

Người làm: Nguyễn Minh Hiếu

Zalo: Nguyễn Minh Hiếu - số đt zalo: 0962882326

Email: mhieuvq@gmail.com

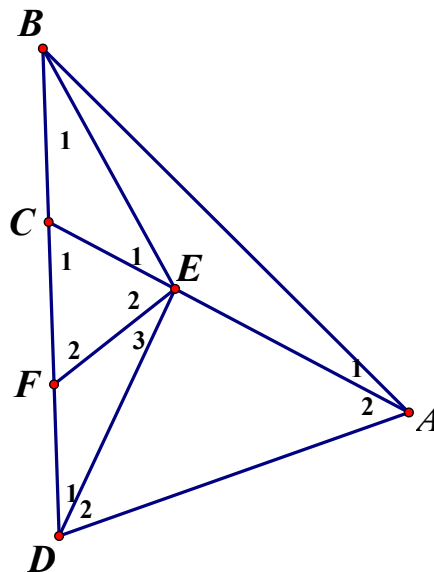
CD13: HÌNH HỌC

Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau

Câu 1. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có $\angle B = 45^\circ, \angle C = 120^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính $\angle ADB$.

Lời giải



Trên CA lấy điểm E sao cho $\angle EBA = 15^\circ \Rightarrow \angle B_1 = 30^\circ$

Ta có: $\angle E_1 = \angle A_1 + \angle EBA = 30^\circ$, do đó $\triangle CBE$ cân tại $C \Rightarrow CB = CE$

Gọi F là trung điểm $CD \Rightarrow CB = CE = CF = FD$

$\triangle CEF$ cân tại C , lại có: $\angle E_1 = 180^\circ - \angle BCA = 60^\circ$ nên là tam giác đều

Như vậy $CB = CE = CF = FD = EF$

Suy ra $\angle D_1 = \angle E_3$ mà $\angle D_1 + \angle E_3 = \angle F_2 = 60^\circ$ ($\triangle CEF$ đều) $\Rightarrow \angle D_1 = 30^\circ$

Xét $\triangle CDE$ ta có: $\angle EED = 180^\circ - (\angle E_1 + \angle D_1) = 90^\circ$ (1)

$\triangle BDE$ có: $\angle D_1 = \angle B_1 \Rightarrow EB = ED$

$\triangle BAE$ có: $\angle A_1 = \angle EBA \Rightarrow EA = EB$

Do đó $ED = EA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle EDA$ vuông cân tại $E \Rightarrow \angle D_2 = 45^\circ$

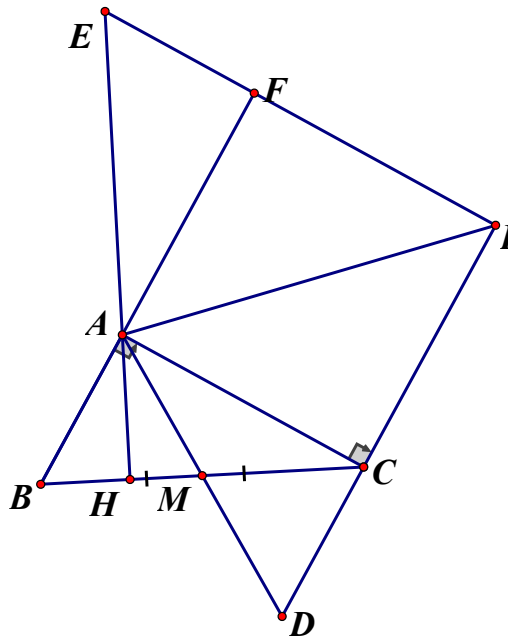
Vậy $\angle ADB = \angle D_1 + \angle D_2 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$

Dạng 2. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

Câu 1. (HSG 7 huyện 2016 - 2017)

Cho tam giác vuông ABC ($\angle A = 90^\circ$), đường cao AH , trung tuyến AM . Trên tia đối tia MA lấy điểm D sao cho $DM = MA$. Trên tia đối tia CD lấy điểm I sao cho $CI = CA$, qua I vẽ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng AH tại E . Chứng minh $AE = BC$.

Lời giải



Đường thẳng AB cắt EI tại F

$\triangle ABM = \triangle DCM$ vì $AM = DM$ (gt); $MB = MC$ (gt), $\angle AMB = \angle DMC$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \angle BAM = \angle CDM \Rightarrow FB \parallel ID \Rightarrow ID \perp AC$ và $\angle FAI = \angle CIA$ (so le trong) (1)

$IE \parallel AC$ (gt) $\Rightarrow \angle FIA = \angle CIA$ (so le trong) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle CAI = \triangle FIA$ (AI chung) $\Rightarrow IC = AC = AF$ (3)

Và $\angle EFA = 90^\circ$ (4),

mặt khác $\angle EAF = \angle BAH$ (đối đỉnh), $\angle BAH = \angle ACB$ (cùng phụ với $\angle ABC$)

$\Rightarrow \angle EAF = \angle ACB$ (5)

Từ (3), (4) và (5) $\Rightarrow \triangle AFE = \triangle CAB \Rightarrow AE = BC$

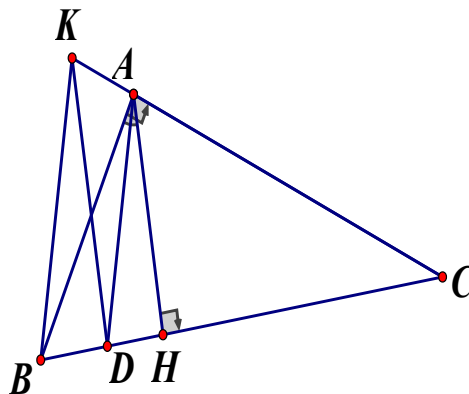
Câu 2. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ và đường cao AH . Tia phân giác của $\angle BAH$ cắt BH tại D . Trên tia CA lấy điểm K sao cho $CK = BC$.

a) Chứng minh $KB \parallel AD$.

b) Chứng minh $KD \perp BC$.

Lời giải



a) Chứng minh $KB \parallel AD$

$\angle BAC = 90^\circ \Rightarrow \angle BAD + \angle CAD = 90^\circ$, $AH \perp BC \Rightarrow \triangle AHD$ vuông ở $H \Rightarrow \angle HAD + \angle ADH = 90^\circ$ mà $\angle BAD = \angle HAD$ (vì AD là phân giác của $\angle BAH$)

Nên $\angle CAD = \angle ADH \Rightarrow \triangle ACD$ cân ở $C \Rightarrow \angle CAD = \frac{180^\circ - \angle C}{2}$

$CK = BC(gt) \Rightarrow \triangle CBK$ cân ở $C \Rightarrow \angle KCB = \frac{180^\circ - \angle C}{2}$

Do đó $\Rightarrow \angle CAD = \angle KCB \Rightarrow KB \parallel AD$

b) Chứng minh $KD \perp BC$

$KC = BC(gt); AC = CD$ ($\triangle ACD$ cân ở C) $\Rightarrow DB = KA$ (1)

$\triangle CBK$ cân ở $C \Rightarrow \angle BCK = \angle KCB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle BDK = \triangle KBA(c.g.c) \Rightarrow \angle BDK = \angle KAB = 90^\circ \Rightarrow KD \perp BC$

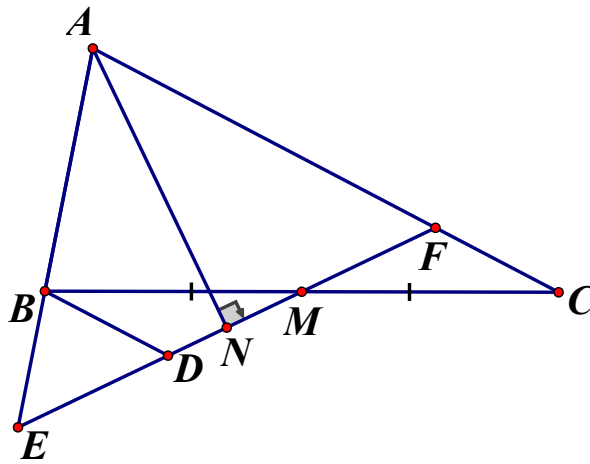
Câu 3. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC . Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của $\angle BAC$ tại N , cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F . Chứng minh rằng:

a) $BE = CF$

b) $AE = \frac{AB + AC}{2}$.

