

$$\begin{cases} z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 (L) \\ z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow 3 = 0 (L) \end{cases} \end{cases}$$

Mà trong khoảng $(0; 20)$ và $m_0 \in \mathbb{N}$ nên có 10 giá trị m_0 thỏa mãn.

Câu 3: [Số Phức 2023] Xét các số phức z và w thỏa mãn $|z|=|w|=1$ và $|z+w|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|zw+2i(z+w)-4|$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{1+5\sqrt{2}}{4}$. **C.** $5-2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z, w , khi đó với $|z+w|=\sqrt{2}$ ta luôn có ΔOAB là tam giác vuông tại O với $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, khi đó ta luôn có $z \cdot \bar{w}$ là số thuần ảo tức $z \cdot \bar{w} = ki (k \in \mathbb{R})$

Khi đó

$$\begin{cases} P = |zw + 2i(z+w) - 4| = \left| ki \frac{w}{w} + 2i \left(\frac{ki}{w} + w \right) - 4 \right| = |kiw^2 + 2i(kiw + w) - 4| = |kiw^2 - 2kw + 2iw - 4| \\ |z+w| = \left| \frac{ki}{w} + w \right| = |w(ki+1)| = |w| \sqrt{k^2+1} = \sqrt{2} \Rightarrow k=1 \end{cases}$$

Đặt $w = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ khi đó ta có:

$$P = |w^2 + (2i-2)w - 4| = |w^2 + (2+2i)w + 4i| = |(w+1+i)^2 + 2i|$$

Đặt $u = w+1+i \Rightarrow w = u-1-i \Rightarrow |w|=|u-1-i|=1$, khi đó ta suy ra (đặt trước $z_0 = -1-i$)

$$\begin{aligned} P^2 &= |u^2 + 2i|^2 = |u^2 + z_0^2|^2 = (u^2 + z_0^2)(\bar{u}^2 + \bar{z}_0^2) = |u|^4 + |z_0|^4 + (u \cdot \bar{z}_0 + z_0 \cdot \bar{u})^2 - 2|u \cdot z_0|^2 \\ &= |u|^4 - 4|u|^2 + 4 + (u \cdot \bar{z}_0 + z_0 \cdot \bar{u})^2 \end{aligned}$$

$$\text{Mà } (u+z_0)(\bar{u}+\bar{z}_0) = |u+z_0|^2 = 1 \Rightarrow u \cdot \bar{z}_0 + z_0 \cdot \bar{u} = 1 - |u|^2 - |z_0|^2 = -|u|^2 - 1$$

$$\text{Suy ra } \frac{9^2}{2} = |u|^4 - 4|u|^2 + 4 + (|u|^2 + 1)^2 = 2|u|^4 - 2|u|^2 + 5 = 2\left(|u|^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Câu 4: [Số Phức 2023] Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $z \cdot \bar{z} = |z + \bar{z}|$. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ sao cho $|z_1 - z_2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z_1 - \sqrt{3}i| + |\bar{z}_2 + \sqrt{3}i| \text{ bằng}$$

A. 2. **B.** $1+\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{20-8\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $z\bar{z} = |z + \bar{z}| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2|a| \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2a \\ a^2 + b^2 = -2a \end{cases}$.

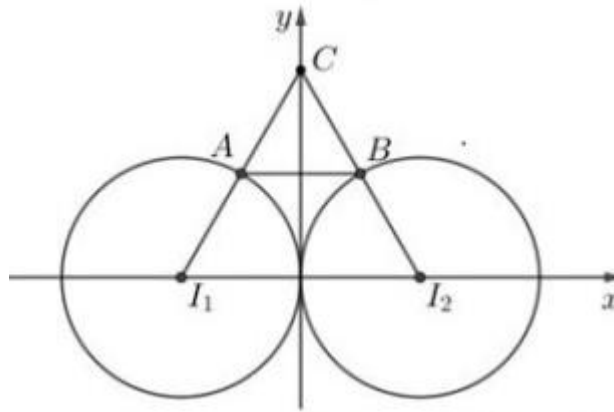
Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 .

$|z_1 - z_2| = 1 \Rightarrow AB = 1$.

Khi đó: $P = |z_1 - \sqrt{3}i| + |z_2 + \sqrt{3}i| = CA + CB$, với $C(0; \sqrt{3})$

$\Rightarrow P_{\min} \geq I_1C - R + I_2C - R = 2$; với $I_1(-1; 0), I_2(1; 0), R = 1$.

Dấu " $=$ " xảy ra vì A, B lần lượt là trung điểm CI_1, CI_2 và $AB = \frac{I_1I_2}{2} = 1$ (thỏa mãn)



Câu 5: [Số Phức 2023] Biết phương trình $z^2 + mz + m^2 - 2 = 0$ (m là tham số thực) có hai nghiệm phức z_1, z_2 . Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 và $z_0 = i$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để diện tích tam giác ABC bằng 1?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\Delta = m^2 - 4(m^2 - 2) = -3m^2 + 8$

TH1: $\Delta > 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{6}}{3} < m < \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt là z_1, z_2 .

