**Đề 61**

**ĐỀ HSG TOÁN 9 TỈNH HÒA BÌNH 2023-2024**

**Câu 1**. (4,0 điểm):

 Cho biểu thức $A=\left(\frac{\sqrt{x}+4}{x-4}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right):\left(1-\frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}\right)$ (với $x\geq 0, x\ne 4$).

1. Rút gọn biểu thức $A$.
2. Tìm các giá trị nguyên của $x$ để biểu thức $A$ nhận giá trị nguyên.
3. Tìm $x$ sao cho $\frac{1}{(x-1).A}\geq 0.$

Câu 2 (6,0 điểm):

 1. Tìm $m$ để khoảng cách từ gốc toạ độ $O$ đến đồ thị hàm số $y= (m-1)x+2$ bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$ .

 2. Cho hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}mx-2y=2\\2x+my=5\end{array}\right.$ (với $m$ là tham số). Tìm $m$ để hệ phương trình đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $x+y=\frac{5}{2}$.

 3. Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, đường cao $AH$. Cho biết $BC=13 cm$ và $AH=6 cm.$ Tính độ dài đoạn thẳng $HB$ và $HC$.

Câu 3 (4,0 điểm):

1. Hưởng ứng tháng Thanh niên, nhà trường dự kiến tổ chức cho những học sinh lớp 9A đủ điều kiện kết nạp Đoàn đợt 26/3 một buổi lao động cộng sản trồng 18 cây xanh. Đến ngày lao động, có 3 bạn bị nhiễm Covid 19 nên không tham gia trồng cây được, do đó mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 1 cây mới đảm bảo kế hoạch đặt ra *(số cây mỗi học sinh trồng được bằng nhau)*. Hỏi thực tế có bao nhiêu học sinh đã tham gia trồng cây?
2. Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x\left(x^{2}+x+1\right)=4^{y}-1$.

Câu 4 (4,0 điểm):

Cho đường tròn $(O,R)$. Từ một điểm $M$ nằm ngoài đường tròn, kẻ 2 tiếp tuyến $MA, MB$ đến $(O)$ $(A,B là các tiếp điểm).$ Qua $A$ kẻ đường thẳng song song với $MO$ cắt đường tròn $(O)$ tại $E (E khác A)$. Đường thẳng $ME$ cắt đường tròn $(O)$ tại $F (F khác E)$. Đường thẳng $AF$ cắt $MO$ tại $N$. Gọi $H$ là giao điểm của $MO$ và $AB$.

1. Chứng minh $MN^{2}=NA.NF.$
2. Chứng minh $\hat{HFN}=90°$ và $MN=NH$.
3. Chứng minh $\frac{HB^{2}}{HF^{2}}-\frac{EF}{MF}=1.$

Câu 5 (2,0 điểm):

1. Giải phương trình $2x^{2}-2x+2=\left(2x+1\right)\left(\sqrt{x^{2}-x+3}-1\right).$
2. Cho $a, b, c$ là các số thực dương thoả mãn $a+2b+3c\geq 11$. Chứng minh rằng:

$a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{1}{4c}\geq \frac{37}{4}$.

**---Hết---**

**ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 061**

 UBND TỈNH HÒA BÌNH  **HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC**

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH**

 **NĂM HỌC 2021-2022**

 **MÔN THI: TOÁN**

 **Ngày thi: 05/04/2022**

 *(Hướng dẫn chấm gồm có 05 trang)*

Câu 1: (4,0đ)

1. *A* = $\left(\frac{\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}+\frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} +2)}\right)$ : $\left(\frac{\sqrt{x} + 2 - 2\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 2}\right)$

 = $\frac{2\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$ . $\frac{\sqrt{x} - 2}{- \sqrt{x} - 3}$ = $\frac{2}{2 - \sqrt{x}}$

2. *A* = $\frac{2}{2 -\sqrt{x}}$ là số nguyên thì ($2-\sqrt{x}$) ∈ *U* (2) = $\left\{\pm 1;\pm 2\right\}$

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 - $\sqrt{x}$ | -2 | -1 | 1 | 2 |
| x | 16 | 9 | 1 | 0 |

Vậy x ∈ $\left\{0;1;9;16\right\}$

3. $\frac{1}{(x - 1). A}\geq $ 0 $⇔$ $\frac{2 - \sqrt{x}}{2(x - 1)}\geq 0$ $⇔$ $\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1}\leq 0$

