



Chương

Bài 3. TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ

A

Lý thuyết

1. Tích của một số với một vectơ



Định nghĩa

» Cho số $k \neq 0$ và một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với k là một vectơ.

► **Ký hiệu** $k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$,

Khi đó $k\vec{a}$:

- Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$,
- Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

Tính chất

Với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì và hai số thực số k, h ta có

$$\begin{aligned} (1) \quad k(\vec{a} + \vec{b}) &= k\vec{a} + k\vec{b} & (2) \quad (h+k)\vec{a} &= h\vec{a} + k\vec{a} \\ (3) \quad h(k\vec{a}) &= (hk)\vec{a} & (4) \quad 1\vec{a} &= \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a} \end{aligned}$$

2. Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác



» Nếu I là trung điểm của AB thì $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

và $\forall M$, ta có $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

» Nếu G là trọng tâm của $\triangle ABC$ thì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

và $\forall M$ ta có $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương



» Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) là có một số thực k để

$$\vec{a} = k\vec{b}$$

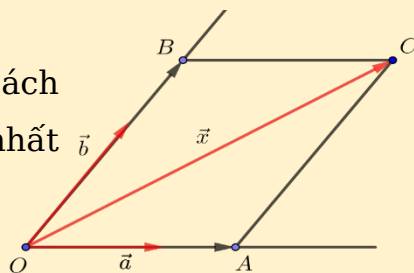
» **Nhận xét:**



4. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương



- » Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương.
- » Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k thực duy nhất sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.





Các dạng bài tập

Dạng 1. Dựng vectơ



Phương

(1) **Dựng vectơ** $\vec{m} = k\vec{a}$:

Khi đó $\vec{m} = k\vec{a}$:

- Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$,
- Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

» Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}; 0k = 0$.

(2) **Điểm đặc biệt:**

- Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$
- Điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$



Ví dụ 1.1.

Cho hai điểm phân biệt A, B . Xác định điểm M biết

(1) $\vec{MA} + 2\vec{MB} = \vec{0}$

(2) $2\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{0}$

Lời giải

(1) $\vec{MA} + 2\vec{MB} = \vec{0}$



Ta có: $\vec{MA} + 2\vec{MB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} + 2(\vec{MA} + \vec{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{MA} + 2\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\vec{AM} + 2\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB}$$

$\Rightarrow \vec{AM}, \vec{AB}$ cùng hướng và $AM = \frac{2}{3}AB$.

(2) $2\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{0}$



$$2\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MA} - 3(\vec{MA} + \vec{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -\vec{MA} - 3\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AM} = 3\vec{AB}$$

Ta có:

$\Rightarrow \vec{AM}, \vec{AB}$ cùng hướng và $AM = 3AB$.



Ví dụ 1.2.

Cho đoạn thẳng AB và điểm M nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$.
Tìm k trong các đẳng thức sau:

(1) $\vec{AM} = k\vec{AB}$

(2) $\vec{MA} = k\vec{MB}$

(3) $\vec{MA} = k\vec{AB}$

Lời giải



(1) $\vec{AM} = k\vec{AB}$

Vì $\vec{AM}$ và $\vec{AB}$ cùng hướng và $AM = \frac{1}{5}AB$ nên $\vec{AM} = \frac{1}{5}\vec{AB} \Rightarrow k = \frac{1}{5}$.

(2) $\vec{MA} = k\vec{MB}$

Vì $\vec{MA}$ và $\vec{MB}$ ngược hướng và $MA = \frac{1}{4}MB$ nên $\vec{MA} = -\frac{1}{4}\vec{MB} \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$.

(3) $\vec{MA} = k\vec{AB}$

Vì $\vec{MA}$ và $\vec{AB}$ ngược hướng và $MA = \frac{1}{5}AB$ nên $\vec{MA} = -\frac{1}{5}\vec{AB} \Rightarrow k = -\frac{1}{5}$.



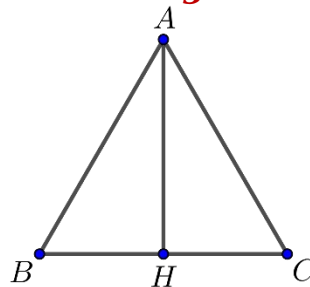
Ví dụ 1.3.