Vì $A, B \in Ox$ nên $AB = |z_1 - z_2| = \sqrt{(z_1 - z_2)^2} = \sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2} = \sqrt{-3m^2 + 8}$.

Mặt khác, ta có $C(0; 1) \Rightarrow d(C; AB) = 1$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C; AB) = \frac{\sqrt{-3m^2 + 8}}{2} = 1 \Leftrightarrow m = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} (n)$

TH2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 8 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ m < \frac{-2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức liên hợp là

$z_{1,2} = \frac{-m \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$.

Ta có: $AB = |z_1 - z_2| = |i\sqrt{|\Delta|}| = \sqrt{-3m^2 + 8} = \sqrt{3m^2 - 8}$ và $C(0;1)$.

Phương trình đường thẳng AB là $x + \frac{m}{2} = 0$ nên $d(C; AB) = \frac{|m|}{2}$.

$$\text{Do đó, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C; AB) = \frac{|m| \sqrt{3m^2 - 8}}{4} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} i(l) \end{cases}$$

Vậy có 4 giá trị thực của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 6: [Số Phức 2023] Cho số phức z thỏa mãn $iz \cdot \bar{z} + (1+2i)z - (1-2i)\bar{z} - 4i = 0$. Giá trị lớn nhất của $P = |z+1+2i| + |z+4-i|$ gần số nào nhất sau đây?

A. 7,4.

B. 4,6.

C. 4,2.

D. 7,7.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned} iz \cdot \bar{z} + (1+2i)z - (1-2i)\bar{z} - 4i &= 0 \Leftrightarrow i(x+yi)(x-yi) + (1+2i)(x+yi) - (1-2i)(x-yi) - 4i = 0 \\ \Leftrightarrow i(x^2 + y^2) + (x-2y) + (2x+y)i - (x-2y) - (-2x-y)i - 4i &= 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0. \end{aligned}$$

Suy ra, tập hợp các số phức z có điểm biểu diễn thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-2; -1)$, bán kính $R = 3$.

Lại có

$$\begin{aligned} P &= |z+1+2i| + |z+4-i| = |(x+1) + (y+2)i| + |(x+4) + (y-1)i| \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 + 8x - 2y + 17} \end{aligned}$$

$$\text{Kết hợp với (2) ta được } P = \sqrt{9 - 2(x-y)} + \sqrt{21 + 4(x-y)}.$$

$$\text{Đặt } t = x - y \text{ thì } P = f(t) = \sqrt{9 - 2t} + \sqrt{21 + 4t} \text{ với } t \in \left[-\frac{21}{4}; \frac{9}{2}\right].$$

Khảo sát hàm số $f(t)$ hoặc áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta được

$$P = \sqrt{9 - 2t} + \sqrt{2\left(\frac{21}{2} + 2t\right)} \leq \sqrt{(1+2)\left(9 + \frac{21}{2}\right)} = \frac{3\sqrt{26}}{2} \approx 7,65.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } t = \frac{5}{4}, \text{ từ đó có thể tính được } z = \frac{-7 \pm \sqrt{217}}{8} + i \frac{-17 \pm \sqrt{217}}{8}.$$

Câu 7: [Số Phức 2023] Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 6m - 5 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \bar{z}_1 = z_2 \cdot \bar{z}_2$?

A. 5.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \Delta' = m^2 - 6m + 5.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt nên xảy ra hai trường hợp:

- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 và $z_1 = \bar{z}_1; z_2 = \bar{z}_2$ nên

$$z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 \text{ (ko thoai m\^n)}, \\ z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow m = 0. \end{cases}$$

- Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m \in (1; 5)$, thì phương trình có hai nghiệm phức là hai số phức liên hợp.

Khi đó $z_1 = \overline{z_2}; \overline{z_1} = z_2$ nên $z_1 \overline{z_1} = z_2 \overline{z_2} \Leftrightarrow z_1 z_2 = z_1 z_2$ luôn đúng với $m \in (1; 5)$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 8: [Số Phức 2023] Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{3}, |z_1 + z_2| = \sqrt{5}$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |3z_1 - z_2 - 10 + 5i| + 2$ bằng

A. $10\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{5} - 1$. **C.** $2 + 2\sqrt{5}$. **D.** $8 - 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z_1 = a + bi, z_2 = c + di, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

Ta có:

$$|z_1| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4.$$

$$|z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow c^2 + d^2 = 3.$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a+c)^2 + (b+d)^2 = 5 \Rightarrow ac + bd = -1.$$

Suy ra:

$$|3z_1 - z_2| = \sqrt{(3a-c)^2 + (3b-d)^2} = \sqrt{9(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - 6(ac + bd)} = 3\sqrt{5}.$$

Khi đó:

$$P = |3z_1 - z_2 - 10 + 5i| + 2 = |(3z_1 - z_2) + (-10 + 5i)| + 2 \geq |-10 + 5i| - |3z_1 - z_2| + 2 = 2 + 2\sqrt{5}.$$

Câu 9: [Số Phức 2023] Có tất cả bao nhiêu số phức w thỏa mãn điều kiện $2w\overline{w} = 1$ và $\frac{w}{w^2}$ là số thuần

ảo?