$⇔$ $[\_{\{\_{x - 1 > 0}^{\sqrt{x} - 2 \leq 0}}^{\{\_{x - 1 > 0}^{\sqrt{x} - 2 \geq 0}}$ $⇔$ $[\_{\{\_{x > 1}^{x \leq 4}}^{\{\_{x < 1}^{x \geq 4} (KTM)}$ $⇔$ 1$<$ x $\leq $ 4

kết hợp với điều kiện ta cho, ta được: 1$<$ x $<$ 4

Câu 2 (6,0đ)

Đặt (d): y = (m-1)x + 2

+ Với m = 1 thì (d): y = 2, khoảng cách từ O đến (d) bằng 2, không thỏa mãn

+ Với m $\ne $ 1. Ta có:

Giao điểm (d) với Ox: A$\left(\frac{-2}{m-1};0\right)$ $⇒$ OA= $\left|\frac{-2}{m-1}\right|$=$\frac{2}{\left|m-1\right|}$

Giao điểm (d) với Oy: B(0;2) $⇒$ OB = 2

+ Kẻ OH $⊥$ (d)

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OAB, ta có:

$\frac{1}{OH^{2}}$= $\frac{1}{OA^{2}}$ + $\frac{1}{OB^{2}}$ $⇒$ $\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{2}}$ = $\frac{1}{\left(\frac{2}{\left|m-1\right|}\right)^{2}}$ + $\frac{1}{2^{2}}$

$\frac{5}{4}$ = $\frac{(m-1)^{2}}{4}$ + $\frac{1}{4}$ $⇔$ $[\_{ m = -1}^{ m = 3}$ . Vậy m $\in $ $\left\{-1;3\right\}$

2. Giải hệ, được nghiệm duy nhất (x;y) = $\left(\frac{2m + 10}{m^{2}+ 4};\frac{5m - 4}{m^{2}+ 4}\right)$ với mọi m

Biến đổi x+y= $\frac{5}{2}$ trở thành $\frac{2m + 10}{m^{2}+ 4}+\frac{5m - 4}{m^{2}+ 4}$ = $\frac{5}{2}$ $⇔$ $5m^{2}$ - 14m + 8 = 0

Giải được m = 2, m = $\frac{4}{5}$

3. Ta có:



+ HB.HC = $AH^{2}$ = 36 (1)

+ HB + HC = BC = 13 (2)

+ Từ (1),(2) tính được:

HB = 4cm, HC = 9cm

Câu 3 (4,0đ)

1.Gọi số học sinh đã tham gia trồng cây là x, điều kiện x nguyên dương

 Số học sinh dự kiến: x + 3

 Số cây mỗi học sinh phải trồng theo dự kiến: $\frac{18}{x + 3}$

 Số cây thực tế mỗi học sinh trồng được: $\frac{18}{x}$

 Theo bài ra, ta có phương trình: $\frac{18}{x}$ - $\frac{18}{x + 3}$ = 1

 Giải phương trình ta được:

 x = -9 (loại)

 x = 6 (thỏa mãn)

Vậy số học sinh thực tế đã tham gia trồng cây là 6 học sinh

2.Biến đổi phương trình về dạng (x+1)($x^{2}$+1) = $4^{y}$

+ Với x nguyên thì vế trái PT (\*) là số nguyên. Nếu y $<$ 0 thì vế phải PT(\*) bằng $4^{y}$ không là số nguyên nên PT (\*) không thỏa mãn

Vậy y $\geq $ 0. Khi đó $4^{y}$ > 0 nên x $\geq $ 0

+ Với y = 0 thì x = 0.Ta được (x; y) = (0;0) là một nghiệm của PT(\*)

+ Với y $\geq $ 1 thì $4^{y}$ là số chẵn. Suy ra (x+1)($x^{2}$+1) cũng là số chẵn, nên x là số lẻ.

Đặt x = 2k+1, k $\in $ Z,k $\geq $0

Khi đó (2k+2)($4k^{2}$+4k+2) = $4^{y}$ $⇔$ (k+1)($2k^{2}$+2k+1) = $4^{y-1}$

* Khi y=1 thì (k+1)($2k^{2}$+2k+1) = 1 $⇔$ $2k^{3}$+$4k^{2}$+3k = 0 $⇔$ k = 0

Khi đó x=1. Ta được (x;y) = (1;1) là một nghiệm của PT(\*)

* Khi y > 1 thì $2k^{2}$+2k+1 là một số lẻ và là ước của $4^{y-1}$, mà $4^{y-1}$ chỉ có một ước nguyên dương lẻ duy nhất là 1, nên $2k^{2}$+2k+1 = 1 $⇒$ k = 0

Khi đó x=1, y=1 (loại do y > 1).

