Lời giải đề nghị VMO 2010

Trần Nam Dũng – Trường ĐH KHTN – ĐHQG TP.HCM

(Chú ý đây chỉ là đáp án tham khảo, không phải là đáp án chính thức)

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases}$$

Giải.

Cách 1. Nhân phương trình thứ hai với -8 rồi cộng với phương trình thứ nhất, ta được

$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = y^4 - 16y^3 + 96y^2 - 256y + 256$

$\Leftrightarrow \quad (x-2)^4 = (y-4)^4$

$\Leftrightarrow \quad x - 2 = y - 4 \vee x - 2 = 4 - y$

$\Leftrightarrow \quad x = y - 2 \vee x = 6 - y$

Thay vào phương trình đầu, ta được

(1) $-8y^3 + 24y^2 - 32y + 16 = 240 \Leftrightarrow y^3 - 3y^2 + 4y + 28 = 0$

$\Leftrightarrow (y+2)(y^2-5y+14) = 0$. Suy ra $y = -2$ và $x = -4$.

(2) $-24y^3 + 216y^2 - 864y + 1296 = 240 \Leftrightarrow y^3 - 9y^2 + 36y - 44 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)(y^2-7y+22) = 0$. Suy ra $y = 2$ và $x = 4$.

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm là $(x,y) = (-4, -2)$ và $(x, y) = (4, 2)$.

Cách 2. (Theo ý tưởng của Võ Quốc Bá Cẩn) Đặt $y = 2t$ thay vào phương trình và viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases} x^4 + 16 = 16(t^4 + 16) \quad (1) \\ x^3 - 3x^2 + 4x = 16(t^3 - 3t^2 + 4t) \quad (2) \end{cases}$$

Nhân chéo 2 phương trình này, ta được

$(x^4+16)(t^3-3t^2+4t) = (t^4+16)(x^3-3x^2+4x) \quad (3)$

Dễ thấy nếu (x, t) là nghiệm của hệ thì $xt \neq 0$ nên ta chia hai vế của phương trình trên cho x^2t^2 thì được

$$(x^2 + \frac{16}{x^2})(t - 3 + \frac{4}{t}) = (t^2 + \frac{16}{t^2})(x - 3 + \frac{4}{x})$$

Từ đây nếu đặt $u = x + 4/x$ và $v = t + 4/t$ thì ta có phương trình

$(u^2-8)(v-3) = (v^2-8)(u-3)$

$\Leftrightarrow \quad u^2v - v^2u - 3(u^2-v^2) + 8(u-v) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (u - v)(uv - 3(u+v) + 8) = 0 \quad (4)$

Từ (1) ta suy ra rằng x và t cùng dấu. Do đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta dễ dàng suy ra u, v hoặc cùng ≥ 4 hoặc cùng ≤ -4. Suy ra $(u-3)$ và $(v-3)$ luôn lớn hơn hay bằng 1 hoặc luôn nhỏ hơn hay bằng -7. Suy ra $uv - 3(u+3) + 8 = (u-3)(v-3) - 1 \geq 0$. Dấu bằng chỉ có thể xảy ra khi $u = v = 4$.

Từ lý luận trên và từ (2) ta suy ra u = v, từ đó suy ra x = t hoặc x = 4/t.
Trường hợp x = t. Thay vào phương trình (1) ta được $t^4 + 16 = 16(t^4+16)$, vô nghiệm.
Trường hợp x =4/t. Thay vào phương trình (1), ta được $256/t^4 + 16 = 16(t^4+16)$ ⇔ $t^8 + 15t^4 - 16 = 0$ ⇔ $(t^4-1)(t^4+16) = 0$ Suy ra t = ± 1. Từ đó ta được các nghiệm (x, y) = (4, 2) và (-4, -2).

Nhận xét. Lời giải 1 khá ngắn gọn nhưng đó là 1 ý tưởng không dễ nghĩ ra. Nếu như đặt x = 2u, y = 2v và đưa về hệ phương trình

$$\begin{cases} u^4 - v^4 = 15 \\ 2(u^3 - 2v^3) = 3(u^2 - 4v^2) - 2(u - 8v) \end{cases}$$

thì có lẽ sẽ dễ nhìn thấy các hệ số nhị thức hơn.

Dù sao thì đây là một ý tưởng không mới. Nó đã được sử dụng ở VMO 2004, bảng B. Thậm chí xét về 1 mặt nào đó thì bài VMO 2004 còn khó hơn bài năm nay.

