

BÀI 17. HÀM SỐ LIÊN TỤC

CHƯƠNG 5. GIỚI HẠN

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{neá } x < 0 \\ 0 & \text{neá } x = 0 \\ x^2 & \text{neá } x > 0 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 0.$$

Câu 1. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Xét tính liên tục của hàm số

Lời giải:

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, do đó $x_0 = 0$ thuộc tập xác định của hàm số.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^2 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$

Do đó, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, suy ra $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Lại có $f(0) = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Câu 2. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục tại $x = 1$. Biết $f(1) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) - g(x)] = 3$. Tính $g(1)$.

Lời giải

Vì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên hàm số $2f(x)$ cũng liên tục tại $x = 1$.

Mà hàm số $g(x)$ liên tục tại $x = 1$. Do đó, hàm số $y = 2f(x) - g(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) - g(x)] = 2f(1) - g(1)$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) - g(x)] = 3$ và $f(1) = 2$ nên ta có $3 = 2 \cdot 2 - g(1) \Leftrightarrow g(1) = 1$.

Vậy $g(1) = 1$.

Câu 3. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0,5 km đầu)	Giá cước các km tiếp theo đến 30 km	Giá cước từ km thứ 31
10000 đồng	13500 đồng	11000 đồng

a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.

b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

Lời giải

a) Gọi x (km, $x > 0$) là quãng đường khách di chuyển và y (đồng) là số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển x .

Với $x \leq 0,5$, ta có $y = 10000$.

Với $0,5 < x \leq 30$, ta có: $y = 10000 + 13500(x - 0,5)$ hay $y = 13500x + 3250$.

Với $x > 30$, ta có: $y = 10000 + 13500 \cdot 29,5 + 11000(x - 30)$ hay $y = 11000x + 78250$.

Vậy công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển là

$$y = \begin{cases} 10000, & 0 < x \leq 0,5 \\ 13500x + 3250, & 0,5 < x \leq 30 \\ 11000x + 78250, & x > 30 \end{cases}$$

b) +) Với $0 < x < 0,5$ thì $y = 10000$ là hàm hằng nên nó liên tục trên $(0; 0,5)$.

+) Với $0,5 < x < 30$ thì $y = 13500x + 3250$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(0,5; 30)$.

+) Với $x > 30$ thì $y = 11000x + 78250$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(30; +\infty)$.

+) Ta xét tính liên tục của hàm số tại $x=0,5$ và $x=30$.

- Tại $x=0,5$, ta có $y(0,5)=10000$;

$$\lim_{x \rightarrow 0,5^-} y = \lim_{x \rightarrow 0,5^-} 10000 = 10000$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,5^+} y = \lim_{x \rightarrow 0,5^+} (13500x + 3250) = 13500 \cdot 0,5 + 3250 = 10000$$

Do đó, $\lim_{x \rightarrow 0,5^-} y = \lim_{x \rightarrow 0,5^+} y = \lim_{x \rightarrow 0,5} y = y(0,5)$ nên hàm số liên tục tại $x=0,5$.

- Tại $x=30$, ta có: $y(30)=13500 \cdot 30 + 3250 = 408250$;

$$\lim_{x \rightarrow 30^-} y = \lim_{x \rightarrow 30^-} (13500x + 3250) = 13500 \cdot 30 + 3250 = 408250$$

$$\lim_{x \rightarrow 30^+} y = \lim_{x \rightarrow 30^+} (11000x + 78250) = 11000 \cdot 30 + 78250 = 408250$$

Do đó, $\lim_{x \rightarrow 30^-} y = \lim_{x \rightarrow 30^+} y = \lim_{x \rightarrow 30} y = y(30)$ nên hàm số liên tục tại $x=30$.

Vậy hàm số ở câu a liên tục trên $(0; +\infty)$.