Cho tam giác đều ABC . Xác định

(1) $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC}$

(2) $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{AC}$

Lời giải



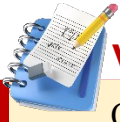
(1) $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC}$

$$\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{AC} = 2\vec{AC}$$

(2) $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{AC}$

Gọi H là trung điểm của BC .

Ta có: $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AH}$

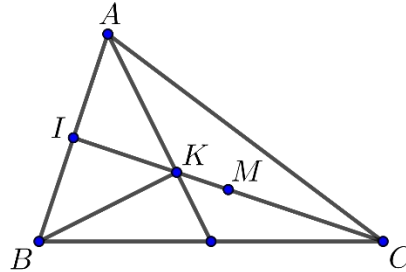


Ví dụ 1.4.

Cho tam giác ABC .

- (1) Tìm điểm K sao cho $\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{CB}$
 (2) Tìm điểm M sao cho $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$

Lời giải



- (1) Tìm điểm K sao cho $\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{CB}$

Ta có: $\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{KB} - \vec{KC} \Leftrightarrow \vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} = \vec{0}$
 $\Rightarrow K$ là trọng tâm của tam giác ABC .

- (2) Tìm điểm M sao cho $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$

Gọi I là trung điểm của AB .

Ta có: $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MI} + 2\vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MI} + \vec{MC} = \vec{0}$
 $\Rightarrow M$ là trung điểm của IC .



Dạng 2. Sự cùng phương của hai vectơ - Ba điểm thẳng hàng



Phương

(1) Hai vectơ cùng phương:

□ Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$

(2) Ba điểm thẳng hàng:

□ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ có một số thực $k \neq 0$ để $\vec{AB} = k\vec{AC}$

(3) Hai điểm trùng nhau:

□ Để chứng minh hai điểm M, N trùng nhau

→ chứng minh $\vec{OM} = \vec{ON}$ với O là một điểm nào đó, hoặc

→ chứng minh $\vec{MN} = \vec{0}$.

(4) Hai đường song song:

□ Nếu $\vec{AB} = \vec{CD}$ và hai đường thẳng AB và CD phân biệt thì $AB \parallel CD$.



Ví dụ 2.1.

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AC}$. Chứng minh rằng ba điểm B, I, K

Lời giải

• Ta có $\vec{BI} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BM})$ (Do BI là đường trung tuyến $DABM$)

$$= \frac{1}{2} \left(\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{BC} \right) \quad (\text{Do } M \text{ là trung điểm của } BC)$$

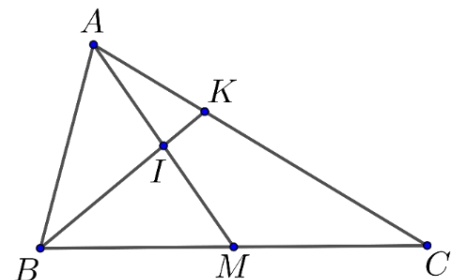
$$= \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{4}\vec{BC}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{BK} + \vec{KA}) + \frac{1}{4}(\vec{BK} + \vec{KC}) = \frac{3}{4}\vec{BK} + \frac{1}{2}\vec{KA} + \frac{1}{4}\vec{KC}$$

• Mà $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AC}$ nên $\vec{KC} = 2\vec{KA} \Rightarrow \vec{KC} = -2\vec{KA} \Rightarrow \vec{KC} + 2\vec{KA} = \vec{0} \Rightarrow \frac{1}{4}\vec{KC} + \frac{1}{2}\vec{KA} = \vec{0}$.

$$\vec{BI} = \frac{3}{4}\vec{BK} + \vec{0} = \frac{3}{4}\vec{BK}$$

• Do đó $\vec{BI} = \frac{3}{4}\vec{BK}$. Vậy ba điểm B, I, K thẳng hàng.



Ví dụ 2.2.