Lời giải



a) Qua B kẻ đường thẳng song song với AC , cắt EF tại D

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MCF$ có: $\angle BMD = \angle CMF$ (so le trong); $MB = MC(gt)$; $\angle BMD = \angle CMF$ (đối đỉnh)

Do đó: $\triangle MBD = \triangle MCF (c.g.c) \Rightarrow BD = CF(1)$

Mặt khác $\triangle AEF$ có AN vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên $\triangle AEF$ cân tại A

$\Rightarrow \angle E = \angle F$ mà $\angle BDE = \angle F$ (đồng vị) nên $\angle BDE = \angle E$

Do đó $\triangle BDE$ cân tại B , suy ra $BD = BE(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BE = CF$ (đpcm)

b) $\triangle AEF$ cân tại $A \Rightarrow AE = AF$

Ta có:

$$\begin{aligned} 2AE &= AE + AF = (AB + BD) + (AC - CF) \\ &= (AB + AC) + (BD - CF) = AB + AC (\text{do } BE = CF) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } AE = \frac{AB + AC}{2}$$

Dạng 3. Chứng minh tam giác bằng nhau

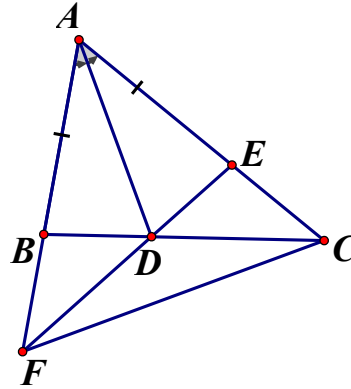
Câu 1. (HSG 7 trường Ân Tường Đông 2014 - 2015)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Kẻ tia phân giác AD của $\angle BAC$ ($D \in BC$). Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$, trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ADB = \triangle ADE$

b) $\triangle BDF = \triangle EDC$

Lời giải



a) Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ADE$ có:

$$\widehat{B}AB = \widehat{E}AE$$

$$AB = AE$$

AD chung

$$\Rightarrow \triangle ADB = \triangle ADE \text{ (c.g.c.)}$$

b) Từ a) ta có : $\triangle ADB = \triangle ADE$ suy ra $BD = DE$

Xét $\triangle ADF$ và $\triangle ADC$ có:

$$\widehat{F}AF = \widehat{C}AC$$

$$AF = AC$$

AD chung

$$\Rightarrow \triangle ADF = \triangle ADC \text{ (c.g.c.)}$$

$$\Rightarrow DF = DC$$

Xét $\triangle BDF$ và $\triangle EDC$ có:

$$\widehat{B}DF = \widehat{E}DC$$

$$BD = DE$$

$$DF = DC$$

$$\triangle BDF = \triangle EDC \text{ (c.g.c.)}$$

Dạng 4. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng

Dạng 5. Bất đẳng thức trong tam giác

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} + 4\widehat{B} + 10\widehat{C} = 360^\circ$ và $3\widehat{B} + 9\widehat{C} = 180^\circ$ thì khẳng định nào sau đây là đúng:

- A. $AB < BC < AC$. B. $AB < AC < BC$. C. $BC > AC > AB$. D. $AB = BC = AC$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 3\hat{B} + 9\hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + 3\hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ - 3\hat{C} \Rightarrow \hat{B} < 60^\circ (\text{vì } \hat{C} > 0^\circ) \quad (1)$$

$$\text{Lại có } 3\hat{C} = 60^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} < 20^\circ (\text{vì } \hat{B} > 0^\circ) \quad (2)$$

$$\hat{A} + 4\hat{B} + 10\hat{C} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} = 360^\circ - 4\hat{B} - 10\hat{C} \Rightarrow \hat{A} = 360^\circ - 4(60^\circ - 3\hat{C}) - 10\hat{C} \\ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ + 2\hat{C} \Rightarrow \hat{A} \quad (3)$$

là góc lớn nhất

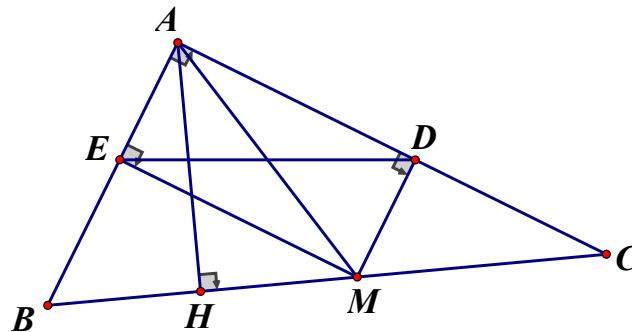
$$\text{Từ } (1) \quad (2) \quad (3) \quad \hat{C} < \hat{B} < \hat{A} \Rightarrow AB < AC < BC$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC vuông ở A , điểm M nằm giữa B và C . Gọi D, E thứ tự là hình chiếu của M trên AC, AB . Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



Để thấy $\triangle AEM = \triangle MDA$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$$\Rightarrow EM = AD \quad (2 \text{ cạnh tương ứng})$$

$$\Rightarrow \triangle AEM = \triangle EAD \quad (2 \text{ cạnh góc vuông})$$

$$\Rightarrow AM = ED \quad (2 \text{ cạnh tương ứng})$$

Kẻ $AH \perp BC$ tại H

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có:

$$DE = AM \geq AH \quad (AH \text{ là đường cao của } \triangle ABC)$$

Vậy DE nhỏ nhất khi AM nhỏ nhất $\Rightarrow M$ trùng với H .

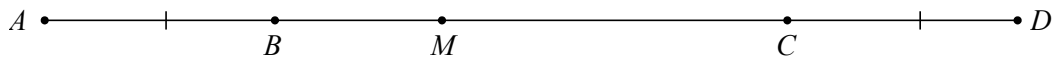
Câu 2. (HSG 7 huyện Tam Hưng 2013 - 2014)

Cho hai điểm B và C nằm trên đoạn thẳng AD sao cho $AB = CD$. Lấy điểm M tùy ý trong mặt phẳng. Chứng minh rằng $MA + MD \geq MB + MC$

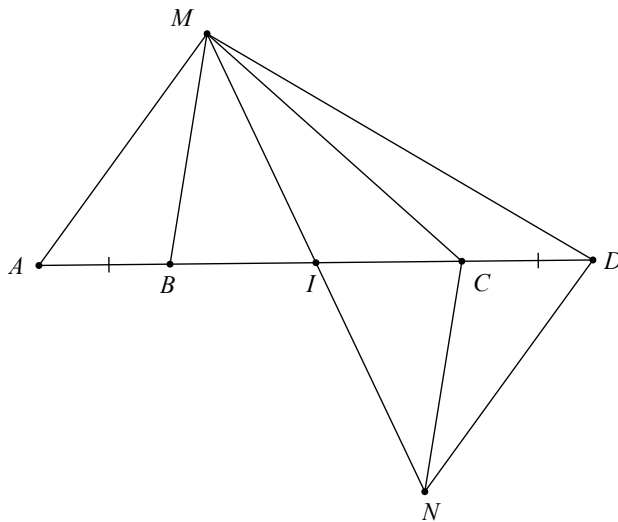
Lời giải

Xét 2 trường hợp

*Trường hợp điểm $M \in AD$ thì ta có: $MA + MD > MB + MC$



*Trường hợp $M \notin AD$, Gọi I là trung điểm của BC



Trên tia đối của tia IM lấy điểm N sao cho $IM = IN$ và ta có $IB = IC$

$$\frac{AB = CD}{AB + IB = IC + CD} \Rightarrow AI = ID$$

*Chứng minh được $\triangle IMA = \triangle IND$ (c.g.c) $\Rightarrow MA = ND$

- Điểm C nằm trong $\triangle MDN$ chứng minh được $ND + MD > NC + MC$

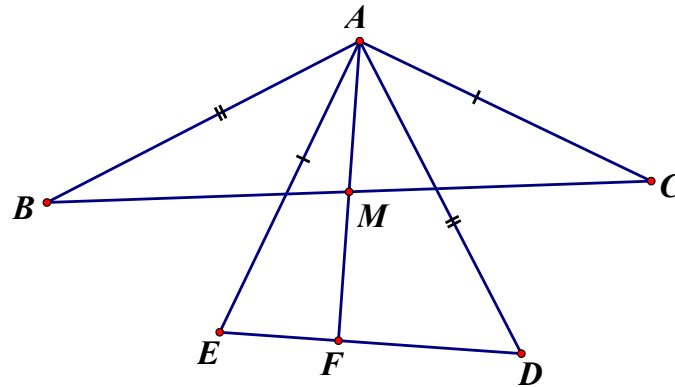
- Chứng minh $\triangle IBM = \triangle ICN$ (c.g.c) suy ra $MA + MD > MB + MC$

Dạng 5. Chứng minh song song, vuông góc

Câu 1. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho tam giác ABC có $\angle A$ tù. Kẻ $AD \perp AB$ và $AD = AB$ (tia AD nằm giữa hai tia AB và AC). Kẻ $AE \perp AC$ và $AE = AC$ (tia AE nằm giữa hai tia AB và AC). Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $AM \perp DE$.