Câu 4. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm x_0 .

a.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{khi } x \neq 5 \\ 9 & \text{khi } x = 5 \end{cases}$$
 Tại $x_0 = 5$

b.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$
 Tại $x_0 = 2$

c.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{3}{4} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$
 Tại $x_0 = 2$

d.
$$f(x) = \begin{cases} x^4 + x^2 - 1 & \text{khi } x \leq -1 \\ 3x + 2 & \text{khi } x > -1 \end{cases}$$
 Tại $x_0 = -1$

Lời giải

a.
$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10 \neq 9 = f(5)$$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0 = 5$.

b.
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1 - \sqrt{2x - 3})(1 + \sqrt{2x - 3})}{(2 - x)(1 + \sqrt{2x - 3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - 2x}{(2 - x)(1 + \sqrt{2x - 3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(1 + \sqrt{2x - 3})} = 1 = f(2)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

c.
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{3x+2} - 2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2)}{(x - 2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{(x - 2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{4} = f(2)$$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0 = 2$.

d. $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x^4 + x^2 - 1) = 1; \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x + 1) = -2$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0 = -1$

Câu 5. Tìm a để hàm số liên tục tại điểm x_0 .

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ Tại $x_0 = 2$

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ a + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ Tại $x_0 = 1$

c. $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \frac{2}{3} & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ Tại $x_0 = 2$

d. $f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ Tại $x_0 = 2$

Lời giải

a. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(\sqrt{x+2}+2)(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x+2}+2)(x+2)} = \frac{1}{16}$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = a \Leftrightarrow a = \frac{1}{16}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x-1} = -\infty$

Như vậy không tồn tại giá trị nào của a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$

c. Có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(ax^2 + \frac{2}{3} \right) = 4a + \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt[3]{4x} - 2)(\sqrt[3]{(4x)^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4)}{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt[3]{(4x)^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x - 8}{(\sqrt[3]{(4x)^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4)(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{(\sqrt[3]{(4x)^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4)(x-1)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4a + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{12}$

d. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(ax + \frac{1}{4} \right) = 2a + \frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt[3]{3x+2} - 2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}{(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)} = \frac{1}{4}$$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2a + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = 0$

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x-5 & \text{khi } x \leq -2 \\ ax-1 & \text{khi } x > -2 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -2$?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và $x = -2 \in D$.

Ta có: $f(-2) = -11$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (3x-5) = -11$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (ax-1) = -2a-1$$

Để hàm số liên tục tại $x = -2$ thì $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \Leftrightarrow -2a-1 = -11 \Leftrightarrow a = 5$

Vậy hàm số liên tục tại $x = -2$ khi $a = 5$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \frac{1-x}{1+x} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$$

Câu 7. Tìm các giá trị của m để hàm số liên tục tại $x = 0$?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ và $x = 0 \in D$.

$$f(0) = m+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(m + \frac{1-x}{1+x} \right) = m+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = -1$$

Để hàm liên tục tại $x = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m+1 = -1 \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy $m = -2$ thỏa mãn đề bài.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{6x-5} - \sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2019m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Câu 8. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại $x = 1$?

Lời giải

Hàm số xác định tại $x = 1$.

Ta có $f(1) = 2019m$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{6x-5} - \sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$.

Đặt $t = x - 1$ thì $x = t + 1$, $x \rightarrow 1$ thì $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} &= \frac{\sqrt[3]{6t+1}-\sqrt{4t+1}}{t^2} = \frac{\sqrt[3]{6t+1}-(2t+1)}{t^2} + \frac{(2t+1)-\sqrt{4t+1}}{t^2} \\ &= \frac{6t+1-(8t^3+12t^2+6t+1)}{t^2 \left[\sqrt[3]{(6t+1)^2} + (2t+1)\sqrt[3]{6t+1} + (2t+1)^2 \right]} + \frac{(4t^2+4t+1)-(4t+1)}{t^2(2t+1+\sqrt{4t+1})} \\ &= \frac{-8t-12}{\left[\sqrt[3]{(6t+1)^2} + (2t+1)\sqrt[3]{6t+1} + (2t+1)^2 \right]} + \frac{4}{(2t+1+\sqrt{4t+1})}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{-8t-12}{\left[\sqrt[3]{(6t+1)^2} + (2t+1)\sqrt[3]{6t+1} + (2t+1)^2 \right]} + \frac{4}{(2t+1+\sqrt{4t+1})} \right) = -2$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x=1 \text{ khi } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} \Leftrightarrow 2019m = -2 \Leftrightarrow m = \frac{-2}{2019}$$

Dạng 2: Xét tính liên tục của hàm số trên khoảng, nửa khoảng, đoạn

Câu 9. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Tìm các khoảng trên đó hàm số $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$ liên tục.