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $w = x + yi, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Điều kiện: $\overline{w^2} \neq 0 \Leftrightarrow w \neq 0$.

Từ giả thiết $2w\overline{w} = 1 \Leftrightarrow |w|^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2} (*)$.

Mặt khác: $\frac{w}{w^2} = \frac{w^3}{w^2 \cdot w^2} = \frac{(x + yi)^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - 3xy^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{3x^2y - y^3}{(x^2 + y^2)^2}i$.

Đề $\frac{w}{w^2}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $\frac{x^3 - 3xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3y^2 \end{cases}$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra tồn tại hai số phức.

Với $x^2 = 3y^2$ thay vào (*) ta được: $4y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$, với mỗi giá trị của y tồn tại hai giá trị của x , do đó có 4 cặp $(x; y)$.

Vậy có tất cả 6 số phức w thỏa mãn bài toán.

Câu 10: [Số Phức 2023] Cho hai số phức z và w thay đổi thỏa mãn các điều kiện $|z+1+i|=|z|$ và $|w-3-4i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-w-1-i|$.

A. $\min P = 3\sqrt{2} - 1$. **B.** $\min P = 3\sqrt{2}$. **C.** $\min P = 5\sqrt{2}$. **D.** $\min P = 5\sqrt{2} - 1$.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $z = x + yi$ có điểm biểu diễn là $M(x; y)$ thì M nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y + 1 = 0$ hay $x = -y - 1$

Ta có $P = |z - w - 1 - i| = |(z - 4 - 5i) - (w - 3 - 4i)| \geq |z - 4 - 5i| - |w - 3 - 4i|$

$$P \geq \left| \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} - 1 \right| = \left| \sqrt{(y+5)^2 + (y-5)^2} - 1 \right| = \left| \sqrt{2y^2 + 50} - 1 \right| \geq 5\sqrt{2} - 1$$

Câu 11: [Số Phức 2023] Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1+3i|=2$ và số phức $w = (1-2i)z$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn (C) trong mặt phẳng (Oxy) . Tìm bán kính R của đường tròn (C) .

A. $R = 5$. **B.** $R = \sqrt{10}$. **C.** $R = 6$. **D.** $R = 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $w = (1-2i)z = (1-2i)(z + (-1+3i)) - (1-2i)(-1+3i)$

$$\Rightarrow w = (1-2i)(z + (-1+3i)) - (5+5i)$$

$$\Rightarrow w + (5+5i) = (1-2i)(z - 1 + 3i) \Rightarrow |w + (5+5i)| = |(1-2i)(z - 1 + 3i)| = |1-2i||z - 1 + 3i|$$

$$\Rightarrow |w + (5+5i)| = 2\sqrt{5}$$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn (C) có bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Câu 12: [Số Phức 2023] Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho $iz\bar{z} + (1+2i)z - (1-2i)\bar{z} - 4i = 0$

và T là tập hợp tất cả các số phức w có phần thực khác 0 sao cho $\frac{w}{\bar{w}+6i}$ là số thực. Xét các số

phức $z_1, z_2 \in S$ và $w \in T$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5}$ và $\frac{w - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{w} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$. Khi $|w - z_1| \cdot |w - z_1|$ đạt

giá trị nhỏ nhất thì $|w - z_1| + |w - z_1|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $-4\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Ta có

$$iz.\bar{z} + (1+2i)z - (1-2i)\bar{z} - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow i(x+yi)(x-yi) + (1+2i)(x+yi) - (1-2i)(x-yi) - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow i(x^2+y^2) + (x-2y) + (2x+y)i - (x-2y) - (-2x-y)i - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$$

Suy ra S là tập hợp các số phức có điểm biểu diễn thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-2;-1)$, bán kính $R = 3$.

Giả sử $w = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0)$. Ta có

$$\frac{w}{\bar{w} + 6i} = \frac{a+bi}{a+(6-b)i} = \frac{(a+bi)[a+(b-6)i]}{a^2+(b-6)^2} = \frac{a^2-b^2+6b}{a^2+(b-6)^2} + \frac{2ab-6a}{a^2+(b-6)^2}i$$

Do đó $\frac{w}{\bar{w} + 6i}$ là số thực khi và chỉ khi $\frac{2ab-6a}{a^2+(b-6)^2} = 0 \Leftrightarrow b = 3$.