Lời giải



Trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho $MF = MA \Rightarrow \triangle AMB = \triangle FMC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AB = AD = CF(1); \angle ABM = \angle FCM \quad (2)$$

Từ (2) $\Rightarrow CF \parallel AB \Rightarrow \angle FCA + \angle BAC = 180^\circ \quad (3)$

$$AD \perp AB \Rightarrow \angle BAE + \angle EAD = \angle BAD = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAE + \angle EAD + \angle CAD + \angle EAD = 180^\circ \Rightarrow \angle BAC + \angle EAD = 180^\circ \quad (4)$$

Từ (3), (4) $\Rightarrow \angle FCA = \angle EAD \Rightarrow \triangle ADE = \triangle CFA$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AED = \angle CAF$

Mà $\angle CAF + \angle FAE = \angle CAE = 90^\circ$ nên $\Rightarrow \angle AED + \angle FAE = 90^\circ$ hay $\angle AKE + \angle FAE = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle AKE$ vuông tại $K \Rightarrow AM \perp DE$

Dạng 6. Hình khối trong thực tiễn

Dạng 7. Bài toán chứng minh tổng hợp

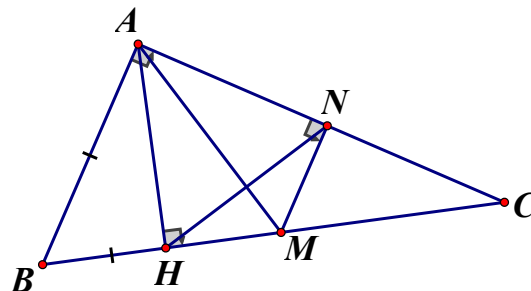
Câu 1: (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = BA$. Từ M kẻ MN vuông góc với AC ($N \in AC$). Chứng minh rằng:

a) Tam giác ANH cân.

b) $BC + AH > AB + AC$.

Lời giải



a) $\triangle ABM$ cân tại B nên $\angle BAM = \angle BMA$

$\angle BAM + \angle MAN = 90^\circ$; $\angle BMA + \angle HAM = 90^\circ \Rightarrow \angle HAM = \angle MAN$
mà

$$\Rightarrow \Delta HAM = \Delta NAM \quad (cạnh huyền - góc nhọn) \quad \Rightarrow AH = AN \Rightarrow \Delta ANH \text{ cân.}$$

$$b) \text{ Ta có: } BC - AB = BC - AM = MC \quad AC - AH = AC - AN = NC$$

Tam giác MNC vuông tại N nên $MC > NC$. Suy ra:

$$BC - AB > AC - AH \Rightarrow BC + AH > AB + AC$$

Câu 2: (HSG 7 huyện Bồ Lý 2015 - 2016)

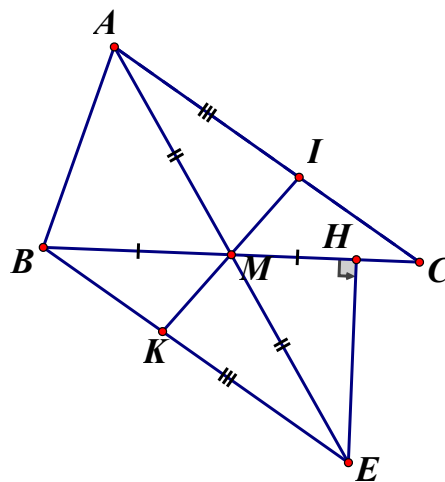
Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

a) $AC = EB$ và $AC \parallel BE$

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ E kẻ $EH \perp BC (H \in BC)$. Biết $\angle HBE = 50^\circ$, $\angle MEB = 25^\circ$. Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$

Lời giải



a) Xét ΔAMC và ΔEMB có: $AM = EM(gt)$; $\angle AMC = \angle EMB$ (đối đỉnh); $BM = MC(gt)$

Nên $\Delta AMC = \Delta EMB (c.g.c) \Rightarrow AC = EB$

Vì $\Delta AMC = \Delta EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$ (2 góc có vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC và EB cắt đường thẳng AE) suy ra $AC \parallel BE$

b) Xét ΔAMI và ΔEMK có: $AM = EM(gt)$; $\angle MAI = \angle MEK$ (vì $\Delta AMC = \Delta EMB$)

$$AI = EK(gt) \Rightarrow \Delta AMI = \Delta EMK (c.g.c) \Rightarrow \angle AMI = \angle EMK$$

Mà $\angle AMI + \angle HME = 180^\circ$ (tính chất kề bù) nên $\angle EMK + \angle HME = 180^\circ$

Suy ra ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Trong tam giác vuông BHE ($\angle H = 90^\circ$) có $\angle HBE = 50^\circ$

$$\Rightarrow \angle HEB = 90^\circ - \angle HBE = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

Nên $\angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$ (định lý góc ngoài của tam giác).

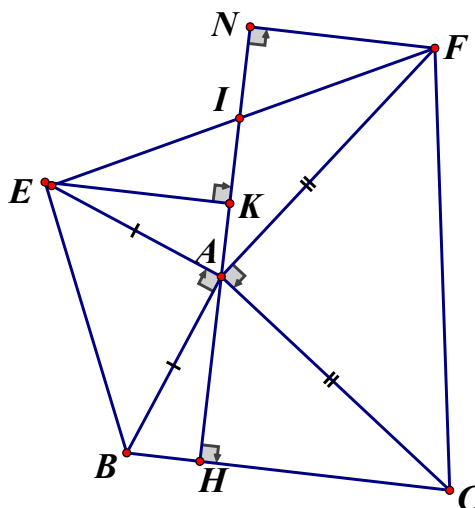
Câu 3: (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác ABE và ACF vuông cân tại A . Từ E và F kẻ đường vuông góc EK và FN với đường thẳng HA .

a) Chứng minh rằng: $EK = FN$.

b) Gọi I là giao điểm của EF với đường thẳng HA . Tìm điều kiện của tam giác ABC để $EF = 2AI$.

Lời giải



a) Xét hai tam giác vuông $\triangle KAE$ và $\triangle HBA$ có $AE = AB$ (gt), $\angle KEA = \angle HAB$ (cùng phụ với $\angle KAE$)

$$\Rightarrow \triangle KAE = \triangle HBA \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)} \Rightarrow EK = AH$$

Tương tự $\triangle NFA = \triangle AHC$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow FN = AH$

Suy ra $EK = FN$

b) Ta có $\triangle KEI = \triangle NFI$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề) $\Rightarrow EI = FI = \frac{1}{2}EF$

Mà $AI = \frac{EF}{2}$ (gt) $\Rightarrow AI = EI = FI \Rightarrow \angle EAI = \angle IAE$ và $\angle AFI = \angle FIA$

$$\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ$$

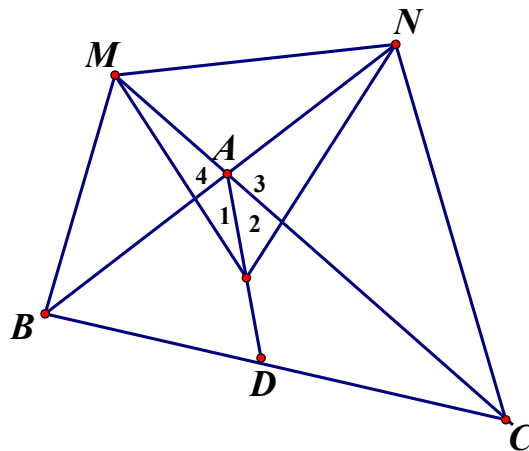
Vậy $EF = 2AI$ khi tam giác ABC vuông tại A .

Câu 4: (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle B + \angle C = 60^\circ$, phân giác AD . Trên AD lấy điểm O , trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $\angle ABM = \angle ABO$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\angle ACN = \angle ACO$. Chứng minh rằng:

- $AM = AN$.
- $\triangle MON$ là tam giác đều.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ có $\angle B + \angle C = 60^\circ$ nên $\angle A = 120^\circ$

Do AD là tia phân giác nên $\angle A_1 = \angle A_2 = 60^\circ$, ta lại có $\angle A_3 = \angle A_4 = 180^\circ - \angle A = 60^\circ$

Suy ra $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \angle A_4 (=60^\circ) \Rightarrow \begin{cases} \triangle ABM = \triangle ABD \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AM = AO & (1) \\ \triangle ACN = \triangle ACO \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AN = AO & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $AM = AN$.

b) $\triangle AOM = \triangle AON \text{ (c.g.c)} \Rightarrow OM = ON \quad (3)$

$\triangle AOM = \triangle AMN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow OM = NM \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $OM = ON = NM \Rightarrow \triangle MON$ là tam giác đều.