Lời giải

Biểu thức $\frac{x^2+1}{x+2}$ có nghĩa khi $x+2 \neq 0$ hay $x \neq -2$.

Do đó, tập xác định của hàm số $f(x)$ là $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Câu 10. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+5x+6}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ 4-x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$

Lời giải

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+5x+6}$

Biểu thức $\frac{x}{x^2+5x+6}$ có nghĩa khi $x^2+5x+6 \neq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -3 \end{cases}$

Do đó, tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{-3; -2\} = (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Vì $f(x)$ là hàm phân thức hữu tỉ nên nó liên tục trên tập xác định.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

b) $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ 4-x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

+) Nếu $x < 1$, thì $f(x) = 1+x^2$.

Đây là hàm đa thức nên có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Vậy nó liên tục trên $(-\infty; 1)$.

+) Nếu $x > 1$, thì $f(x) = 4-x$.

Đây là hàm đa thức nên có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Vậy nó liên tục trên $(1; +\infty)$.

+) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - x) = 4 - 1 = 3$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 + x^2) = 1 + 1^2 = 2$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, do đó không tồn tại giới hạn của $f(x)$ tại $x = 1$.

Khi đó, hàm số $f(x)$ không liên tục tại $x = 1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ và gián đoạn tại $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x + m & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Câu 11. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Tìm giá trị của tham số m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

+) Nếu $x > 0$, thì $f(x) = \sin x$. Do đó nó liên tục trên $(0; +\infty)$.

+) Nếu $x < 0$, thì $f(x) = -x + m$, đây là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(-\infty; 0)$.

Khi đó, hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Do đó, để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $f(x)$ phải liên tục tại $x = 0$. Điều này xảy ra khi và chỉ

khi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) (1)$

Lại có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0$; $f(0) = \sin 0 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x + m) = m$.

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow m = 0$.

Vậy $m = 0$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Chứng minh rằng hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases}$$

a.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

b.

Lời giải

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1} \text{ xác định với mọi } x \neq -1 \Rightarrow \text{hàm } f(x) \text{ liên tục với mọi } x \neq -1.$$

a, Hàm số

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{1}{(x^2-x+1)} \right) = \frac{4}{3} = f(-1)$$

Có

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = -1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$$

b, Hàm số xác định với mọi $x \geq -1; x \neq 0 \Rightarrow$ hàm $f(x)$ liên tục với mọi $x \geq -1; x \neq 0$.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} + 1)(\sqrt[3]{x+1} - 1)(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} + 1)x} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=0$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 13. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Lời giải

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

+ Trên khoảng $(-\infty; 1)$: $f(x) = 2x + 4$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$.

+ Trên khoảng $(1; +\infty)$: $f(x) = x^3 + x + 1$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(1; +\infty)$.

+ Tại điểm $x_0 = 1$, ta có: $f(1) = 1^3 + 1 + 1 = 3$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 4) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x + 1) = 3$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Vậy hàm số không liên tục tại điểm $x_0 = 1$. Tóm lại $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ và gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 4 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$$

Câu 14. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 4 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Lời giải

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ Nếu $x \neq 3$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$. Vì $f(x)$ là thương của 2 đa thức, đồng thời mẫu số $x - 3 \neq 0$ nên $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$. (1)

+ Nếu $x = 3$ ta có $f(3) = 4$ và

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 4$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 4$ nên $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 15. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Lời giải

Tập xác định: $D = [-1; 1]$.

$$\forall x_0 \in (-1; 1), \text{ ta có } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x_0^2} = f(x_0)$$

Suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(-1; 1)$.

$$\text{Mặt khác: } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(-1); \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(1)$$

Vậy hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Câu 16. Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ với

Lời giải

+ Khi $x < 1$ thì $f(x) = 2x + a$ là hàm đa thức nên liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

+ Khi $x > 1$ thì $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên khoảng $(1; +\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

+ Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x = 1$, ta có:

$$* f(1) = 2 + a$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + a) = 2 + a$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+2) = 3$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 2 = 3 \Leftrightarrow a = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{9-x}}{x}, & 0 < x < 9 \\ m, & x = 0 \\ \frac{3}{x}, & x \geq 9 \end{cases}$$

Câu 17. Cho hàm số

Tìm m để $f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$.