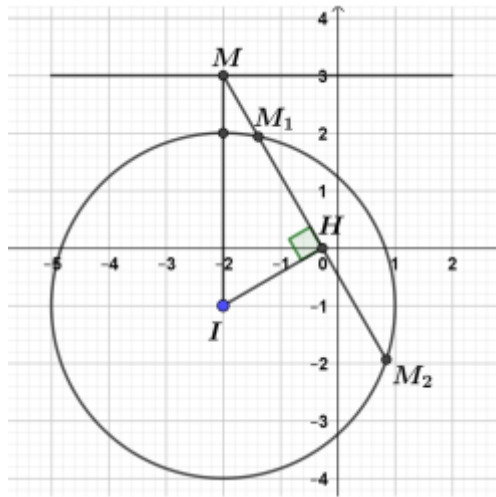
Suy ra T là tập hợp các số phức có điểm biểu diễn thuộc đường thẳng $\Delta: y = 3$.

Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ và $w \in T$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \sqrt{5}$ và $\frac{w-z_1}{z_2-z_1} = \frac{\bar{w}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}$.

Giả sử $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i (x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R})$ và $w = x + 3i, (x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$.

Gọi M_1, M_2, M lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 và w .

Khi đó, $M_1, M_2 \in (C)$ và $M \in \Delta$, đồng thời $|w - z_1| \cdot |w - z_2| = MM_1 MM_2$.



Do $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5}$ nên $M_1 M_2 = 2\sqrt{5}$ và do $\frac{w-z_1}{z_2-z_1} = \frac{\bar{w}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}$ nên ba điểm M_1, M_2, M thẳng hàng.

Suy ra $MM_1 MM_2 = IM^2 - R^2$.

Vì vậy $|w - z_1| \cdot |w - z_2| = IM^2 - R^2$.

Do đó, $|w - z_1| \cdot |w - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi IM đạt giá trị nhỏ nhất. Lúc đó, M là hình chiếu vuông góc của I trên Δ và $M = (-2; 3)$.

Gọi H là trung điểm của $M_1 M_2$, ta có $IH = \sqrt{IM_1^2 - M_1 H^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$.

Vì bốn điểm M_1, M_2, M, H thẳng hàng nên ΔMIH vuông tại H suy ra

$$MH = \sqrt{IM^2 - IH^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \text{ và do đó,}$$

$$|w - z_1| + |w - z_2| = MM_1 + MM_2 = MH - HM_1 + MH + HM_2 = 2MH = 4\sqrt{3}.$$

Câu 13: [Số Phức 2023] Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 + 2mz - m + 12 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = \sqrt{2}|z_1 - z_2|$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Phương trình đã cho có $\Delta' = m^2 + m - 12$.

Trường hợp 1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 3 \end{cases}$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm thực z_1, z_2 phân biệt.

$$\begin{aligned} \text{Do đó,} \quad |z_1| + |z_2| &= \sqrt{2}|z_1 - z_2| \Leftrightarrow (|z_1| + |z_2|)^2 = (\sqrt{2}|z_1 - z_2|)^2 \\ \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2|z_1 z_2| &= 2(z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2) \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 + 2|z_1 z_2| = 2[(z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2] \\ \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 6z_1 z_2 - 2|z_1 z_2| &= 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 6(-m + 12) - 2|-m + 12| = 0(*) \quad \text{Nếu } m < -4 \text{ hoặc } \\ 3 < m < 12 \text{ thì } (*) &\Leftrightarrow 4m^2 - 8(-m + 12) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 4 \end{cases}. \end{aligned}$$

Nếu $m \geq 12$ thì $(*) \Leftrightarrow 4m^2 - 4(-m + 12) = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 = 0$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 3$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 là hai số phức liên hợp:

$$-m + i\sqrt{-m^2 - m + 12} \text{ và } -m - i\sqrt{-m^2 - m + 12}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó, } |z_1| + |z_2| &= \sqrt{2}|z_1 - z_2| \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 + (-m^2 - m + 12)} &= 2\sqrt{-m^2 - m + 12} \Leftrightarrow -m + 12 = -m^2 - m + 12 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn)} \end{aligned}$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 14: [Số Phức 2023] Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 3m + 10 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 không phải số thực thỏa mãn $|z_1| + |z_2| \leq 8$?

A. 1

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có: $z^2 - 2mz + 3m + 10 = 0(*)$ thì $\Delta' = m^2 - 3m - 10$.

Điều kiện $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 5$.

Phương trình $(*)$ khi đó có 2 nghiệm $z_{1,2} = m \pm i\sqrt{m^2 - 3m - 10}$.

$$\text{Do đó } |z_1| + |z_2| \leq 8 \Leftrightarrow 2|z_1| \leq 8 \Leftrightarrow |z_1| \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3m + 10} \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m \leq 2.$$

Kết hợp điều kiện $-2 < m < 5$, suy ra $-2 < m \leq 2$

Vậy các giá trị nguyên của thỏa mãn là: $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Câu 15: [Số Phức 2023] Cho số phức z và số phức $w = (z - i)(\bar{z} + i) + 2z - 3i$ thỏa mãn $|w - i^{2022}| - |i^{2023} \cdot \bar{w} - 1| = 0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z - 3 + i|^2 + |\bar{z} + 1 - 3i|^2$ bằng $m + n\sqrt{5}$ với $m, n \in \mathbb{R}$. Tính $P = m.n$.