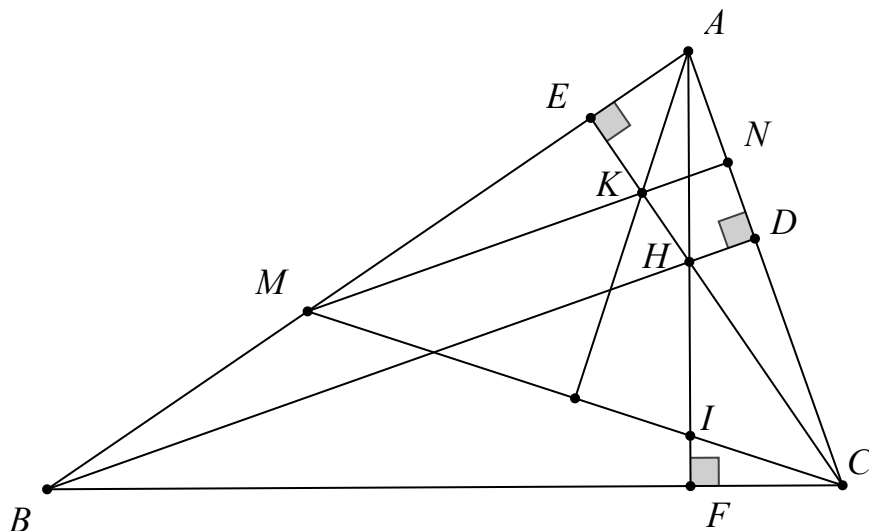
Câu 5: (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, ba đường cao BD, CE và AF cắt nhau tại H . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = AC$. Gọi N là hình chiếu của M trên AC ; K là giao điểm của MN và CE .

a) Chứng minh hai góc $\angle KAH$ và $\angle MCB$ bằng nhau.

b) Chứng minh $AB + CE > AC + BD$.

Lời giải



a) Gọi I là giao điểm của MC và AF

Ta có $MN \perp AC$ (vì song song với BD)

$\Rightarrow K$ là trực tâm của $\triangle AMC$

$\Rightarrow AK \perp MC$

$\Rightarrow \angle KAH = \angle MCB$ (cùng phụ $\angle IIF$)

b) Dễ thấy $\triangle ACE = \triangle AMN$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow CE = MN$

$AB - AC > BD - CE \Rightarrow BM > BD - MN$

$MI \perp BD \Rightarrow BM > BI$

Vậy $AB + CE > AC + BD$

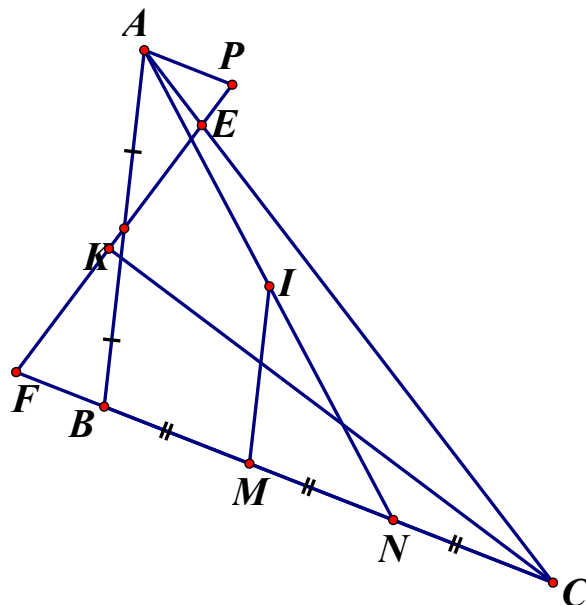
Câu 6: (HSG 7 huyện Đức Thọ 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC ($CA < CB$), trên BC lấy các điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AN tại I .

a) Chứng minh I là trung điểm của AN .

b) Qua K là trung điểm của AB kẻ đường thẳng vuông góc với đường phân giác góc $\angle ACB$ cắt đường thẳng AC tại E , đường thẳng BC tại F . Chứng minh $AE = BF$.

Lời giải



a) Từ I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại H . Nối MH

Ta có: $\triangle BHM = \triangle IMH$ vì: $\angle BHM = \angle IMH$; $\angle BMH = \angle IHM$; HM chung

$$\Rightarrow BM = IH = MN$$

$\triangle AHI = \triangle IMN$ vì: $IH = MN (cmt)$; $\angle AHI = \angle IMN (= \angle ABC)$; $\angle AIH = \angle INM$ (đồng vị)

$$\Rightarrow AI = IN \quad (\text{đpcm})$$

b) Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại P . $\triangle PKA = \triangle FKB$ vì:

$\angle PKA = \angle FKB$ (đối đỉnh); $\angle APK = \angle BFK$ (so le trong); $AK = KB \Rightarrow AP = BF (1)$

$\angle EPA = \angle FCB$ (đồng vị); $\angle CEF = \angle FCB$ (cân) $\triangle CFE$

$$\Rightarrow \angle EPA = \angle CEF \Rightarrow \triangle APE \text{ cân} \Rightarrow AP = AK (2)$$

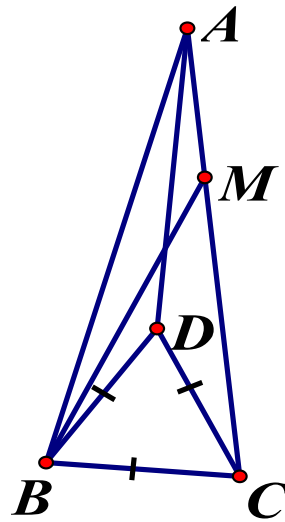
Từ (1) và (2) suy ra $AE = BF$ (đpcm)

Câu 7: (HSG 7 huyện 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC cân tại A có $\angle A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của góc $\angle ABD$ cắt AC tại M . Chứng minh:

- a) Tia AD là phân giác của $\angle BAC$.
 b) $AM = BC$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ADC$ có :

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

AD chung

$$BD = CD \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADB = \triangle ADC \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \angle DAB = \angle DAC, \text{ do đó } \angle DAB = 20^\circ : 2 = 10^\circ$$

b) $\triangle ABC$ cân tại A, mà $\angle A = 20^\circ$ nên $\angle ABC = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$

$\triangle ABC$ đều nên $\angle BDC = 60^\circ$, tia BD nằm giữa hai tia BA và BC suy ra

$$\angle ABD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ. \text{ Tia } BM \text{ là phân giác của } \angle ABD \text{ nên } \angle ABM = 10^\circ$$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle BAD$ có: AB cạnh chung, $\angle BAM = \angle ABD = 20^\circ$; $\angle ABM = \angle BAD = 10^\circ$

$$\text{Vậy } \triangle ABM = \triangle BAD \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AM = BD, \text{ mà } BD = BC \text{ (gt)} \Rightarrow AM = BC$$

Câu 8: (HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)

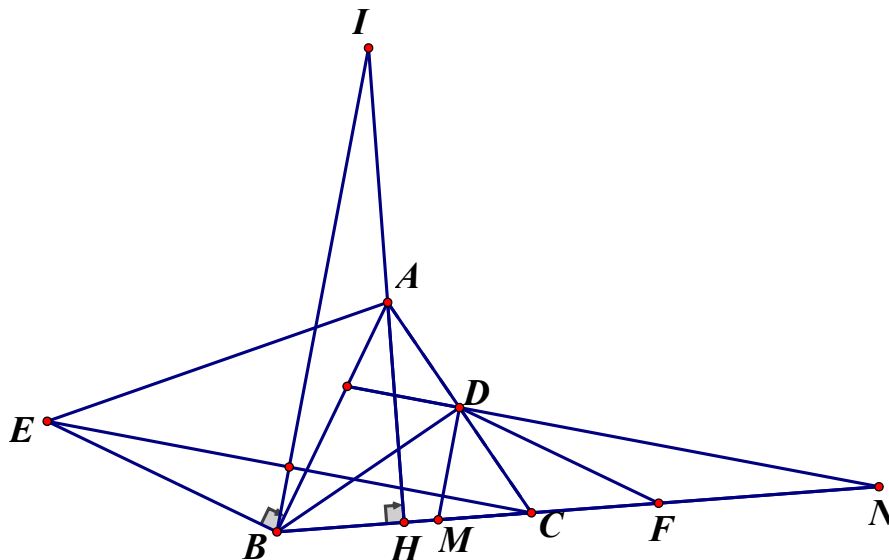
Cho tam giác ABC cân tại A và có cả ba góc đều là góc nhọn.

a) Về phía ngoài của tam giác vẽ tam giác ABE vuông cân ở B . Gọi H là trung điểm BC , trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$. Chứng minh hai tam giác ABI và BEC bằng nhau và $BI \perp CE$.

b) Phân giác của các góc $\angle ABC, \angle BDC$ cắt AC, BC lần lượt tại D, M . Phân giác của góc $\angle BDA$

cắt BC tại N . Chứng minh $BD = \frac{1}{2}MN$.