Cho 4 điểm O, A, B, C sao cho $\vec{OA} + 2\vec{OB} - 3\vec{OC} = \vec{0}$. Chứng tỏ rằng A, B, C thẳng

Lời giải

• Ta có: $\vec{OA} + 2\vec{OB} - 3\vec{OC} = \vec{0}$



$$\Leftrightarrow \vec{OA} + 2(\vec{OA} + \vec{AB}) - 3(\vec{OA} + \vec{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} + 2\vec{OA} + 2\vec{AB} - 3\vec{OA} - 3\vec{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{AB} = 3\vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{AC}$$

$\Rightarrow$ Vậy: A, B, C thẳng hàng.



Ví dụ 2.3.

Cho hình bình hành $ABCD$ trên BC lấy điểm H , trên BD lấy điểm K sao cho $\vec{BH} = \frac{1}{5}\vec{BC}$ và $\vec{BK} = \frac{1}{6}\vec{BD}$. Chứng minh A, K, H thẳng hàng.

Lời giải

$$\begin{cases} \vec{BH} = \frac{1}{5}\vec{BC} \\ \vec{BK} = \frac{1}{6}\vec{BD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{AH} - \vec{AB} = \frac{1}{5}\vec{BC} \\ \vec{AK} - \vec{AB} = \frac{1}{6}\vec{BD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{AH} = \vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{BC} \\ \vec{AK} = \vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{BD} \end{cases}$$

♦ Ta có:

$$\vec{AK} = \vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{BD}$$

Mà:

$$= \vec{AB} + \frac{1}{6}(\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{BC} - \frac{1}{6}\vec{AB} = \frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{BC} = \frac{5}{6}\left(\vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{BC}\right)$$

$$\vec{AK} = \frac{5}{6}\vec{AH}$$

♦ Khi đó: $\Rightarrow$ Vậy A, K, H thẳng hàng.



Ví dụ 2.4.

Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức $\vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}$ và $\vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$.

Chứng minh rằng $MN \parallel AC$.

Lời giải

♦ Ta có $\vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MA} = -\vec{BC}$ nên $MA \parallel BC$.

♦ Do đó $M \notin AC$ (1)

♦ Ta có $\vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} - (\vec{NM} + \vec{MA}) - 3\vec{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{NM} - \vec{MA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{NM} = \vec{AB} - \vec{MA} - 3\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{NM} = \vec{AB} + \vec{BC} - 3\vec{AC} = \vec{AC} - 3\vec{AC} = -2\vec{AC} \quad (2)$$

♦ Từ (1), (2) ta có $MN \parallel AC$.



Ví dụ 2.5.

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM và K thuộc cạnh AC sao cho $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AC}$. Chứng minh B, I, K thẳng hàng.



Lời giải

♦ Ta có: $\vec{BI} = \vec{AI} - \vec{AB}$

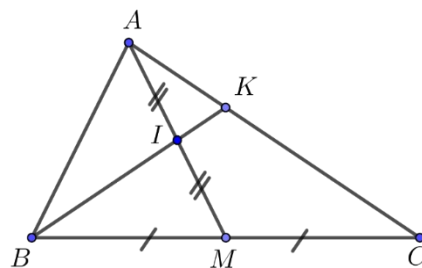
$$\Leftrightarrow \vec{BI} = \frac{1}{2} \vec{AM} - \vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{BI} = \frac{1}{4} (\vec{AB} + \vec{AC}) - \vec{AB} = -\frac{3}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC} \quad (1)$$

$$\vec{BK} = \vec{AK} - \vec{AB} = -\frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{AC} \quad (2)$$

♦ Ta có:

Từ $(1), (2) \Rightarrow \vec{BI} = \frac{3}{4} \vec{BK}$ hay B, I, K thẳng hàng.





Dạng 3. Tập hợp điểm thỏa mãn đẳng thức



Phương

- Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn một đẳng thức véc tơ, ta biến đổi đẳng thức véc tơ đó về các tập hợp điểm cơ bản đã biết. Chẳng hạn:
- Tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.
 - Tập hợp các điểm cách đều một điểm cố định một khoảng không đổi là đường tròn có tâm là điểm cố định và bán kính là khoảng không đổi.