Lời giải

Gọi $w = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Hệ thức } |w - i^{2022}| - |i^{2023} \cdot \bar{w} - 1| = 0 \Leftrightarrow |w + 1| = |-i \cdot \bar{w} + i^2| \Leftrightarrow |w + 1| = |-i| \cdot |\bar{w} - i|$$

$$\Leftrightarrow |w + 1| = |\bar{w} - i| \Leftrightarrow |x + yi + 1| = |x - yi - i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow x = y$$

$\Rightarrow$ số phức w có phần thực bằng phần ảo.

Gọi $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow w &= (z - i)(\bar{z} + i) + 2z - 3i = |z|^2 + i(z - \bar{z}) + 1 + 2z - 3i = a^2 + b^2 + i(2bi) + 1 + 2(a + bi) - 3i \\ &= (a^2 + b^2 + 2a - 2b + 1) + (2b - 3)i \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } (a^2 + b^2 + 2a - 2b + 1) = (2b - 3) \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b - 2)^2 = 1 \quad (1).$$

Suy ra quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(-1; 2)$ và bán kính $R = 1$.

Biểu

thức

$$T = |z - 3 + i|^2 + |\bar{z} + 1 - 3i|^2 = |z - 3 + i|^2 + |\overline{z + 1 + 3i}|^2 = |z - 3 + i|^2 + |z + 1 + 3i|^2 = MA^2 + MB^2,$$

với điểm M biểu diễn số phức z và nằm trên đường tròn (C) có tâm $I(-1; 2)$ và bán kính $R = 1$ và điểm $A(3; -1), B(-1; -3)$

$$\text{Ta có } T = MA^2 + MB^2 = 2MK^2 + \frac{AB^2}{2} \quad (\text{với } K \text{ là trung điểm của đoạn } AB)$$

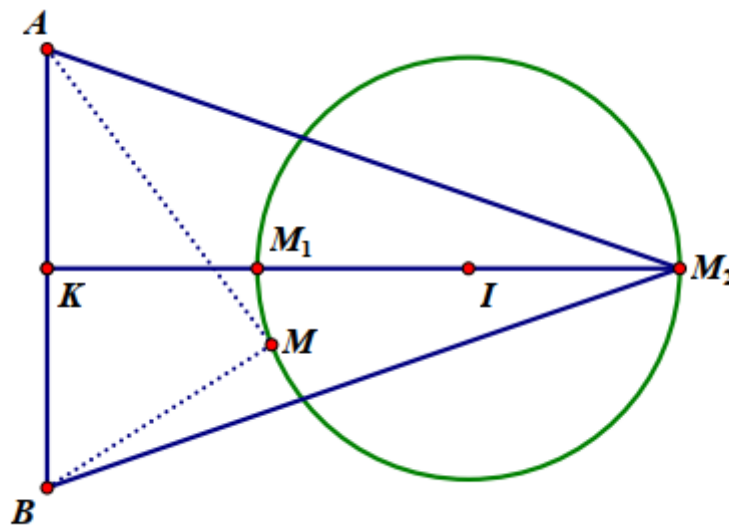
$$\text{Có } K(1; -2) \text{ và } AB = 2\sqrt{5} \text{ suy ra } T = MA^2 + MB^2 = 2MK^2 + 10$$

Suy ra $T_{\max} \Leftrightarrow MK_{\max} \Leftrightarrow K$ là hình chiếu vuông góc của M trên $AB \Leftrightarrow M, I, K$ thẳng hàng và I nằm giữa M, K .

$$\text{Mặt khác ta có } \overline{IM} = (a + 1; b - 2), \overline{IK} = (2; -4) \Rightarrow IK = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Suy ra } \overline{IM} = \frac{-1}{2\sqrt{5}} \overline{IK} \Rightarrow M \left(-1 - \frac{\sqrt{5}}{5}; 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \Rightarrow a = -1 - \frac{\sqrt{5}}{5}; b = 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } T_{\max} = 2(2\sqrt{5} + 1)^2 + 10 = 52 + 8\sqrt{5} \Rightarrow m = 52; n = 8 \Rightarrow P = m.n = 416.$$



Câu 16: [Số Phức 2023] Giả sử $z_1; z_2$ là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z - 6)(8 - i\bar{z})$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 6$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng

