

ĐỀ 59

ĐỀ HSG TOÁN 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI 2023-2024

Câu 1: (5,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = x+3$.
- 2) Cho a, b, c là các số thực khác 0, thỏa mãn $a^2 + ab = c^2 + bc$ và $a^2 + ac = b^2 + bc$.

Tính giá trị của biểu thức $K = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$.

Câu 2. (5,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các số tự nhiên m, n thỏa mãn $3^m + 2022 = n^2$.
- 2) Tìm tất cả số nguyên tố p để phương trình $x^3 + y^3 - 3xy + 1 = p$ có nghiệm nguyên dương.

Câu 3. (2,0 điểm)

Với các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 1$ và $a + b + c = 2$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca}$.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại trực tâm H . Gọi K, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với hai đường thẳng AH, AO .

- 1) Chứng minh $\widehat{AQE} = 90^\circ$.
- 2) Gọi I là trung điểm của AH . Chứng minh $IE^2 = IK \cdot ID$.
- 3) Gọi R, J lần lượt là trung điểm của BE, CF . Chứng minh JR vuông góc với QD .

Câu 5. (2,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các số nguyên a, b sao cho số $(a^3 + b)(b^3 + a)$ là lập phương của một số nguyên tố.
- 2) Trên bảng ta viết số tự nhiên $222...2$ gồm 2022 chữ số 2. Mỗi bước ta chọn 22 chữ số liên tiếp nào đó có chữ số ngoài cùng bên trái bằng 2, rồi biến đổi các chữ số được chọn theo quy tắc: chữ số 2 đổi thành chữ số 0 còn chữ số 0 đổi thành chữ số 2.
 - a) Chứng minh mọi cách thực hiện đều phải dừng lại sau một số hữu hạn bước.
 - b) Giả sử sau khi thực hiện được n bước thì không thể thực hiện được thêm bước nào nữa. Chứng minh n là số lẻ.

---Hết---

Đáp án đề 59

Câu 1: (5,0 điểm)

a) ĐKXD $x \geq \frac{-1}{3}$.

Phương trình đã cho đưa về $(x+7-4\sqrt{x+3})+(3x+5-\sqrt{3x+1})=0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2)^2 + (\sqrt{3x+1}-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}=2 \\ \sqrt{3x+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết hợp với điều kiện xác định: phương trình có nghiệm là $x=1$

b) Từ giả thiết suy ra: $a(a+b)=c(b+c); a(a+c)=b(b+c) \Rightarrow \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c}$.

TH1: $a+b+c=0$ suy ra $a+b=-c; b+c=-a; c+a=-b$

Do đó $1+\frac{a}{b}=\frac{a+b}{b}=\frac{-c}{b}; 1+\frac{b}{c}=\frac{b+c}{c}=\frac{-a}{c}; 1+\frac{c}{a}=\frac{c+a}{a}=\frac{-b}{a}$. Suy ra $P=\frac{-c}{b} \cdot \frac{-a}{c} \cdot \frac{-b}{a}=-1$.

TH2: $a+b+c \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{a}+1=\frac{c+a}{b}+1=\frac{a+b}{c}+1 \Rightarrow \frac{a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{c} \Rightarrow a=b=c.$$

Suy ra $P=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)=8$.

Vậy nếu $a+b+c=0$ thì $P=-1$

Nếu $a+b+c \neq 0$ thì $P=8$

Câu 2. (5,0 điểm)

1) Giả sử m, n là hai số tự nhiên thỏa mãn $3^m+2022=n^2$.

TH1: $m=0$: Loại vì $n^2=3^0+2022=2023$ không phải là số chính phương.

TH2: $m=1$: $n^2=3^1+2022=2025=45^2 \Rightarrow n=45$.

TH3: $m \geq 2$. Khi đó $n^2=3^m+2022:3 \Rightarrow n^2:3$

Dẫn tới $n^2:9$ hay $3^m+2022:9$

Điều này vô lí vì $3^m:9$ còn 2022 không chia hết cho 9

Vậy $m=1, n=45$.

2) Biến đổi được $p=x^3+y^3-3xy+1=(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$.

Vì p là số nguyên tố, còn $x+y+1>1$ nên

$$x^2+y^2+1-xy-x-y=1 \Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2.$$

Vì x, y là các số nguyên dương.

$$\text{TH1: } x=1, \text{ dẫn tới } 2(1-y)^2=2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=1, y=$. Từ đó $p=4$ (loại)

TH2: $y=1$. Làm tương tự ta được $x=2, y=1$. Từ đó $p=4$ (loại)

$$\text{TH3: } x>1, y>1 \text{ dẫn tới } \begin{cases} (x-1)^2=(y-1)^2=1 \\ (x-y)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2. \text{ Từ đó } p=5$$

Vậy số nguyên tố cần tìm là $p=5$.