Cụ thể bài VMO 2004 như sau:

Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x. \end{cases}$$

Cách giải đáp án của bài này như sau: Đặt x + y = u, x – y = v thì x =(u+v)/2,y =(u-v)/2 và hệ có thể đưa về dạng

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -98 \\ -3u^2 + 5v^2 = -9u - 25v \end{cases}$$

Sau đó nhận phương trình thứ hai với 3 rồi cộng với phương trình thứ nhất thì được $(u-3)^3 +(v+5)^3 = 0$.

Rõ ràng cách giải này tương ứng với cách giải thứ nhất của VMO 2010.

Tuy nhiên, bài VMO 2004 còn có 1 cách giải đơn giản hơn là nhân phương trình thứ hai (của hệ ban đầu) với 3 rồi cộng với phương trình thứ nhất và đưa về dạng

$$(x+1)((x-1)^2+3(y-4)^2) =0.$$

Bài 2. Cho dãy số (a_n) xác định bởi

$a_1 = 5$, $a_n = \sqrt[n]{a_{n-1}^{n-1} + 2^{n-1} + 2.3^{n-1}}$ với mọi n = 2, 3, 4, …

a) Tìm công thức tổng quát tính a_n.
b) Chứng minh dãy (a_n) giảm.

Giải.

a) Từ công thức truy hồi ta suy ra

$$a_n^n = a_{n-1}^{n-1} + 2^{n-1} + 2.3^{n-1}$$

Thay n bằng n-1, n-2, …, 2 ta được

$$a_{n-1}^{n-1} = a_{n-2}^{n-2} + 2^{n-2} + 2.3^{n-2}$$

$$a_2^2 = a_1^1 + 2^1 + 2.3^1$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế rồi giản ước các số hạng bằng nhau ở hai vế,ta được

$$a_n^n = a_1^1 + \sum_{k=2}^{n}(2^{k-1} + 2.3^{k-1}) = 5 + 2^n - 2 + 3^n - 3 = 2^n + 3^n$$

Từ đó suy ra $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

b) Để chứng minh a_n là dãy giảm, ta viết

$$(a_n)^{n+1} = \sqrt[n]{2^n + 3^n}(2^n + 3^n) > 3(2^n + 3^n) > 2^{n+1} + 3^{n+1}. \qquad (\text{Do } \sqrt[n]{2^n + 3^n} > 3)$$

Từ đây suy ra

$$a_n = \sqrt[n+1]{2^{n+1} + 3^{n+1}} = a_{n+1}.$$

<u>Nhận xét.</u> Giống như bài 2 năm ngoái, bài này là bài cho điểm. Lời giải phần b) trình bày trên đây có thể coi là gọn gàng nhất. Có thể chứng minh bất đẳng thức $a_n > a_{n+1}$ bằng nhiều cách khác nữa nhưng đều rườm rà hơn.

Bài 3. Cho đường tròn (O). Hai điểm B, C cố định trên đường tròn, BC không phải đường kính. Lấy A là một điểm trên đường tròn không trùng với B, C. AD, AE là các đường phân giác trong và ngoài của góc BAC. I là trung điểm của DE. Qua trực tâm tam giác ABC kẻ đường thẳng vuông góc với AI cắt AD, AE tại M,N.

a) Chứng minh rằng MNluôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm vị trí điểm A sao cho diện tích tam giác AMN lớn nhất.

Giải. Gọi 2α là độ lớn cung nhỏ BC. Khi đó góc BAC bằng α hoặc 180^0-α .

a) Gọi X là điểm đối xứng của O qua BC suy ra X cố định.

Ta có OX = 2d(O;BC) = 2Rcosα = AH, OX // AH (vì cùng vuông góc với BC) nên AOXH là hình bình hành. Suy ra AO // HX (1).

Lại có (CBDE) = -1 nên theo hệ thức Newton

=> $ID^2 = \overline{IB}.\overline{IC}$, mà IA = ID (tam giác ADE vuông tại A)

=> $IA^2 = \overline{IB}.\overline{IC}$ => IA tiếp xúc (O)

=> IA ⊥ OA (2)

Từ (1) và (2) suy ra XH ⊥ AI, mà MN đi qua H và ⊥ AI => M, N, X thẳng hàng. Vậy MN đi qua X cố định (đpcm).

b) Ta có ∠OAC = (180^0-AOC)/2 = 90^0 - ∠ABC = ∠HAB và AD là phân giác ∠BAC.

Suy ra AD cũng là phân giác góc OAH. Mà AE $\perp$ AD suy ra AE là phân giác ngoài góc OAH => (AO; AH; AD; AE) = -1. Mà AO //MN suy ra H là trung điểm của MN.