Lời giải

+ TXĐ: $D = [0; +\infty)$

+ Với $x \geq 9$ thì $f(x) = \frac{3}{x}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên nửa khoảng $[9; +\infty)$ nên liên tục trên nửa khoảng $[9; +\infty)$.

+ Với $0 < x < 9$ thì $f(x) = \frac{3 - \sqrt{9-x}}{x}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên khoảng $(0; 9)$ nên liên tục trên khoảng $(0; 9)$.

+ Tại điểm $x = 0$:

$$\text{Ta có } f(0) = m \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 - \sqrt{9-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3 + \sqrt{9-x}} = \frac{1}{6}$$

Vậy để hàm số liên tục trên $[0; +\infty)$ thì khi hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m = \frac{1}{6}$.

Dạng 3: Chứng minh phương trình có nghiệm

Câu 18. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Một người lái xe từ địa điểm A đến địa điểm B trong thời gian 3 giờ. Biết quãng đường từ A đến B dài 180 km . Chứng tỏ rằng có ít nhất một thời điểm trên hành trình, xe chạy với vận tốc 60 km/h .

Lời giải

Áp dụng định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Câu 19. Chứng minh rằng các phương trình luôn có nghiệm:

a. $x^4 - 3x + 1 = 0$ b. $x^5 - 10x^3 + 100 = 0$

Lời giải

a. Hàm số $f(x) = x^4 - 3x + 1$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

$$f(0) = 1; f(1) = -1$$

$$\Rightarrow f(0).f(1) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (0; 1) \mid f(x_0) = 0$$

Như vậy phương trình $f(x) = 0$ tồn tại ít nhất 1 nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 5)$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có nghiệm.

b. Hàm số $f(x) = x^5 - 10x^3 + 100$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

$$f(0) = 100; f(-10) = -89900$$

$$\Rightarrow f(0).f(10) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (-10; 0) \mid f(x_0) = 0$$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ tồn tại ít nhất 1 nghiệm nằm trong khoảng $(-10; 0) \Rightarrow$ Phương trình luôn có nghiệm.

Câu 20. Chứng minh rằng phương trình $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải

Đặt $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - x - 3$.

+ Hàm số $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - x - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[-1; 0]$, $[0; 1]$.

+ Ta có $f(-1) = 4$, $f(0) = -3$, $f(1) = 2$

Vì $f(-1).f(0) < 0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Vì $f(0).f(1) < 0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Mà $(-1; 0)$ và $(0; 1)$ là hai khoảng phân biệt.

Vậy phương trình $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

Câu 21. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có đúng 5 nghiệm.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - 1$.

+ Hàm số $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = x(x^2 - 1)(x^2 - 4) - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có $f(-2) = -1 < 0$, $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{105}{32} - 1 = \frac{73}{32} > 0$, $f(-1) = -1 < 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32} - 1 = \frac{13}{32} > 0$,
 $f(1) = -1 < 0$, $f(3) = 119 > 0$.

Vì $f(-2) \cdot f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$.

Vì $f\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot f(-1) < 0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$.

Vì $f(-1) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Vì $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Vì $f(1) \cdot f(3) < 0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(1; 3)$.

Do các khoảng $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$; $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; $(1; 3)$ không giao nhau nên phương trình có ít nhất 5 nghiệm.

Mà phương trình đã cho là phương trình bậc 5 có không quá 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

Câu 22. Chứng minh rằng phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Đặt $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$.

+ Hàm số $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $[-1; 0]$.

+ Ta có: $f(0) = -1$

$f(-1) = m^2 + 1 > 0, \forall m$ nên $f(0) \cdot f(-1) < 0$

Vậy phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$ nên phương trình luôn có nghiệm.

Câu 23. Chứng minh rằng phương trình: $(m^2 + m + 1)x^4 + 2x - 2 = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Đặt $f(x) = (m^2 + m + 1)x^4 + 2x - 2$.

+ Hàm số $f(x) = (m^2 + m + 1)x^4 + 2x - 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $[0; 1]$.

+ Ta có

$f(0) = -2$

$f(1) = m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m$

Nên $f(0) \cdot f(1) < 0$

Vậy phương trình $(m^2 + m + 1)x^4 + 2x - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0; 1)$ nên phương trình luôn có nghiệm.