Câu 3: (2,0 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta có: } 3-P = \frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \geq \frac{9}{ab+bc+ca+3} \geq \frac{9}{\frac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{27}{13}$$

$$\text{Suy ra: } P \leq \frac{12}{13}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{12}{13}$; P đạt giá trị lớn nhất khi $a=b=c=\frac{2}{3}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$.

Vì $0 \leq a, b, c \leq 1$ nên $(a-1)(b-1) \geq 0$ suy ra $ab+1 \geq a+b$, dẫn đến $\frac{a+b}{ab+1} \leq 1$.

$$\text{Chúng minh tương tự: } \frac{a+b}{ab+1} + \frac{b+c}{bc+1} + \frac{c+a}{ca+1} \leq 3.$$

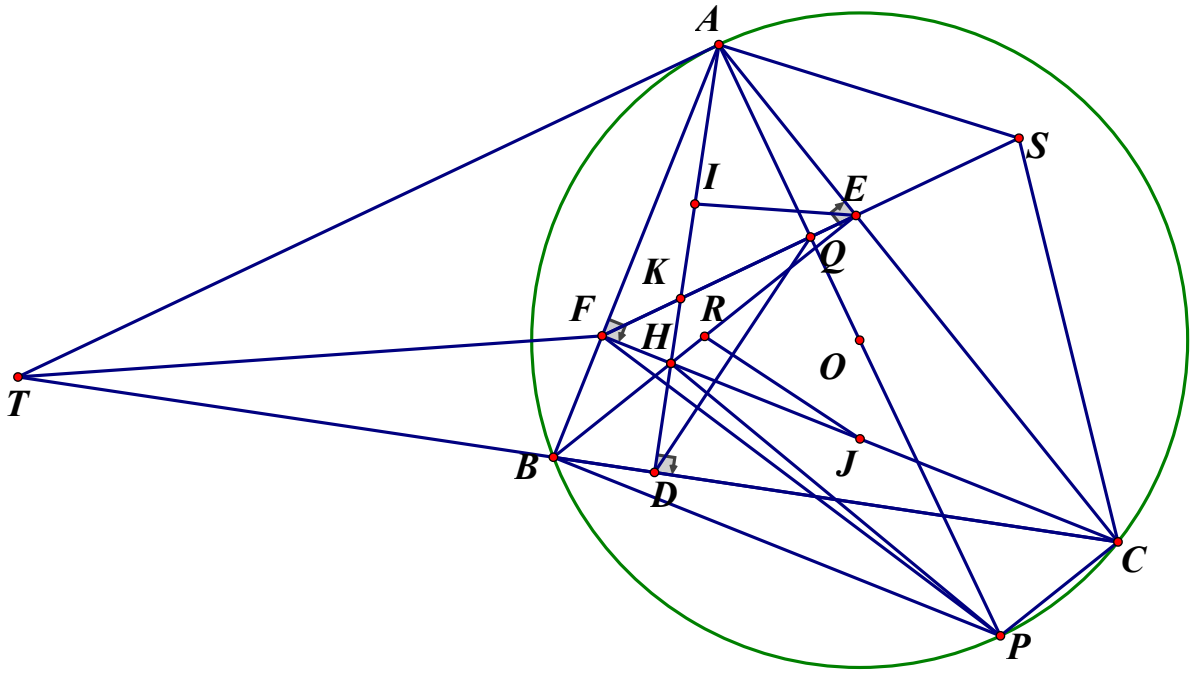
Từ đó,

$$2(3-P) = \frac{a+b+c}{ab+1} + \frac{a+b+c}{bc+1} + \frac{a+b+c}{ca+1} \leq 1+1+1 + \left(\frac{c}{ab+1} + \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} \right) \leq 3 + \frac{a+b+c}{bc+1} \leq 3 + a+b+c = 5$$

$$\text{Nên ta có } 3-P \leq \frac{5}{2} \Rightarrow P \geq \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$; P đạt giá trị nhỏ nhất chẳng hạn khi $a=b=1, c=0$.

