|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **THANH HÓA**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH**  **NĂM HỌC 2021 - 2022**  **MÔN THI: TOÁN - THCS**  **Ngày thi: 26/12/2021**  *Thời gian làm bài:**150 phút, không kể thời gian giao đề*  *(Đề thi có 01 trang)* |

**Câu I** **(4,0 điểm).**

1. Rút gọn biểu thức

, với 

1. Cho  là các số thực dương thoả mãn điều kiện . Tính giá trị biểu thức 

**Câu II** **(4,0 điểm).**

1. Giải phương trình .
2. Giải hệ phương trình  .

**Câu III** **(4,0 điểm).**

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  thỏa mãn phương trình



1. Cho ba số tự nhiên  thỏa mãn  là số nguyên tố và .

Chứng minh  là số chính phương.

**Câu IV** **(6,0 điểm).**

Cho nửa đường tròn  đường kính  và  là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đó (khác  và ). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ  chứa nửa đường tròn vẽ các tia tiếp tuyến  và . Tiếp tuyến tại  của nửa đường tròn cắt các tia ,  theo thứ tự tại , . Gọi  là giao điểm của  và ,  cắt  tại .

1. Chứng minh song song với  và  là trung điểm của đoạn thẳng .
2. Đường tròn nội tiếp tam giác  tiếp xúc với cạnh  tại . Chứng minh rằng

.

1. Qua  vẽ đường thẳng song song với cắt tia  tại . Gọi  là giao điểm của  và . Xác định vị trí của điểm  trên nửa đường tròn  sao cho tam giác  có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó theo .

**Câu V** **(2,0 điểm).**

Cho  là các số thực dương. Chứng minh rằng

.