Suy ra $S_{AMN} = 2S_{AHN} = HA.HN.\sin(\angle AHN)$.
Mà tam giác AMN vuông tại A nên HN = HA = 2Rcosα không đổi. Hơn nữa

Từ đó suy ra S_{AMN} đạt giá trị lớn nhất bằng $4R^2\cos^2\alpha$ khi $\angle AHN = 90^0$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\angle AOX = 90^0$. Từ đó suy ra có hai vị trí để SAMN đạt giá trị lớn nhất là hai đầu mút của đường kính vuông góc với OX (tức là song song với BC).

<u>Nhận xét.</u> Lời giải trên đây dùng đến hàng điểm điều hòa và chùm điều hòa. Chúng ta có thể không dùng đến các kiến thức này mà chỉ sử dụng các tính toán về góc.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, phương trình $x^2 + 15y^2 = 4^n$ có ít nhất n nghiệm tự nhiên.

Giải.
Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Với n = 1 ta có nghiệm (2; 0),với n = 2 ta có nghiệm (4 ;0) và (1 ;1). Dễ thấy rằng nếu $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ là n nghiệm phân biệt của phương trình

$$x^2 + 15y^2 = 4^n$$

thì $(2x_1, 2y_1), (2x_2, 2y_2) \ldots (2x_n, 2y_n)$ là n nghiệm phân biệt của phương trình

$$x^2 + 15y^2 = 4^{n+1}$$

Và các nghiệm này đều có x, y cùng chẵn. Do đó để thực hiện phép chứng minh quy nạp, ta chỉ cần chứng minh bổ đề sau:

<u>Bổ đề:</u> Với mọi n $\geq$ 2, phương trình

$$x^2 + 15y^2 = 4^n$$

có nghiệm (x, y) mà x, y cùng lẻ.

Chứng minh. Với n = 2 mệnh đề đúng (x=y=1). Giả sử (x, y) là nghiệm của phương trình

$$x^2 + 15y^2 = 4^n$$

với x, y lẻ. Xét cặp các số $\left(\frac{x+15y}{2};\left|\frac{x-y}{2}\right|\right), \left(\left|\frac{x-15y}{2}\right|;\frac{x+y}{2}\right)$. Dễ dàng kiểm tra được chúng đều là nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x^2 + 15y^2 = 4^{n+1}$$

Bây giờ, do x, y cùng lẻ nên chỉ có thể xảy ra hai trường hợp.

1. x và y cùng đồng dư với nhau theo modun 4 (đồng dư 1 hoặc 3). Khi đó cặp nghiệm thứ hai là cặp nghiệm lẻ.
2. Trong hai số x và y có 1 số chia 4 dư 1 và 1 số chia 4 dư 3. Khi đó cặp nghiệm thứ nhất là cặp nghiệm lẻ.

Bổ đề được chứng minh và bài toán được giải quyết hoàn toàn.

<u>Nhận xét.</u>
Rõ ràng ý tưởng nhân đôi nghiệm của phương trình với tham số n để được nghiệm của phương trình với tham số n+1 là khá hiển nhiên. Điểm mấu chốt của lời giải là tìm thêm 1 nghiệm khác.

Ý tưởng xét bộ nghiệm như trong lời giải đến từ hằng đẳng thức Fibonacci quen thuộc $(x^2+Dy^2)(z^2+Dt^2) = (xz+Dyt)^2 + D(xt-yz)^2 = (xz-Dyt)^2 + D(xt+yz)^2$.

Bài toán này có lẽ có xuất xứ từ bài Moscow MO năm 1985. Cụ thể như sau:

Chứng minh rằng mọi số 2^n với $n \geq 3$ đều biểu diễn được dưới dạng $2^n = 7x^2 + y^2$ với x, y là các số nguyên lẻ.

Ý tưởng giải trong đáp án MMO giống như bổ đề ở trên (hay ngược lại thì đúng hơn!): Xét các cặp nghiệm $\left(\frac{x+y}{2};\left|\frac{7x-y}{2}\right|\right),\left(\frac{|x-y|}{2};\left|\frac{7x+y}{2}\right|\right)$.

Chính bài toán này sau này còn được sử dụng tại vòng 3 của Bulgarian MO năm 1996.

Bài 5. Cho bảng 3×3 và n là một số nguyên dương cho trước. Tìm số các cách tô màu không như nhau khi tô mỗi ô bởi 1 trong n màu.
Hai cách tô màu gọi la như nhau nếu 1 cách nhận được từ cách kia bởi 1 phép quay quanh tâm.

Giải.