Lời giải



a) Xét hai tam giác AIB và BCE có: $AI = BC$; $BE = BA$

Góc $\angle IAB$ là góc ngoài của $\triangle ABH$ nên: $\angle IAB = \angle ABH + \angle AHB = \angle ABH + 90^\circ$

Ta có: $\angle ECB = \angle EBA + \angle ABC = \angle ABC + 90^\circ \Rightarrow \angle IAB = \angle ECB$

Do đó: $\triangle ABI = \triangle BEC$ (c.g.c)

Do đó:

Do $\triangle ABI = \triangle BEC \Rightarrow \angle AIB = \angle BCE$

Trong tam giác vuông IHB vuông tại H có: $\angle AIB + \angle IBH = 90^\circ$

Do đó: $\angle BCE + \angle IBH = 90^\circ$

Vậy CE vuông góc với BI

b) Do tính chất của đường phân giác, ta có: $DM \perp DN$

Gọi F là trung điểm của MN . Ta có: $FM = FN = DM$

Tam giác FDM cân tại F nên $\angle FMD = \angle FDM$

$\angle FMD = \angle MBD + \angle BDM$ (góc ngoài của tam giác) $= \angle MBD + \angle EDM$

$\Rightarrow \angle MBD = \angle EDF$ (1)

Ta có: $\angle MCD = \angle EDF + \angle FDC$ (2)

Do tam giác ABC cân tại A nên $\angle MCD = 2\angle MBD$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle MBD = \angle FDC$ hay tam giác DBF cân tại D .

$$BD = DF = \frac{1}{2}MN$$

Do đó:

Câu 9: (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)

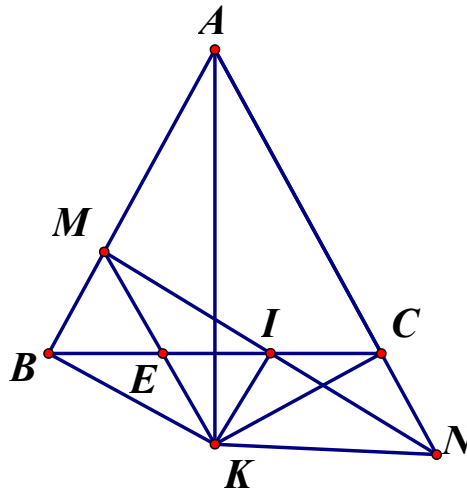
Cho tam giác ABC cân ở A . Trên cạnh AB lấy điểm M , trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $AM + AN = 2AB$.

a) Chứng minh rằng: $BM = CN$

b) Chứng minh rằng: BC đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN

c) Đường trung trực của MN và tia phân giác của $\angle BAC$ cắt nhau tại K . Chứng minh rằng $KC \perp AC$

Lời giải



a) Theo giả thiết, ta có:

$$2AB = AB + AB = AB + AM + BM$$

$$AM + AN = AM + AC + CN, \Delta ABC \text{ cân ở } A \Rightarrow AB = AC$$

$$\text{Do đó, từ } AM + AN = 2AB \Rightarrow BM = CN$$

b) Qua M kẻ $ME \parallel AC$ ($E \in BC$)

$$\Delta ABC \text{ cân ở } A \Rightarrow \Delta BME \text{ cân ở } M \Rightarrow EM = BM = CN$$

$$\Rightarrow \Delta MEI = \Delta NCI \text{ (g.c.g)} \Rightarrow IM = IN$$

Vậy BC đi qua trung điểm của MN

c) K thuộc đường trung trực của $MN \Rightarrow KM = KN$ (1)

$$\Delta ABK = \Delta ACK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow KB = KC$$
 (2); $\angle ABK = \angle ACK$ (*)

Kết quả chứng minh câu a: $BM = CN$ (3)

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \Delta BMK = \Delta CNK \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \angle ABK = \angle ACK (**)$$

Từ

$$\Rightarrow \angle ACK = \angle NCK = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow KC \perp AN$$

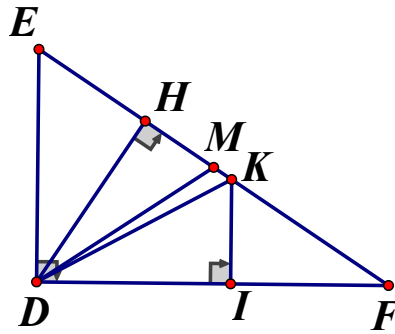
Từ (*) và (**)

Câu 10: (HSG 7 huyện Đức Phổ 2015 - 2016)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 120^\circ$. Các tia phân giác BE, CF của $\angle ABC$ và $\angle ACB$ cắt nhau tại I (E, F lần lượt thuộc các cạnh AC, AB). Trên cạnh BC lấy hai điểm M, N sao cho $\angle BIM = \angle CIN = 30^\circ$

- a) Tính số đo của $\angle MIN$.
b) Chứng minh $CE + BF < BC$.

Lời giải



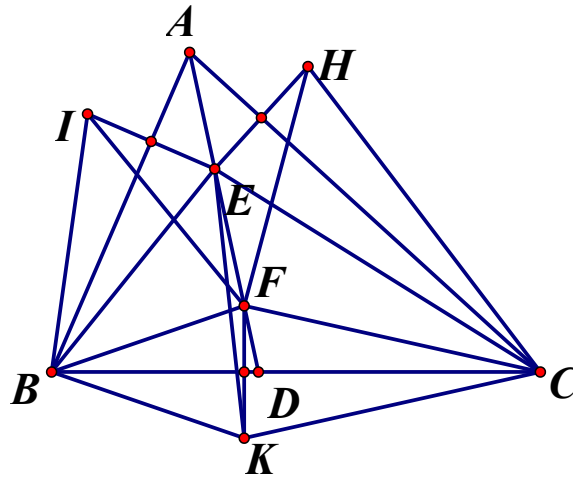
- a) Vì M là trung điểm của EF suy ra $MD = ME = MF \Rightarrow \triangle MDE$ cân tại M
 $\Rightarrow \angle E = \angle MDE$, mà $\angle HDE = \angle F$ cùng phụ với $\angle E$,
 Ta có: $\angle MDH = \angle MDE - \angle HDE$, vậy $\angle MDH = \angle E - \angle F$
 b) Trên cạnh EF lấy K sao cho $EK = ED$, trên cạnh DF lấy I sao cho $DI = DH$
 Ta có: $EF - DE = EF - EK = KF$; $DF - DH = DF - DI = IF$
 Ta cần chứng minh $KF > IF$
 $EK = ED \Rightarrow \triangle DEK$ cân $\Rightarrow \angle EDK = \angle EKD$
 $\angle EDK + \angle KDI = \angle EKD + \angle HDK = 90^\circ \Rightarrow \angle KDI = \angle HDK$
 $\triangle DHK = \triangle DIK$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle KID = \angle HKD = 90^\circ$
 Trong $\triangle KIF$ vuông tại $I \Rightarrow KF > FI$ (đpcm)

Câu 11: (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có đường phân giác AD . Trên đoạn thẳng AD lấy các điểm E và F sao cho $\angle ABE = \angle BCF$. Vẽ các điểm H, K, I sao cho AC, BC, AB theo thứ tự là đường trung trực của các đoạn thẳng EH, FK, EI .

- a) Chứng minh rằng: AD là đường trung trực của IH .
b) Chứng minh rằng: $\triangle FBI = \triangle KBE$.
c) Chứng minh rằng: $\angle ACE = \angle BCF$.

Lời giải



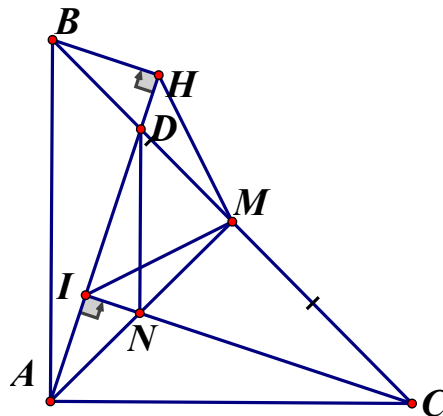
- a) Ta có $AE = AI, AH = AE$ (tính chất đường trung trực) $\Rightarrow AI = AH$
 $\Rightarrow \triangle AIH$ cân tại A có AD là tia phân giác của $\angle IAH \Rightarrow AD$ là đường trung trực của IH
- b) Ta có: $BI = BE, \angle BFI = \angle BEK, BF = BK \Rightarrow \triangle FBI = \triangle KBE$ (c.g.c)
- c) Ta có: $CH = CE, CF = CK, EH = EK = EI \Rightarrow \triangle FHC = \triangle KEC$ (c.c.c)
 $\Rightarrow \angle HCF = \angle ECK \Rightarrow \angle ACE = \angle BCF$

Câu 12: (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , M là trung điểm của BC . Lấy điểm D bất kỳ thuộc cạnh BC . H và I thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD . Đường thẳng AM cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

- a) $BH = AI$
- b) Đường thẳng DN vuông góc với AC .
- c) IM là phân giác của $\angle HIC$.