Ví dụ 3.1.

Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau:

(1) $\vec{MA} = \vec{MB}$

(2) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$

Lời giải

(1) $\vec{MA} = \vec{MB}$

♦ Ta có $\vec{MA} = \vec{MB} \Leftrightarrow \vec{MA} - \vec{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{BA} = \vec{0}$.

$\Rightarrow$ Vì A và B là hai điểm phân biệt nên không tồn tại điểm M .

(2) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$

♦ Gọi G là điểm thoả mãn $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ (hay G là trọng tâm tam giác ABC).

♦ Khi đó $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3\vec{MG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{MG} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MG} = \vec{0} \Rightarrow M \equiv G.$$

$\Rightarrow$ Vậy tập hợp điểm M là trọng tâm tam giác ABC .



Ví dụ 3.2.

Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau:

(1) $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$

(2) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$

(3) $2\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MA} + 2\vec{MB}$

Lời giải

(1) $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$

♦ $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}| \Leftrightarrow |\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{BA}| \Leftrightarrow |\vec{MA} + \vec{MB}| = AB$ (1).

♦ Gọi I là trung điểm AB , khi đó

$$(1) \Leftrightarrow |2\vec{MI} + \vec{IA} + \vec{IB}| = AB \Leftrightarrow |2\vec{MI}| = AB \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}.$$



$\Rightarrow$ Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

(2) $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |\vec{MA} + 2\vec{MB}|$ (*)

♦ Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, và I là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$.

(*) $\Leftrightarrow |\vec{3MG}| = |\vec{3MI}| \Leftrightarrow 3MG = 3MI \Leftrightarrow MG = MI$

♦ Biểu thức

$\Rightarrow$ Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn GI .

(3) $|\vec{2MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} + 2\vec{MB}|$ (*)

♦ Gọi I và J lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\vec{2IA} + \vec{IB} = \vec{0}, \vec{JA} + 2\vec{JB} = \vec{0}$.

(*) $\Leftrightarrow |\vec{3MI}| = |\vec{3MJ}| \Leftrightarrow 3MI = 3MJ \Leftrightarrow MI = MJ$

♦ Biểu thức

$\Rightarrow$ Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn IJ .



Ví dụ 3.3.

Cho điểm O cố định và hai vector $\vec{u}; \vec{v}$ cố định.

Với mỗi số m ta xác định được điểm M sao cho $\vec{OM} = m\vec{u} + (1-m)\vec{v}$.

Tìm tập hợp điểm M khi m thay đổi.

Lời giải

♦ Từ O dựng $\vec{OA} = \vec{u}, \vec{OB} = \vec{v}$ thì A, B cố định.

$\vec{OM} = m\vec{OA} + (1-m)\vec{OB}$

$\Leftrightarrow \vec{OM} = m(\vec{OA} - \vec{OB}) + \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OM} - \vec{OB} = m(\vec{OA} - \vec{OB}) \Leftrightarrow \vec{BM} = m\vec{BA}$

♦ Từ đó suy ra A, B, M thẳng hàng.

Vậy tập hợp điểm M chính là đường thẳng AB .



Ví dụ 3.4.

Cho $\triangle ABC$ và ba vector cố định $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$. Với mỗi số thực t , ta lấy các điểm A', B', C' sao cho $\vec{AA'} = t\vec{u}, \vec{BB'} = t\vec{v}, \vec{CC'} = t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm G' của $\triangle A'B'C'$ khi t thay đổi.

Lời giải

♦ Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$, khi đó:

$3\vec{GG'} = \vec{GA'} + \vec{GB'} + \vec{GC'}$

$= \vec{GA} + \vec{AA'} + \vec{GB} + \vec{BB'} + \vec{GC} + \vec{CC'}$

$= \left(\frac{\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}}{3} \right) + \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = t\vec{u} + t\vec{v} + t\vec{w} = t(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$

♦ Đặt $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ thì vector $\vec{a}$ cố định và $\vec{GG'} = \frac{1}{3}t\vec{a}$.



▮ **Trường hợp 1:** Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ thì các điểm G' trùng với điểm G .