Câu 4. (6,0 điểm)



- Tứ giác $BCEF$ có $\widehat{AEC} = \widehat{AFC} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.
 $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ (cùng bù $\widehat{BFE}$)
 Kẻ đường kính AP của $(O) \Rightarrow \widehat{ABP} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\widehat{CAP} = \widehat{CBP}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{CP}$)
 ΔAQE có $\widehat{CAP} + \widehat{AEF} = \widehat{CBP} + \widehat{ABC} = \widehat{ABP} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{AQE} = 90^\circ$
- ΔAEH vuông tại E có EM
 $IE = IA = IH \Rightarrow \Delta AIE$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IEA} = \widehat{IAE}$.
 Tương tự $\widehat{MEC} = \widehat{MCE}$
 $\Rightarrow \widehat{IEA} + \widehat{MEC} = \widehat{IAE} + \widehat{MCE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IEM} = 90^\circ$
 Ta có $IE = IF = \frac{1}{2}AH$ (tính chất trung tuyến tam giác vuông)
 Ta có $ME = MF = \frac{1}{2}BC$ (tính chất trung tuyến tam giác vuông)
 $\Rightarrow MI$ là đường trung trực của $EF \Rightarrow MI \perp EF$.
 N là giao điểm của EF và MI
 $\Rightarrow IE^2 = \dot{I} \cdot \mathfrak{I}$ (hệ thức về cạnh và đường cao trong ΔIEM vuông tại M).
 Mặt khác : $\Delta INK = \Delta IDM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{\dot{I}}{ID} = \frac{IK}{\mathfrak{I}}$
 $\Rightarrow \dot{I} \cdot \mathfrak{I} = IK \cdot ID$
 $\Rightarrow IE^2 = IK \cdot ID$
- Gọi S là điểm đối xứng với F qua Q ; Gọi T là điểm đối xứng với C qua D .

Chứng minh được $\widehat{TAF} = \widehat{CAS}$,

Xét ΔTAF và ΔCAS có

$$\widehat{TAF} = \widehat{CAS}$$

$AF = AS$ (tính chất đường trung trực)

$AT = AP$ (tính chất đường trung trực)

$\Rightarrow \Delta TAF = \Delta CAS (c.g.c) \Rightarrow FT = CS.$

Mặt khác, theo tính chất đường trung bình: $JQ = \frac{1}{2}SC$ và $JD = \frac{1}{2}FT$ suy ra $JD = JQ$

Chứng minh tương tự ta có $RD = RQ$, suy ra JR là đường trung trực của DQ , dẫn tới JR vuông góc với QD .

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Giả sử a, b , là hai số nguyên dương thỏa mãn $(a^3 + b)(b^3 + a) = p^3$ với p là số nguyên tố.

Rõ ràng $a \neq b$ vì nếu $a = b$ thì $p^3 = (a^3 + a)^2$ vô lí do p là số nguyên tố.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a > b \Rightarrow b > b^3 + a$.

$$U(p^3) = \{1; p; p^2; p^3\} \Rightarrow \begin{cases} a^3 + b = p^2 \\ b^3 + a = p \\ p > ab \end{cases}$$

Ta có

Vì

$$a = b - p^3 \Rightarrow (p - b)^3 + b = p^2 \Rightarrow b^9 - b : p \Rightarrow b(b - 1)(b + 1)(b^2 + 1)(b^4 + 1) : p.$$

Ta có $p > b^3 + 1 \geq b^2 + 1 > b + 1 > b > 0$. Do đó còn 2 trường hợp:

$$\begin{cases} b = 1 \\ b^4 + 1 : p \end{cases}$$

$$\text{TH1: } b = 1 \Rightarrow a^3 + 1 = (a + 1)^2 \Rightarrow a = 2; p = 3.$$

$$\text{TH2: } b^4 + 1 : p. \text{ Rõ ràng } b(b^3 + a) - (b^4 + 1) : p \Rightarrow ab - 1 : p \text{ (Vô lí vì } 0 < ab - 1 < p).$$

$$\text{Vậy } a = 2, b = 1, p = 3 \text{ hoặc } a = 1, b = 2, p = 3.$$

2. Gọi S là số chữ số 2 trong các chữ số được đánh dấu. Ban đầu $S=91$, là số lẻ. Trong 22 chữ số liên tiếp luôn có đúng một chữ số được đánh dấu, do đó mỗi bước S tăng 1 hoặc giảm 1, tức là mỗi bước S thay đổi tính chẵn lẻ. Cụ thể là, sau số lẻ bước thay thì S chuyển từ lẻ thành chẵn; sau số chẵn bước thay thì S chuyển từ chẵn thành lẻ. Nếu $S > 0$, tồn tại ít nhất một dãy 22 chữ số liên tiếp có chữ số ngoài cùng bên trái là 2, tức là ta còn có thể thực hiện được ít nhất một bước nữa. Do đó để ta không thể

thực hiện được bước nào nữa thì $S=0$. Từ đó số bước đã thực hiện đến lúc dừng lại phải lẻ, hay n lẻ.