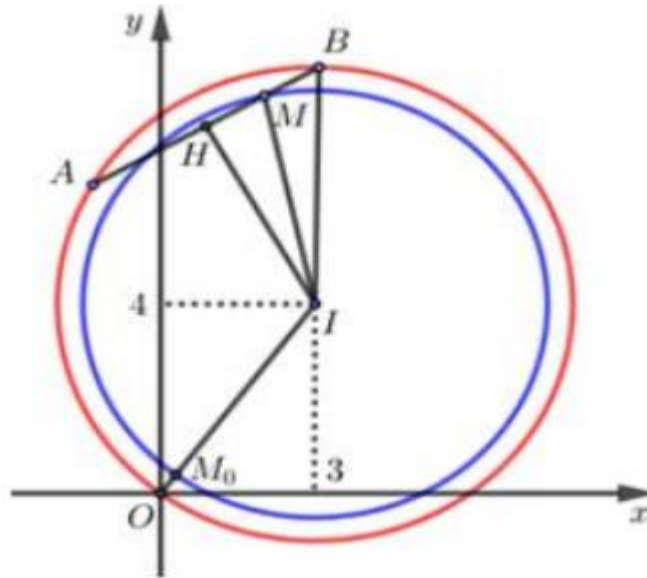
- A.** $-5 + \sqrt{73}$.

- B.** $5 - \sqrt{21}$.

- C. $20 - 2\sqrt{73}$.

- D.** $20 - 4\sqrt{21}$.

Lời giải



Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Gọi $A; B$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1; z_2$.

Ta có: $|z_1 - z_2| = 6 \Rightarrow AB = 6.$

$$\begin{aligned} \forall a \ (z-6)(8-i\bar{z}) &= (x+yi-6)(8-xi-y) = [(x-6)+yi][(8-y)-xi] \\ &= [(x-6)(8-y)+xy] + [(8-y)y-(x-6)x]i = 8x+6y-48 - (x^2+y^2-6x-8y)i \end{aligned}$$

Theo giả thiết $(z-6)(8-i\bar{z})$ là số thực nên $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

Do đó $A; B \in (C): x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ là đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R = 5$.

Xét điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{MO} + 3\overrightarrow{OB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OM}$.

Gọi H là trung điểm AB , khi đó: $HI^2 = R^2 - HB^2 = 16$,

$$IM = \sqrt{HI^2 + HM^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{73}}{2}.$$

Suy ra: Điểm M thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(3;4)$, bán kính $R_1 = \frac{\sqrt{73}}{2}$.

Ta có: $|z_1 + 3z_2| = |\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}| = |4\overrightarrow{OM}| = 4OM$

$$\Rightarrow |z_1 + 3z_2|_{\min} \Leftrightarrow 4OM_{\min} = 4|OI - R_1| = 4\left(5 - \frac{\sqrt{73}}{2}\right) = 20 - 2\sqrt{73}.$$

$$\text{Vậy } |z_1 + 3z_2|_{\min} = 20 - 2\sqrt{73}.$$

Câu 17: [Số Phức 2023] Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2, |w-3+2i|=1$ khi đó $|z^2-2zw-4|$ đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. 16.**

- B. 24 .**

- C.** $4 + 4\sqrt{13}$.

- D. 20.**

Lời giải

Chọn B

Ta có $T = |z^2 - 2zw - 4| = |z^2 - 2zw - |z|^2| = |z^2 - 2zw - z\bar{z}| = |z| \cdot |z - \bar{z} - 2w| = 2|z - \bar{z} - 2w|$

Gọi $z = x + yi \Rightarrow z - \bar{z} = 2yi$.

Vì $|z| = 2$ nên $-4 \leq 2y \leq 4$.

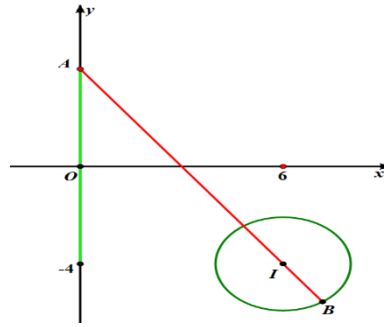
Gọi $w' = x' + y'i = 2w \Rightarrow |2w - 6 + 4i| = 2 \Rightarrow |w' - 6 + 4i| = 2 \Leftrightarrow (x' - 6)^2 + (y' + 4)^2 = 4$.

Gọi A là điểm biểu diễn của $z - \bar{z} \Rightarrow A$ thuộc trục Oy với $-4 \leq y_A \leq 4$.

Gọi B là điểm biểu diễn của $2w \Rightarrow B$ thuộc đường tròn tâm $I(6; -4)$; bán kính $R = 2$.

Khi đó $T = 2AB$.

Ta có hình vẽ:



Ta có $T_{\max} = 2AB_{\max} = 2(IA + R) = 24$ với $A(0; 4)$.