Câu 24. Chứng minh rằng phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ luôn có 3 nghiệm.

Lời giải

Đặt $f(x) = (m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1$.

+ Hàm số $f(x) = (m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có: $f(x) = m^2(x^3 - 2x^2 + 1) + x^3 - 4x + 1$
 $f(-3) = -44m^2 - 14 < 0; \forall m$

$$f(0) = m^2 + 1 > 0, \forall m$$

$$f(1) = -2$$

$$f(2) = m^2 + 1 > 0; \forall m$$

Vì $f(-3).f(0) < 0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(-3; 0)$.

Vì $f(0).f(1) < 0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Vì $f(1).f(2) < 0$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

Vậy phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm trong khoảng $(-3; 2)$, mà phương trình đã cho là bậc 3 nên phương trình có đúng 3 nghiệm.

Câu 25. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $12a + 15b + 20c = 0$. Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm thuộc $\left[0; \frac{4}{5}\right]$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$.

+ Hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25}a + \frac{4}{5}b + c$ nên $\frac{75}{4}f\left(\frac{4}{5}\right) = 12a + 15b + \frac{75}{4}c$.

$$f(0) = c \quad \text{nên} \quad \frac{5}{4}f(0) = \frac{5}{4}c$$

$$\text{Do đó} \quad \frac{75}{4}f\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{5}{4}f(0) = 12a + 15b + 20c = 0$$

Suy ra $f\left(\frac{4}{5}\right), f(0)$ trái dấu hoặc cả hai đều bằng 0.

Vậy phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm thuộc $\left[0; \frac{4}{5}\right]$.

Câu 26. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $5a + 4b + 6c = 0$. Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$.

+ Hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có $f(0) = c, f(2) = 4a + 2b + c, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$

$$\text{Do đó} \quad f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = 5a + 4b + 6c = 0$$

Suy ra tồn tại hai giá trị p, q sao cho $f(p).f(q) \leq 0$.

Vậy phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

Câu 27. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi m.

a. $m(x^2 - 9) + x(x - 5) = 0$

b. $x^4 + mx^2 - 2mx - 2 = 0$

Lời giải

a. Hàm số $f(x) = m(x^2 - 9) + x(x - 5)$ liên tục với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$.

$f(3) = -6; f(-3) = 24$

$\Rightarrow f(-3).f(3) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (-3; 3) | f(x_0) = 0$

Như vậy phương trình $f(x) = 0$ tồn tại ít nhất 1 nghiệm nằm trong khoảng $(-3; 3)$
 $\Rightarrow$ Phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b. Hàm số $f(x) = x^4 + mx^2 - 2mx - 2$ liên tục với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$.

$f(0) = -2; f(2) = 14$

$\Rightarrow f(0).f(2) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (0; 2) | f(x_0) = 0$

Như vậy phương trình $f(x) = 0$ tồn tại ít nhất 1 nghiệm nằm trong khoảng $(0; 2)$
 $\Rightarrow$ Phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

Câu 28. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm.

a. $ax^2 + bx + c = 0$ với $a + 2b + 5c = 0$.

b. $a(x - b)(x - c) + b(x - c)(x - a) + c(x - a)(x - b) = 0$ (với a, b, c là các số dương)

Lời giải

a. Hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

$f(0) = c; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$

$\Rightarrow f(0).4f\left(\frac{1}{2}\right) = c + a + 2b + 4c = a + 2b + 5c = 0$

Nếu $f(0) = 0$ hoặc $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ thì PT đã cho có nghiệm.

Nếu $f(0) \neq 0$ hoặc $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ thì từ $f(0).4f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow f(0).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

$\Rightarrow$ PT đã cho có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

$\Rightarrow$ PT luôn có nghiệm.

b. Không giảm tổng quát ta xét $0 < a < b < c$.

Hàm số $f(x) = a(x - b)(x - c) + b(x - c)(x - a) + c(x - a)(x - b)$

Khi đó ta có:

$f(a) = a(a - b)(a - c) > 0$

$f(b) = b(b - a)(b - c) \leq 0$

$\Rightarrow f(a).f(b) \leq 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [a; b] : f(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ PT đã cho có nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.

$\Rightarrow$ PT luôn có nghiệm.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>