Lời giải



- a) Xét hai tam giác vuông $\triangle AIC$ và $\triangle BHA$ có:
 $AC = BA$ (gt)

$$\angle AC = \angle HBA \text{ (cùng phụ với } \angle BAH \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle AIC = \triangle BHA \text{ (cạnh huyền-góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow BH = AI$$

c) $\triangle ABC$ có AM là đường trung tuyến từ đỉnh A

$$\Rightarrow AM \text{ là đường cao của } \triangle ABC \Rightarrow AM \perp BC$$

$\triangle ADC$ có AM, CI là hai đường cao cắt nhau tại $N \Rightarrow N$ là trực tâm $\Rightarrow DN \perp AC$

$$d) \triangle BHM = \triangle AIM \Rightarrow HM = MI \text{ và } \angle BHM = \angle IMA$$

$$\text{Mà } \angle IMA + \angle BMI = 90^\circ \Rightarrow \angle BMH + \angle BMI = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle HMI \text{ vuông cân} \Rightarrow \angle HIM = 45^\circ$$

$$\text{Mà: } \angle HIC = 90^\circ \Rightarrow \angle HIM = \angle MIC = 45^\circ \Rightarrow IM \text{ là phân giác } \angle HIC$$

Câu 13: (HSG 7 trường Hồng Đà 2015 - 2016)

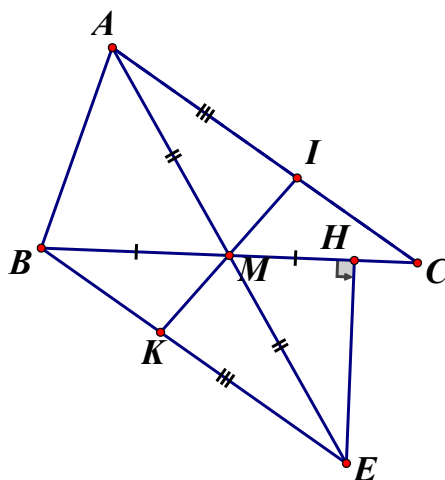
Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

$$a) AC = EB \text{ và } AC \parallel BE$$

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\angle HBE = 50^\circ$, $\angle MEB = 25^\circ$. Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$

Lời giải



$$a) \text{ Xét } \triangle AMC \text{ và } \triangle EMB \text{ có: } AM = EM(gt); \angle AMC = \angle EMB \text{ (đối đỉnh); } BM = MC(gt)$$

$$\text{Nên } \triangle AMC = \triangle EMB(c.g.c) \Rightarrow AC = EB$$

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MEB}$ (2 góc có vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC và EB cắt đường thẳng AE) suy ra $AC \parallel BE$

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có: $AM = EM$ (gt); $\widehat{MAI} = \widehat{MEK}$ (vì $\triangle AMC = \triangle EMB$)
 $AI = EK$ (gt) $\Rightarrow \triangle AMI = \triangle EMK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK}$

Mà $\widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ$ (tính chất kề bù) nên $\widehat{EMK} + \widehat{IME} = 180^\circ$

Suy ra ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Trong tam giác vuông BHE ($\widehat{H} = 90^\circ$) có $\widehat{HBE} = 50^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{HEB} = 90^\circ - \widehat{HBE} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{HEM} = \widehat{HEB} - \widehat{MEB} = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

Nên $\widehat{BME} = \widehat{HEM} + \widehat{MHE} = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$ (định lý góc ngoài của tam giác).

Câu 14: (HSG 7 trường Ân Tường Đông 2014 - 2015)

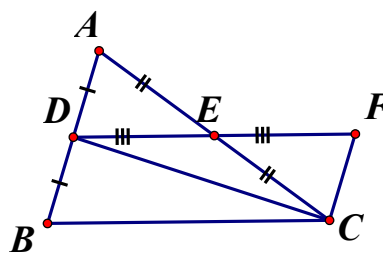
Cho tam giác ABC , D là trung điểm của AB , E là trung điểm của AC . Vẽ điểm F sao cho E là trung điểm của DF . Chứng minh rằng:

a) $AD = FC$ và $AB \parallel FC$

b) $\triangle BDC = \triangle FCD$

c) $DE \parallel BC$ và $DE = \frac{1}{2}BC$

Lời giải



a) Xét $\triangle ADE$ và $\triangle CFE$ có:

$$AE = CE \text{ (gt)}$$

$$\widehat{AED} = \widehat{CEF} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$DE = FE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CFE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AD = FC \text{ và } \widehat{DAE} = \widehat{ECF}, \text{ mà 2 góc ở vị trí so le trong}$$

$$\Rightarrow AB \parallel FC$$

b) Xét $\triangle BDC$ và $\triangle FCD$ có:

$$BD = FC \text{ (cùng bằng } AD \text{)}$$

$$\angle BDC = \angle FCD \text{ (so le trong)}$$

Cạnh DC chung

$$\Rightarrow \triangle BDC = \triangle FCD (\text{c.g.c})$$

$$c) \triangle BDC = \triangle FCD \Rightarrow \angle BCD = \angle FDC \text{ mà 2 góc này ở vị trí so le trong}$$

$$\Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow DE = \frac{1}{2} DF = \frac{1}{2} BC$$

Câu 15: (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Cho $\triangle ABC$ nhọn, AD vuông góc với BC tại D . Xác định $I; J$ sao cho AB là trung trực của DI , AC là trung trực của DJ ; IJ cắt $AB; AC$ lần lượt ở L và K . Chứng minh rằng:

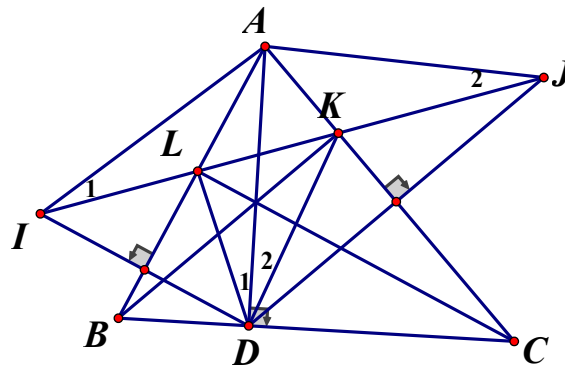
a) $\triangle AIJ$ cân

b) DA là tia phân giác của góc LDK

c) $BK \perp AC; CL \perp AB$

d) Nếu D là một điểm tùy ý trên cạnh BC . Chứng minh rằng góc IAJ có số đo không đổi và tìm vị trí điểm D trên cạnh BC để IJ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



a) Do $AB; AC$ là trung trực của DI

Nên $AI = AD; AD = AJ \Rightarrow AI = AJ \Rightarrow \triangle AIJ$ cân tại A

$$b) \triangle ALI = \triangle ALD (\text{c.c.c}) \Rightarrow \angle 1 = \angle 1$$

$$\text{Tương tự } \triangle AKD = \triangle AKJ (\text{c.c.c}) \Rightarrow \angle 2 = \angle 2$$

$$\text{Mà } \triangle AIJ \text{ cân (câu a)} \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$$

$$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow DA \text{ là tia phân giác của } \angle LDK$$

c) Chứng minh được KC là phân giác ngoài tại đỉnh K của tam giác DLK

Chúng minh được DC là phân giác ngoài tại đỉnh D của tam giác DLK

Suy ra LC là tia phân giác trong tại đỉnh L của tam giác DLK

Mà AB cũng là phân giác ngoài tại đỉnh L của tam giác DLK

Hay CL vuông góc với AB tại L

Chúng minh tương tự: BK vuông góc với AC tại K

d) Chúng minh được $\angle IAJ = 2\angle BAC$ (không đổi)

$\triangle AIJ$ cân tại A có $\angle IAJ$ không đổi nên cạnh đáy IJ nhỏ nhất nên cạnh bên AI nhỏ nhất. Ta có $AI = AD \geq AH$ (AH là đường vuông góc kẻ từ A đến BC)

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $D \equiv H$

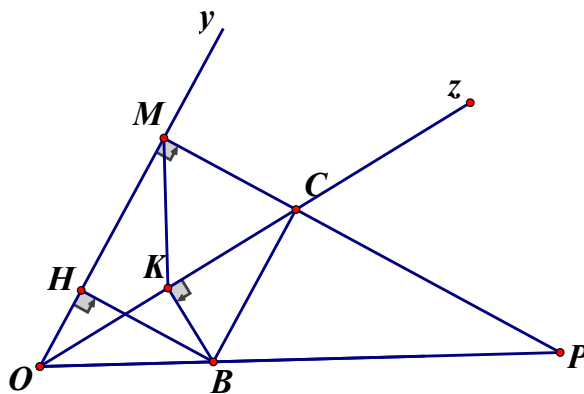
Vậy khi D là chân đường vuông góc hạ từ A đến BC thì IJ nhỏ nhất.