Câu 18: [Số Phức 2023] Cho số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z + \bar{z} - 2| + 3|z - \bar{z} + 4i| \leq 6$ và $|z - 1 - i| \leq |z + 3 + i|$. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x + 3y + 5$. Khi đó $M + m$ bằng:

A. $\frac{17}{5}$.

B. $\frac{33}{5}$.

C. $-\frac{13}{5}$.

D. $\frac{22}{5}$.

Lời giải

Chọn D

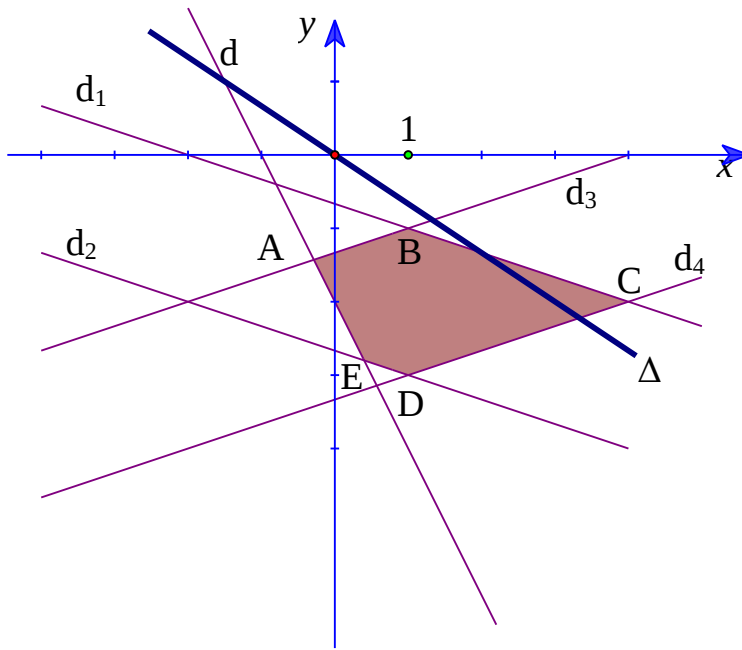
$$+) |z + \bar{z} - 2| + 3|z - \bar{z} + 4i| \leq 6 \Leftrightarrow |2x - 2| + 3|2yi + 4i| \leq 6 \Leftrightarrow |x - 1| + 3|y + 2| \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2 \leq 0 & \text{khi } x \geq 1, y \geq -2 \\ x - 3y - 10 \leq 0 & \text{khi } x \geq 1, y < -2 \\ x - 3y - 4 \geq 0 & \text{khi } x < 1, y \geq -2 \\ x + 3y + 8 \geq 0 & \text{khi } x < 1, y < -2 \end{cases}$$

$$+) |z - 1 - i| \leq |z + 3 + i| \Leftrightarrow |(x - 1) + (y - 1)i| \leq |(x + 3) + (y + 1)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \leq \sqrt{(x + 3)^2 + (y + 1)^2} \Leftrightarrow -8x - 4y - 8 \leq 0 \Leftrightarrow 2x + y + 2 \geq 0$$

+) Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là ngũ giác $ABCDE$ (như hình vẽ). Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = 2x + 3y + 5$ đạt được tại hai đỉnh của ngũ giác $ABCDE$



$$d: 2x + y + 2 = 0$$

$$d_1: x + 3y + 2 = 0$$

$$d_2: x + 3y + 8 = 0$$

$$d_3: x - 3y - 4 = 0$$

$$d_4: x - 3y - 10 = 0$$

$$\Delta: 2x + 3y = 0$$

+) Biểu thức $P = 2x + 3y + 5$ đạt giá trị lớn nhất là $M = P_{\max} = 7$ khi $x = 4, y = -2$ (tại C).

Biểu thức $P = 2x + 3y + 5$ đạt giá trị nhỏ nhất là $m = P_{\min} = -\frac{13}{5}$ khi $x = \frac{2}{5}, y = -\frac{14}{5}$ (tại E).

$$\text{Suy ra } M + m = \frac{22}{5}.$$

Câu 19: [Số Phức 2023] Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - \sqrt{m+1}z - \frac{1}{4}(m^2 - 5m - 6) = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10; 10]$ để phương trình trên có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| \leq |z_1 - z_2|$?

A. 11.

B. 10.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1. \Delta = m^2 - 4m - 5$$

$$+ \text{ Trường hợp 1: } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ m \leq -1 \end{cases} \text{ phương trình có 2 nghiệm thực } z_1, z_2$$

$$\text{Theo định lý Viet } z_1 \cdot z_2 = -\frac{1}{4}(m^2 - 5m - 6).$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 \leq |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow 4z_1 \cdot z_2 \leq 0$$

$$-(m^2 - 5m - 6) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq -1 \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10; 10]$ nên số giá trị m thỏa mãn là $(10 - 6) + 1 + 1 = 6$.

$$+ \text{ Trường hợp 2: } \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 5.$$

phương trình có 2 nghiệm phức z_1, z_2

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 \leq |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow m+1 \leq |m^2 - 4m - 5|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m - 6 \geq 0 \\ m^2 - 3m - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq -1 \\ -1 \leq m \leq 4 \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z}, -1 < m < 5$ và $m \in [-10; 10]$ nên số giá trị m thỏa mãn là $m = 0, m = 1, m = 2, m = 3$.
Vậy có 10 giá trị của m .