------------- **HẾT** --------------

*Họ và tên thí sinh:…………………………………………SBD……………*

|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **THANH HÓA** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH**  **NĂM HỌC: 2021-2022**  **HƯỚNG DẪN CHẤM**  **Môn thi: TOÁN – THCS**  *(Hướng dẫn chấm có 06 trang)* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **NỘI DUNG** | **Điểm** |
| **I**  **4,0 điểm** | **1**. **Rút gọn biểu thức**  **, với** | **2,0** |
| Với  Ta có: | 0,5 |
|  | 0,5 |
|  | 0,5 |
| Vậy với  thì | 0,5 |
| **2.** **Cho  là các số thực dương thoả mãn điều kiện . Tính giá trị biểu thức** | **2,0** |
| Theo bài ra ta có: | 0,5 |
| Do đó  (vì ) | 0,5 |
| Tương tự: | 0,5 |
| Khi đó  Vậy | 0,5 |
| **II**  **4,0 điểm** | **1. Giải phương trình .** | **2,0** |
| Điều kiện xác định | 0,25 |
| Với , phương trình đã cho tương đương với: | 0,5 |
| Vì   > 0.  Khi đó (1) tương đương với: | 0,5 |
| **\*** Nếu: (thoả mãn ĐKXĐ)  hoặc:  (không thoả mãn ĐKXĐ) | 0,25 |
| **\*** Nếu:    (\*)  Vì : nên :  Do đó phương trình (\*) vô nghiệm  Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: . | 0,5 |
| **2. Giải hệ phương trình**  . | **2,0** |
| + ĐKXĐ:  + Với  hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình: | 0,25  0,5 |
| + Đặt:  Ta có:  hoặc (hệ phương trình vô nghiệm) | 0,5 |
| + TH1:  (thoả mãn) | 0,25 |
| + TH2:  (thoả mãn). | 0,25 |
| \* Vậy hệ phương trình có nghiệm: . | 0,25 |
| **III**  **4,0 điểm** | **1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  thỏa mãn phương trình**  **(1)** | **2,0** |
| Phương trình (1) tương đương với phương trình: (2) | 0,25 |
| Đặt: .  Phương trình (2) trở thành:    (vì ) | 0,5 |
| (3) | 0,5 |
| Vì  nên từ (3) suy ra:  (4) | 0,5 |
| Thay trực tiếp các giá trị của  từ (4) vào (3) ta được duy nhất một cặp số nguyên dương  thỏa mãn: . | 0,25 |
| **2. Cho ba số tự nhiên  thỏa mãn  là số nguyên tố và . Chứng minh  là số chính phương.** | **2,0** |
| Ta có:  Đặt  (vì  là số nguyên tố) | 0,5 |
| TH1: Xét .  Vì  nên đặt: (với )  Mà  nguyên tố nên:  Mà  và  là các số chính phương. Suy ra  là số chính phương. | 0,5 |
| Vì  nên . Mà  là số chính phương. Suy ra  là số chính phương. (1) | 0,25 |
| TH2: Xét .  Vì  mà  là số chính phương nên:    Mà và  nguyên tố nên suy ra | 0,5 |
| mà c, y  là số chính phương. (2)  Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. | 0,25 |
| **IV**  **6,0 điểm** | **Cho nửa đường tròn  đường kính  và  là điểm thay đổi trên nửa đường tròn đó (khác  và ). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ  chứa nửa đường tròn vẽ các tia tiếp tuyến  và . Tiếp tuyến tại  của nửa đường tròn cắt các tia ,  theo thứ tự tại , . Gọi  là giao điểm của  và ,  cắt  tại .** | **6,0** |
|  |  |
| **1. Chứng minh song song với  và I là trung điểm của đoạn thẳng** | **2,0** |
| Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau : . (1) | 0,25 |
| Vì  là các tia tiếp tuyến của  nên | 0,25 |
| Từ và  suy ra: (Định lí Talét đảo) hay | 0,5 |
| Xét tam giác  có   (Hệ quả của định lí Talét)  Xét tam giác  có  (Hệ quả của định lí Talét và ) | 0,5 |
| Từ  và  suy ra: . Mà  Vậy I là trung điểm của CH. | 0,5 |
| **2.** **Đường tròn nội tiếp tam giác  tiếp xúc với cạnh  tại .**  **Chứng minh rằng: .** | **2,0** |
| ***Trước hết ta chứng minh đẳng thức quen thuộc như SGK Toán 9:*** .  Gọi  lần lượt là tiếp điểm của  với đường tròn nội tiếp  Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: | 0,25 |
| .  Tương tự: | 0,5 |
| Vì điểm thuộc đường tròn đường kính nên  vuông tại . | 0,25 |
| Từ  kết hợp với (định lí Pitago), suy ra : | 0,5 |
| Áp dụng các hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác  vuông tại , đường cao  ta có: .  Từ  và  suy ra: . | 0,5 |
| **3. Qua  vẽ đường thẳng song song với cắt tia  tại . Gọi  là giao điểm của  và . Xác định vị trí của điểm  trên nửa đường tròn  sao cho tam giác  có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó theo .** | **2,0** |
| Kẻ đường cao  của tam giác . Vì  nên tứ giác  là hình bình hành. Mà nên  là hình chữ nhật.  Suy ra:  Đặt: | 0,5 |
| Áp dụng định lí Talét và hệ quả, ta có: | 0,5 |
| Áp dụng bất đẳng thức Cosi: | 0,5 |
| Từ (9), (10) suy ra :  Dấu “=” xảy ra    Điểm *C* là giao điểm của đường tròn với nửa đường tròn . | 0,5 |
| **V**  **2,0 điểm** | **Cho các số thực dương . Chứng minh rằng:** | **2,0** |
| Đặt vế trái của bất đẳng thức là .  Ta có: .  (vì  với mọi ). | 0,25 |
|  | 0,5 |
| Như vậy nếu  thì , bất đẳng thức được chứng minh (1)  Đẳng thức xảy khi và chỉ khi | 0,25 |
| Ta xét trường hợp  ⇔  . | 0,25 |
| Khi đó:      (vì ) | 0,5 |
| Vậy với  thì (2)  Từ (1) và (2) suy ra  với mọi số thực . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | 0,25 |

**----------- Hết -----------**

**Chú ý:**

**- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.**

**- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.**