▮ **Trường hợp 2:** Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì quỹ tích các điểm G' là đường thẳng đi qua G và song song với giá của vectơ $\vec{a}$.



Ví dụ 3.5.

Cho tứ giác $ABCD$. Với mỗi số k tùy ý, lấy các điểm M, N sao cho $\vec{AM} = k\vec{AB}$, $\vec{DN} = k\vec{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

Lời giải

♦ Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC .

♦ Khi đó:

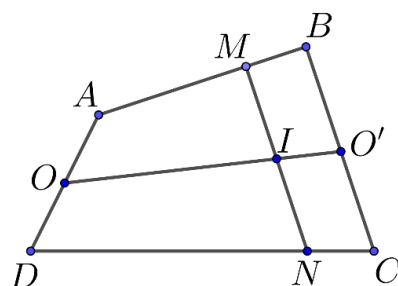
$$\vec{OO'} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{OD} + \vec{DC}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$$

♦ Vì O và I lần lượt là trung điểm AD và MN

$$\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{AM} + \vec{DN}) = \frac{k}{2}(\vec{AB} + \vec{DC}) = k\vec{OO'}$$

Nên

♦ Do đó: khi k thay đổi, tập hợp các điểm I là đường thẳng OO' .





▮ Dạng 4. Biểu diễn vectơ theo 2 vectơ không cùng phương



Phương

Mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, nghĩa

là có duy nhất cặp số h, k thực duy nhất sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

Ta lưu ý các trường hợp đặc biệt:

- (1) Nếu I là trung điểm của AB thì $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$
và $\forall M$, ta có $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$
- (2) Nếu G là trọng tâm của $\triangle ABC$ thì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$
và $\forall M$, ta có $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$
- (3) Nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $\vec{AB} = k\vec{AC}$, với số k xác định.
- (4) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.

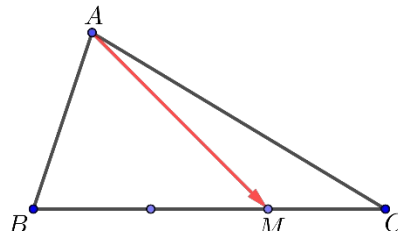


Ví dụ 4.1.

Cho tam giác ABC . Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$.

Chứng minh rằng: $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$.

👉 Lời giải



Ta có: $\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM} = \vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{BC} = \vec{AC} - \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ (đpcm).



Ví dụ 4.2.

Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM , M là trung điểm của BC . Hãy biểu diễn vectơ $\vec{AM}$ theo 2 vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

👉 Lời giải

▮ Cách 1:

Vì M là trung điểm của BC

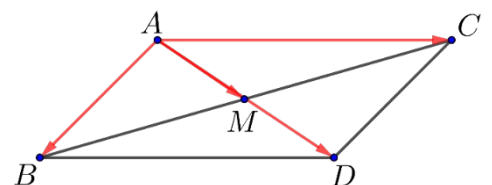
$$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM} \Rightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

Nên

▮ Cách 2:

Do M là trung điểm của BC nên $\vec{BM} + \vec{CM} = \vec{0}$.
 $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$ (1)

• Áp dụng quy tắc 3 điểm, ta có:





♦ Lại có: $\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM}$ (2)

♦ Cộng vế với vế của (1), (2) ta được:

$$2\vec{AM} = (\vec{AB} + \vec{AC}) + (\vec{BM} + \vec{CM}) \Leftrightarrow 2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

▮ Cách 3:

Xét hình bình hành $ABDC$ có M là trung điểm của BC nên M cũng là trung điểm của $AD \Rightarrow \vec{AD} = 2\vec{AM}$ (1)

♦ Áp dụng quy tắc hình bình hành: $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ (2)

$$(1)(2) \Rightarrow \vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM} \Rightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

♦ Từ



Ví dụ 4.3.

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Hãy biểu diễn các vectơ $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{GC}, \vec{CA}$ theo $\vec{a} = \vec{GA}; \vec{b} = \vec{GB}$.

🔗 Lời giải

♦ Ta có: $\vec{AB} = \vec{GB} - \vec{GA} = \vec{b} - \vec{a}$.