Câu 16: (HSG 7 huyện 2014 - 2015)

Cho Oz là tia phân giác của $\angle Oy = 60^\circ$. Từ một điểm B trên tia Ox vẽ đường thẳng song song với tia Oy cắt Oz tại điểm C . Kẻ $BH \perp Oy$; $CM \perp Oy$; $BK \perp Oz$ ($H, M \in Oy$; $K \in Oz$). MC cắt Ox tại P . Chứng minh

- K là trung điểm của OC
- $\triangle KMC$ là tam giác đều
- $OP > OC$

Lời giải



a) $\triangle ABC$ có $\angle_1 = \angle_2$ (Oz là tia phân giác của $\angle Oy$), $\angle_1 = \angle_1$ ($Oy \parallel BC$, so le trong)

$\Rightarrow \angle_2 = \angle_1 \Rightarrow \triangle OBC$ cân tại $B \Rightarrow BO = BC$, mà $BK \perp OC$ tại $K \Rightarrow KC = KO$ (hai đường xiên bằng nhau $\Rightarrow$ hai hình chiếu bằng nhau). Hay K là trung điểm OC (đpcm)

b) Học sinh lập luận để chứng minh: $\triangle KMC$ cân

Mặt khác $\triangle OMC$ có $\angle M = 90^\circ$; $\angle O = 30^\circ \Rightarrow \angle MKC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle KMC$ đều

c) $\triangle OMC$ vuông tại $M \Rightarrow \widehat{MCO}$ nhọn $\Rightarrow \widehat{OCP}$ tù (Hai góc $\widehat{MCO}; \widehat{OCP}$ bù nhau)

Xét trong $\triangle OCP$ có $\widehat{OCP}$ tù nên $OP > OC$.

Câu 17: (HSG 7 huyện Phú Thiện 2014 - 2015)

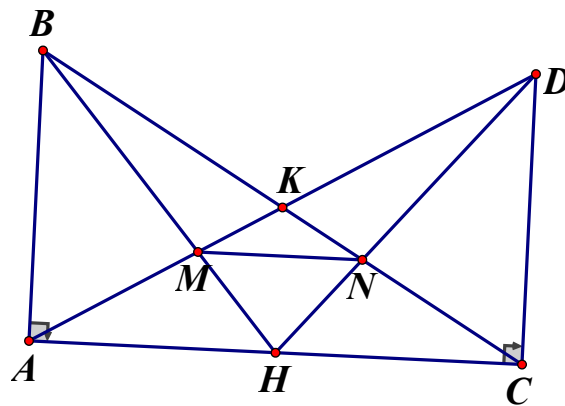
Cho tam giác ABC vuông tại A ; K là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia KA lấy D , sao cho $KD = KA$.

a) Chứng minh: $CD \parallel AB$

b) Gọi H là trung điểm của AC ; BH cắt AD tại M , DH cắt BC tại N . Chứng minh rằng $\triangle ABH = \triangle CDH$.

c) Chứng minh $\triangle HMN$ cân.

Lời giải



a) Xét 2 tam giác $\triangle ABK$ và $\triangle DCK$ có:

$$BK = CK; AK = DK (gt)$$

$$\widehat{BKA} = \widehat{CKD} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABK = \triangle DCK (c.g.c) \Rightarrow \widehat{BCK} = \widehat{CBK}$$

$$\text{Mà } \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ = \widehat{BAC} \Rightarrow AB \parallel CD (AB \perp AC, CD \perp AC)$$

b) Xét 2 tam giác vuông $\triangle ABH$ và $\triangle CDH$ có:

$$BA = CD (\text{do } \triangle ABK = \triangle DCK); AH = CH (gt) \Rightarrow \triangle ABH = \triangle CDH (c.g.c)$$

c) Xét 2 tam giác vuông: $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có:

$$AB = CD; \widehat{ACD} = 90^\circ = \widehat{BAC}; AC \text{ cạnh chung} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA (c.g.c) \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{CAD}$$

$$\text{Mà } AH = CH (gt) \text{ và } \widehat{MHA} = \widehat{NHC} (\triangle ABH = \triangle CDH) \Rightarrow \triangle AMH = \triangle CNH (g.c.g)$$

$$\Rightarrow MH = NH. \text{ Vậy } \triangle HMN \text{ cân tại } H.$$

Câu 18: (HSG 7 huyện Khoái Châu 2014 - 2015)

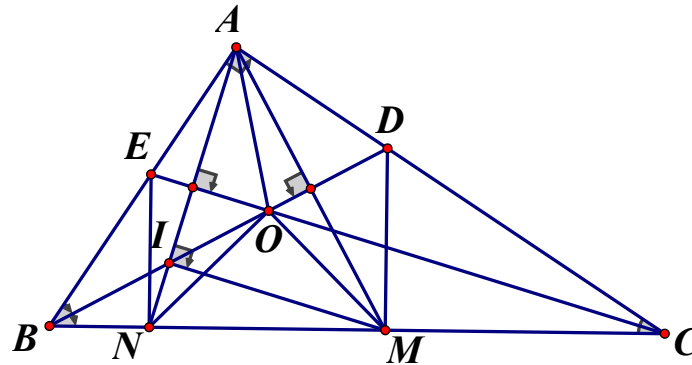
Cho tam giác ABC có $\angle A = 90^\circ$. Vẽ phân giác BD và CE ($D \in AC, E \in AB$) chúng cắt nhau tại O .

a) Tính số đo góc $\angle BOC$.

b) Trên BC lấy hai điểm M và N sao cho $BM = BA, CN = CA$. Chứng minh EN song song với DM

c) Gọi I là giao điểm của BD và AN . Chứng minh tam giác AIM vuông cân.

Lời giải



$$\angle BOC = \angle BAC + \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = 90^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$

a) Ta có

b) $\triangle ABM$ cân, nên phân giác BD đồng thời là đường trung trực $\triangle ACN$ cân, nên phân giác CE đồng thời là đường trung trực.

Suy ra $DA = DM, EA = EN$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle MBD, \triangle ACE = \triangle NCE (\text{C.C.C})$$

Suy ra $\angle DMB = \angle DAB = 90^\circ; \angle ENC = \angle EAC = 90^\circ$

Hay $EN \perp BC, DM \perp BC$. Do vậy $EN \parallel DM$

c) Phân giác BD và phân giác CE cắt nhau tại O cho ta AO là phân giác của $\angle BAC \Rightarrow \angle OAE = 45^\circ$ (1)

$$\triangle OAE = \triangle ONE (\text{C.C.C}) \Rightarrow \angle OAE = \angle ONM = 45^\circ$$

Theo chứng minh câu b, ta thấy, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $AMN \Rightarrow OM = ON$ hay $\triangle OMN$ cân tại O (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle OMN$ vuông cân tại O

Dễ thấy $\angle MON = 2\angle MAI \Rightarrow 2\angle MAI = 90^\circ \Rightarrow \angle MAI = 45^\circ$

$\triangle AIM$ có $IA = IM$ (do I thuộc trung trực BD của AM) nên cân tại I .

Lại có $\angle MAI = 45^\circ$. Vậy $\triangle AIM$ vuông cân tại I .

Câu 19: (HSG 7 huyện Thái Thụy 2015 - 2016)

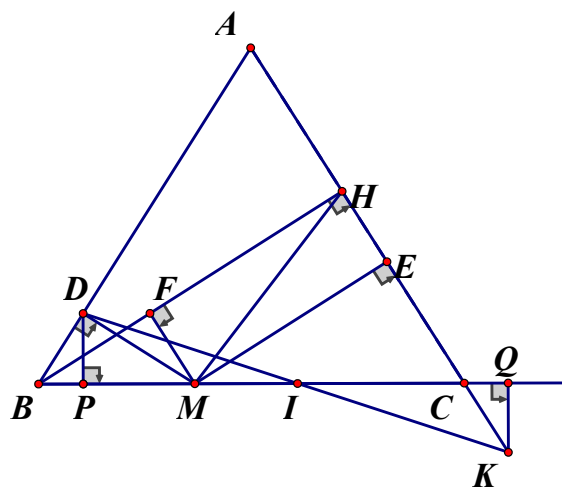
Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH .

a) Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$.

b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK .

Lời giải



a) Xét hai tam giác vuông $\triangle DBM$ và $\triangle FMB$ có:

BM chung

$\angle DBM = \angle FMB$ (cùng bằng $\angle CB$)

$\Rightarrow \triangle DBM = \triangle FMB$ (cạnh huyền - góc nhọn)

b) Theo câu a ta có: $\triangle DBM = \triangle FMB$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow MD = BF$ (1)

Chứng minh $\triangle MFH = \triangle HEM \Rightarrow ME = FH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MD + ME = BF + FH = BH$

BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đpcm)

c) Vẽ $DP \perp BC$ tại P , $KQ \perp BC$ tại Q , gọi I là giao điểm của DK và BC .