Vậy PT có 2 nghiệm (0;0) và (1;1).

Câu 4 (4,0đ)



1. Xét $ΔANM$ và $ΔMNF$, có:

+ Góc $\hat{N}$ chung (1)

+ Trong đường tròn (O): $\hat{MAN}$ = $\hat{AEF}$ = $\frac{1}{2}$sđ $\hat{AF}$ ;

Lại có AE⫽MO nên $\hat{FMN}$ = $\hat{AEF}$ (so le trong)

Suy ra $\hat{MAN}$ = $\hat{FMN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $ΔANM$ $∼$ $ΔMNF$ (g.g)

Suy ra $\frac{AN}{MN}$ = $\frac{MN}{NF}$ $⇒$ $MN^{2}$= NA.NF

2. Ta có AE⫽MO. Mà MO $⊥$ AB nên AE $⊥$ AB

Suy ra BE là đường kính của (O)

+ Chứng minh được tứ giác MFHB nội tiếp ($\hat{MFB}$ = $\hat{MHB}$ = $90^{o}$)

Suy ra $\hat{HFE}$ = $\hat{HBM}$ (góc ngoài tại đỉnh F bằng góc trong của đỉnh đối diện) (3)

+ $\hat{AFE}$ = $\hat{ABE}$ = $\frac{1}{2}$sđ $\hat{AE}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\hat{HFA}$ = $90^{o}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác AHN vuông tại H, đường cao HF, ta có

 $NH^{2}$= NA.NF (5)

Mà $MN^{2}$= NA.NF (chứng minh phần 1)

Vậy NH=NM

3. Ta có HA=HB (vì MA, MB là 2 tiếp tuyến của (O))

 Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHN, ta có:
 $HB^{2}$= $HA^{2}$= AF.AN

 $HF^{2}$= FA.FN

Suy ra $\frac{HB^{2}}{HF^{2}}$ = $\frac{AN}{FN}$ = 1+$ \frac{FA}{FN}$ (6)

Lại có AE⫽MN $⇒$ $\frac{FE}{FM}$ = $\frac{FA}{FN}$ (7)

Từ (6) và (7) suy ra $\frac{HB^{2}}{HF^{2}}$ - $\frac{FE}{FM}$ = 1.

Câu 5 (2,0đ)

1. Đặt $\sqrt{x^{2}-x+3}$ = t, (t $\geq $ 0)

Biến đổi PT đã cho về dạng: ($x^{2}$ - x +3) + $x^{2}$ - x - 1 = (2x-1)$\sqrt{x^{2}-x+3}$ - 2x - 1

PT trở thành: $t^{2}$ - (2x-1)t +$x^{2}$ + x = 0

Giải được $[\_{ t = x + 1}^{ t = x}$

+ $\sqrt{x^{2}-x+3}$ = x $⇔$ $\{\_{x^{2} - x +3 = x^{2}}^{ x \geq 0}$ $⇔$ x = 3

+ $\sqrt{x^{2}-x+3}$ = x + 1 $⇔$ $\{\_{x^{2} - x +3 = x^{2}+ 2x + 1}^{ x \geq -1}$ $⇔$ x = $\frac{2}{3}$

Vậy PT có 2 nghiệm x = $\frac{2}{3}$, x = 3

2. M = a + b + c + $\frac{3}{a}$ + $\frac{9}{2b}$ + $\frac{1}{4c}$ = $\left(\frac{3}{4}a+\frac{3}{a}\right)$ + $\left(\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\right)$ + $\left(\frac{c}{4}+\frac{1}{4c}\right)$ + $\frac{1}{4}$(a + 2b + 3c)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương và giả thiết a + 2b + 3c $\geq $ 11, ta có:

 M $\geq $ 2.$\sqrt{\frac{3a}{4}.\frac{3}{a}}$ + 2$\sqrt{\frac{b}{2}.\frac{9}{2b}}$ + 2$\sqrt{\frac{c}{4}.\frac{1}{4c}}$ + $\frac{1}{4}$ . 11 = 3 + 3 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{11}{4}$ = $\frac{37}{4}$

Dấu “=” xảy ra khi a =2, b = 3, c = 1.

*Ghi chú: Mọi cách làm đúng khác hướng dẫn trên đều cho điểm tối đa*