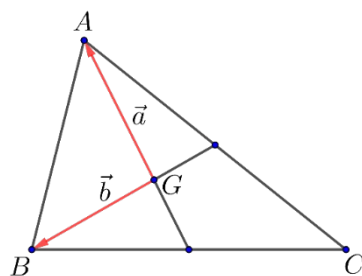
♦ Vì G là trọng tâm của tam giác ABC

Nên $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GC} = -\vec{GA} - \vec{GB} = -\vec{a} - \vec{b}$.

♦ Ta có: $\vec{BC} = \vec{BG} + \vec{GC} = -\vec{b} + (-\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} - 2\vec{b}$.

♦ Ta có: $\vec{CA} = \vec{GA} - \vec{GC} = \vec{a} - (-\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b}$.

♦ Ta có:



Ví dụ 4.4.

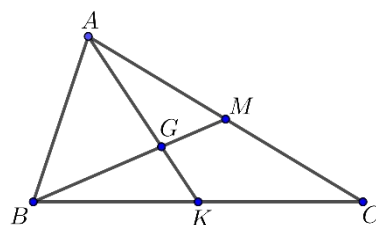
Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC , trọng tâm G . Hãy phân tích các vectơ $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \vec{AK}, \vec{v} = \vec{BM}$.

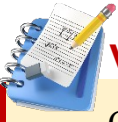
🔗 Lời giải

* $\vec{AB} = \vec{AG} + \vec{GB} = \frac{2}{3}\vec{AK} - \frac{2}{3}\vec{BM}$

* $\vec{BC} = 2\vec{BK} = 2(\vec{BG} + \vec{GK}) = 2 \cdot \frac{2}{3}\vec{BM} + \frac{1}{3}\vec{AK} = \frac{4}{3}\vec{BM} + \frac{1}{3}\vec{AK}$

* $\vec{CA} = -\vec{AC} = -(\vec{AK} + \vec{KC}) = -\left(\vec{AK} + \frac{1}{2}\vec{BC}\right)$





Ví dụ 4.5.

Cho $\triangle ABC$ với I, J, K lần lượt được xác định bởi
 $\vec{IB} = 2\vec{IC}; \vec{JC} = -\frac{1}{2}\vec{JA}; \vec{KA} = -\vec{KB}$

(1) Tính $\vec{IJ}; \vec{IK}$ theo $\vec{AB}; \vec{AC}$

Lời giải

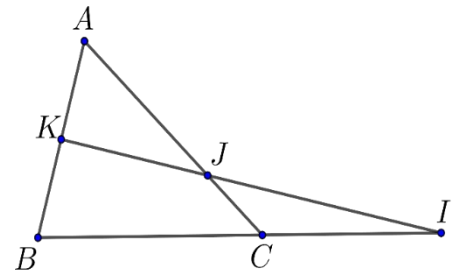
(1) Tính $\vec{IJ}; \vec{IK}$ theo $\vec{AB}; \vec{AC}$

♦ Ta có: $\vec{IJ} = \vec{IC} + \vec{CJ}$

$$\Leftrightarrow \vec{IJ} = -\vec{BC} - \frac{1}{3}\vec{AC} = -(\vec{BA} + \vec{AC}) - \frac{1}{3}\vec{AC} = \vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC}$$

♦ $\vec{IK} = \vec{IB} + \vec{BK}$

$$\Leftrightarrow \vec{IK} = -2\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{AB} = -2(\vec{BA} + \vec{AC}) - \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{AB} - 2\vec{AC}$$



(2) Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

$$\begin{cases} \vec{IJ} = \vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC} \\ \vec{IK} = \frac{3}{2}\vec{AB} - 2\vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{IJ} = \vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC} \\ \vec{IK} = \frac{3}{2}\left(\vec{AB} - \frac{2}{4}\vec{AC}\right) \end{cases} \Rightarrow \vec{IK} = \frac{3}{2}\vec{IJ}$$

♦ Theo câu (1):

$\Rightarrow$ Vậy I, J, K thẳng hàng.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website [VnTeach.Com](https://www.vnteach.com)
<https://www.vnteach.com>