Chứng minh: $BD = FM = EH = CK$

Chứng minh $\triangle BDP = \triangle CKQ$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow DP = KQ$ (hai cạnh tương ứng)

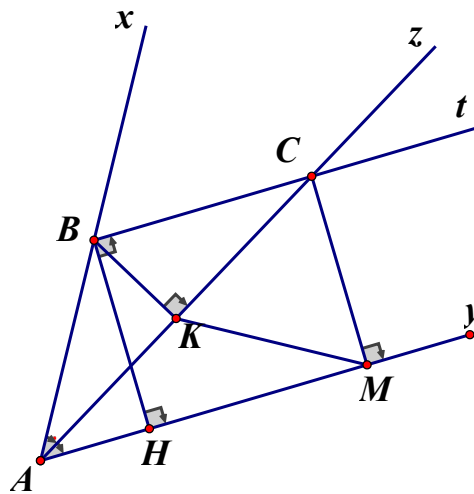
Chứng minh $\widehat{HDP} = \widehat{HKQ} \Rightarrow \Delta DPI = \Delta KQI (\text{c.g.c}) \Rightarrow ID = IK$ (đpcm)

Câu 20: (HSG 7 huyện Việt Yên 2012 - 2013)

Cho $\widehat{A} = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M . Chứng minh:

- K là trung điểm của AC
- ΔKMC là tam giác đều

Lời giải



- ΔABC cân tại B do $\widehat{CAB} = \widehat{ACB} (= \widehat{MAC})$ và BK là đường cao
 $\Rightarrow BK$ là đường trung tuyến $\Rightarrow K$ là trung điểm của AC
- $\Delta ABH = \Delta BAK$ (cạnh huyền – góc nhọn)
 $\Rightarrow BH = AK$ (hai cạnh tương ứng) mà $AK = \frac{1}{2} AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AC$

Ta có: $BH = CM$ (tính chất cặp đoạn chắn) mà $CK = BH = \frac{1}{2} AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \Delta MKC$ là tam giác cân (1)

Mặt khác $\widehat{MCB} = 90^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MCK} = 60^\circ$ (2)

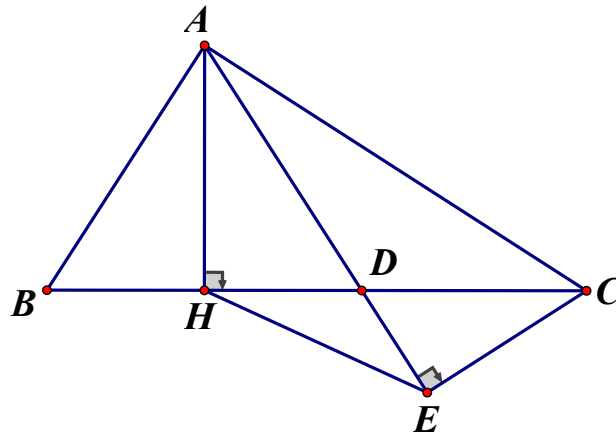
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MKC$ là tam giác đều

Câu 21: (HSG 7 huyện Bích Hòa 2013 - 2014)

Cho tam giác ABC vuông ở A , có góc $C = 30^\circ$, đường cao AH . Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ CE vuông góc với AD . Chứng minh:

- Tam giác ABD là tam giác đều
- $AH = CE$
- EH song song với AC

Lời giải



a) Tam giác ABD có AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên tam giác ABD cân ở A

Lại có $\angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ nên tam giác ABD là tam giác đều

b) $\angle EAC = \angle BAC - \angle BAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \angle ACH \Rightarrow \triangle AHC = \triangle CEA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Do đó: $AH = CE$

c) $\triangle AHC = \triangle CEA$ (cm) nên $HC = EA$

$\triangle ADC$ cân ở D vì có $\angle ADC = \angle DCA (= 30^\circ)$ nên $DA = DC$

Suy ra $DE = DH$. Tam giác DEH cân ở D .

Hai tam giác cân ADC và DEH có: $\angle ADC = \angle EDH$ (hai góc đối đỉnh) do đó

$\angle ACD = \angle DHE$ ở vị trí so le trong, suy ra $EH \parallel AC$

Câu 22: (HSG 7 huyện Xuân Dương 2013 - 2014)

Cho tam giác ABC vuông ở A có góc C bằng 30° . Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho góc

BCM bằng $\frac{2}{3}$ góc ACB , trên cạnh AC lấy điểm N sao cho góc CBN bằng $\frac{2}{3}$ góc ABC .

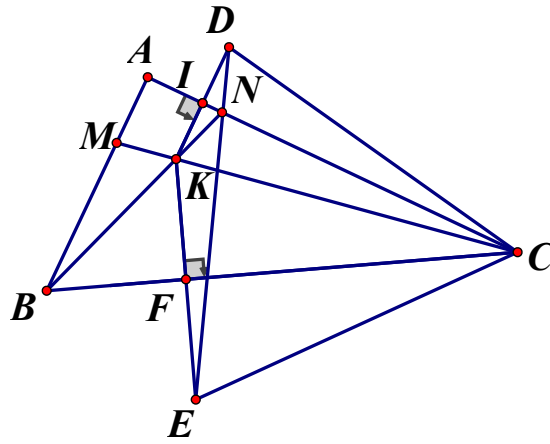
Gọi giao điểm của CM và BN là K

a) Tính góc CKN

b) Gọi F và I theo thứ tự là hình chiếu của điểm K trên BC và AC . Trên tia đối của tia IK lấy điểm D sao cho $IK = ID$, trên tia KF lấy điểm E sao cho $KF = FE$ ($E \neq K$). Chứng minh $\triangle DCE$ là tam giác đều

c) Chứng minh ba điểm D, N, E thẳng hàng

Lời giải



a) Có $\angle B = 60^\circ$ (do $\angle A = 90^\circ; \angle C = 30^\circ$)

$$\angle BDN = \frac{2}{3} \angle ABC = \frac{2}{3} \cdot 60^\circ = 40^\circ$$

$$\angle BCM = \frac{2}{3} \angle ACB = \frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 20^\circ$$

$$\angle BKC = 180^\circ - (\angle BDN + \angle BCM) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \angle KDN = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \quad (\text{hai góc kề bù})$$

b) $\triangle KIC = \triangle DIC$ (c.g.c) $\Rightarrow CK = CD$ và $\angle DCI = \angle KCI$ (1)

$\triangle KFC = \triangle EFC$ (c.g.c) $\Rightarrow CK = CE$ và $\angle KCF = \angle ECF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CD = CE \Rightarrow \triangle DCE$ cân

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Có: $\angle DCE = 2 \cdot \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle DCE$ đều

c) Xét tam giác vuông ANB có $\angle ANB = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ \Rightarrow \angle BNC = 110^\circ$

$$\triangle CND = \triangle CNK \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \angle DNC = \angle KNC = 110^\circ \Rightarrow \angle DKN = 60^\circ (\angle NCD = 10^\circ; \angle BNC = 110^\circ)$$

Có $\triangle CDE$ đều (cmt) $\Rightarrow \angle DE = 60^\circ$

Do đó $\angle DKN = \angle DE = 60^\circ$

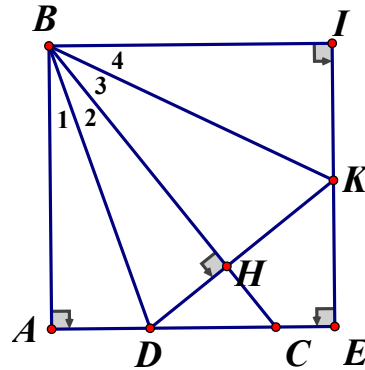
Suy ra: Tia DN trùng với tia DE hay 3 điểm D, N, E thẳng hàng

Câu 23: (HSG 7 huyện Thanh Oai 2013 - 2014)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Tia phân giác góc B cắt AC ở D . Kẻ DH vuông góc với BC . Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Đường thẳng vuông góc với AE tại E cắt tia DH ở K . Chứng minh rằng:

- a) $BA = BH$
 b) $\angle DBK = 45^\circ$
 c) Cho $AB = 4$ cm, tính chu vi tam giác DEK

Lời giải



- a) Xét hai tam giác vuông $\triangle ABD$ và $\triangle HBD$ có: BD chung; $\angle B_1 = \angle B_2$ (BD là tia phân giác)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle HBD$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow BA = BH$

- b) Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với EK , cắt EK tại I

Ta có $AB = BH$ (cm); $AE = AB$ (gt); $AE = BI$ ($BA \parallel IE$) $\Rightarrow BH = BI$

$\triangle HBK = \triangle IBK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \angle B_3 = \angle B_4$ mà $\angle B_1 = \angle B_2 \Rightarrow \angle DBK = 45^\circ$

- c) $\triangle ABD = \triangle HBD \Rightarrow AD = DH$

$\triangle HBK = \triangle IBK \Rightarrow HK = KI \Rightarrow KD = DH + HK = AD + KI$

Chu vi tam giác DEK là

$$DE + EK + KD = DE + KE + AD + KI = AE + IE = 2 \cdot AB = 2 \cdot 4 = 8 \text{ (cm)}$$