Câu 20: [Số Phức 2023] Cho M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $|5z_1 + 9 - 3i| = 5|\bar{z}_1|, |z_2 - 2| = |z_2 - 3 - i|, |z_3 + 1| + |z_3 - 3| = 4$. Khi M, N, P không thẳng hàng, giá trị nhỏ nhất của nửa chu vi p của tam giác MNP là

A. $\frac{10\sqrt{5}}{9}$.

B. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{9\sqrt{10}}{10}$.

D. $\frac{5\sqrt{11}}{13}$.

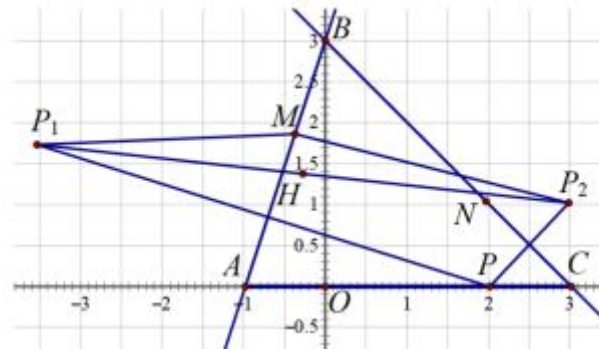
Lời giải

Trong mặt phẳng Oxy , gọi $A(-1;0), B(0;3), C(3;0)$ và M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, z_3 . Ta có

Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z_1 là đường thẳng AB .

Tập hợp điểm N biểu diễn số phức z_2 là đường thẳng BC .

$|z_3 + 1| + |z_3 - 3| = 4 \Leftrightarrow PA + PC = AC \Rightarrow$ Tập hợp điểm P biểu diễn số phức z_3 là đoạn AC .



Khi đó $p = \frac{MN + NP + PM}{2}$.

Gọi P_1, P_2 lần lượt đối xứng với P qua AB, BC . Ta có $MP = MP_1, NP = NP_2$.

Khi đó $MN + NP + PM = P_1M + MN + NP_2 \geq P_1P_2$.

Ta thấy $P_1BP_2 = P_1BA + ABC + CBP = PBA + ABC + PBC = 2ABC$.

Theo định lí Sin: $\frac{AB}{\sin BCA} = \frac{AC}{\sin ABC} \Rightarrow \sin ABC = \frac{AC \sin BCA}{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Gọi H là trung điểm của P_1P_2 , khi đó

$$P_1P_2 = 2P_2H = 2BP_2 \cdot \sin P_2BH = 2BP \cdot \sin ABC = 2BP \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5} BP \geq \frac{4\sqrt{5}}{5} BO = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của p là $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

Câu 21: [Số Phức 2023] Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z + w| = \sqrt{10}$, $|2z + w| = \sqrt{17}$ và $|\bar{z} - 3\bar{w}| = \sqrt{146}$. Tính giá trị của biểu thức $P = z.\bar{w} + \bar{z}.w$.

A. $P = -14$.

B. $P = 14$.

C. $P = 16$.

D. $P = -8$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z = a + bi$ và $w = x + yi$ với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

Theo đề ta có:

$$|z + w| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (a + x)^2 + (b + y)^2 = 10 \Leftrightarrow a^2 + 2ax + x^2 + b^2 + 2by + y^2 = 10 \quad (1)$$

$$|2z + w| = \sqrt{17} \Leftrightarrow (2a + x)^2 + (2b + y)^2 = 17 \Leftrightarrow 4a^2 + 4ax + x^2 + 4b^2 + 4by + y^2 = 17 \quad (2)$$

$$|\bar{z} - 3\bar{w}| = \sqrt{146} \Leftrightarrow (a - 3x)^2 + (b - 3y)^2 = 146 \Leftrightarrow a^2 - 6ax + 9x^2 + b^2 - 6by + 9y^2 = 146 \quad (3)$$

Lấy $35.(1) - 8.(2) - 3.(3)$ về theo về ta được:

$$56.ax + 56.by = -224 \Leftrightarrow ax + by = -4$$

$$\text{Ta có } P = z.\bar{w} + \bar{z}.w = (a + bi).(x - yi) + (a - bi).(x + yi) = 2.ax + 2.by = -8$$

Cách 2:

$$|z + w| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |z + w|^2 = 10 \Leftrightarrow (z + w)(\overline{z + w}) = 10$$

$$\Leftrightarrow (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = 10 \Leftrightarrow |z|^2 + P + |w|^2 = 10 \quad (1)$$

Tương tự

$$|2z + w| = \sqrt{17} \Leftrightarrow 4|z|^2 + 2P + |w|^2 = 17 \quad (2)$$

$$|\bar{z} - 3\bar{w}| = \sqrt{146} \Leftrightarrow |z|^2 - 3P + 9|w|^2 = 146 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 5 \\ P = -8 \\ |w|^2 = 13 \end{cases}.$$

Vậy $P = -8$.