B1	A1	B2
A4	C	A2
B4	A3	B3

Ta đánh số các ô vuông như hình vẽ. Ta nhận thấy chỉ có 3 phép quay biến hình vuông thành hình vuông là các phép quay các góc 90^0, 180^0 và 270^0 theo chiều kim đồng hồ (phép quay 360^0 giữ nguyên hình vuông).

Qua các phép quay nói trên thì C luôn không đổi. Với phép quay 90^0 thì $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_1$ và $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_1$. Tương tự với phép quay 270^0 thì $A_1 \rightarrow A_4 \rightarrow A_3 \rightarrow A_2 \rightarrow A_1$ và $B_1 \rightarrow B_4 \rightarrow B_3 \rightarrow B_2 \rightarrow B_1$. Do đó các phép quay này sẽ tạo ra một phép tô giống như cũ khi và chỉ khi các ô A được tô cùng màu và các ô B được tô cùng màu.

Với phép quay 180^0 thì $A_1 \leftrightarrow A_3$, $A_2 \leftrightarrow A_4$, $B_1 \leftrightarrow B_3$, $B_2 \leftrightarrow B_4$ do đó phép quay này tạo ra một phép tô giống như cũ khi và chỉ khi các cặp ô (A_1, A_3), (A_2, A_4), (B_1, B_3), (B_2, B_4) được tô cùng màu.

Bây giờ ta bắt đầu đếm số cách tô. Có n cách tô màu ô C. Trong số các cách tô màu 8 ô xung quanh, ta chia làm 3 loại.

<u>Loại 1.</u> Gồm các cách tô mà các ô A được tô cùng màu và các ô B được tô cùng màu. Có n cách chọn màu để tô các ô A và n cách chọn màu để tô các ô B. Suy ra có n^2 cách tô loại 1. Với loại này thì các phép quay nói trên không tạo ra cách tô mới nên số các cách tô loại 1 không thu được từ nhau qua các phép quay là n^2.

<u>Loại 2.</u> Gồm các cách tô mà các cặp ô (A_1, A_3), (A_2, A_4), (B_1, B_3), (B_2, B_4) được tô cùng màu nhưng các cách tô này không thuộc loại 1. Dễ thấy Có $n^4 - n^2$ cách tô như vậy (chưa kể đến sự trùng nhau qua phép quay). Với loại này thì phép quay các góc 90^0 và 270^0 sẽ tạo ra các cách tô mới (sẽ phải loại đi bớt) nhưng hai cách tô này trùng nhau. Như vậy có $(n^4-n^2)/2$ số cách tô loại 2 không thu được từ nhau qua phép quay.

<u>Loại 3.</u> Gồm các cách tô mà ít nhất 2 ô trong 4 cặp nói trên được tô khác màu. Dễ thấy có $n^8 - n^4$ cách tô như vậy. Tuy nhiên, mỗi một cách tô sẽ tương ứng thêm với 3 cách tô khác thu được qua phép quay 90^0, 18^0 và 270^0. Như vậy số cách tô loại 3 không thu được từ nhau qua phép quay là $(n^8 - n^4)/4$.

Như vậy, số cách tô cần tìm là

$$N = n\left(n^2 + \frac{n^4 - n^2}{2} + \frac{n^8 - n^4}{4}\right) = \frac{n^9 + n^5 + 2n^3}{4}.$$

<u>Nhận xét.</u> Bài này có thời gian và bình tĩnh thì không khó. Tuy nhiên trong áp lực phòng thi thì phải rất bản lĩnh mới dám làm. Và đây cũng thuộc dạng bài dễ sai đáp số.

Về dạng bài tương tự thì có một số bài sau (tuy nhiên dễ hơn bài VMO của mình khá nhiều).

(AIME 1996) Hai ô của hình vuông 7×7 được tô bằng màu vàng. Các ô còn lại được tô bằng màu đỏ. Hai cách tô được coi là tương đương nhau nếu chúng có thể thu được từ nhau bằng một phép quay trên mặt phẳng của hình vuông. Đếm số các cách tô màu không tương đương.

(Kvant, trong bài báo viết về định lý nhỏ Fermat của Senderov và Spivak). Đường tròn được chia thành p cung bằng nhau, trong đó p là số nguyên tố. Hỏi có bao nhiêu cách tô các cung bằng a màu. Hai cách tô được coi là giống nhau nếu có thể thu được từ nhau bằng một phép quay.

Đáp số bài AIME là $\frac{C_{49}^2 - 24}{4} + \frac{24}{2} = 300$ (bạn có thấy có nét giống?).

Đáp số bài Kvant là $\frac{a^p - a}{p} + a$. Chú ý từ kết quả này ta suy ra định lý nhỏ Fermat.